

Практическое применение интегралов в различных областях

Теплов Н.В.

Интегральное исчисление возникло в связи с решением задач определения площадей и объёмов. За 2000 лет до н.э. жители Египта и Вавилона уже умели определять приближённо площадь круга и знали правило для вычисления объёма усечённой пирамиды. Теоретическое обоснование правил вычисления площадей и объёмов впервые появились у древних греков. Философ-материалист Демокрит в V веке до н.э. рассматривает тела, как состоящие из большого числа малых частиц. То есть конус представляет собой множество весьма тонких цилиндрических дисков разных радиусов. Огромную роль в истории интегрального исчисления сыграла задача о квадратуре круга (квадратура круга - построение квадрата, площадь которого равна площади данного круга). Точную квадратуру нескольких криволинейных фигур нашёл Гиппократ (середина V века)

Первым известным методом для вычисления интеграла является метод исчерпания Евдокса (примерно 370 до н. э.). Он пытался найти площади и объемы, разрывая их на бесконечное множество частей, для которых площадь или объем уже известен. Этот метод был подхвачен и развит Архимедом, использовался для расчета площадей парабол и приближенного расчета площади круга. В своем сочинении «Квадратура параболы» Архимед пользуется методом исчерпывания для вычисления площади сектора параболы. Т.е. Архимед впервые составляет суммы, которые в наше время называются интегральными суммами. Первые значимые попытки развития интеграционных методов Архимеда, увенчавшиеся успехом, были предприняты в XVII веке, когда, с одной стороны, были достигнуты значительные успехи в области алгебры, а с другой стороны - всё более интенсивно развивались экономика, техника, естествознание, а там требовались обширные и глубокие методы изучения и вычисления величин.

В настоящее время на занятиях по математическим дисциплинам остро встает вопрос активизации познавательной деятельности студентов. Обязанностью каждого преподавателя является стимуляция этой деятельности, развития заинтересованности изучаемым материалом и стремления к самостоятельной работе. Показывая многочисленные приложения математики к решению различных задач физики, биологии, механики, экономики других наук, знакомя с новыми направлениями в естествознании, возникающими на стыке естественнонаучных и математических дисциплин, можно повысить интерес к изучению этого предмета.

В основном практическое приложение интеграла применяется в технике и физике, а также при нахождении объемов геометрических тел и при вычислении площадей разнообразных фигур.

Тогда как на экономических направлениях велика роль интеграла в моделировании экономических процессов. Для исследования и моделирования процессов, которые происходят в экономике, интегральное исчисление дает широкий математический аппарат

Как известно, основой экономической системы является производство. В связи с этим экономическую систему можно рассматривать как совокупность управляемой (производство) и управляющей систем. Из этого вытекают следующие особенности:

- большие масштабы производства как управляемой системы;
- так как производство, как система, постоянно совершенствуется, то и управление им включает управление процессами совершенствования;
- с совершенствованием научно-технического прогресса и развитием производительных сил изменяются параметры системы, что ведет к необходимости исследования новых закономерностей развития производства и их использования в управлении;
- необходимость учета комплекса социальных, биотических, экологических и других факторов связано с участием человека в производстве как неотъемлемой части производительных сил общества;
- повышение требований к методам сбора, накопления, переработки информации является следствием с усложнения производства; ее дифференциации по уровням иерархии с учетом существенности с точки зрения принятия управленческих решений.

Рассмотрим применение интегрального исчисления в экономике и приложения интегралов на примерах нахождения потребительского излишка. В рыночной экономике широко используется это понятие. Прежде чем приступить к рассмотрению конкретных примеров введем несколько экономических обозначений и понятий. С точки зрения купли продажи рынок - это сфера взаимодействия спроса и предложения. В их взаимодействии формируются цены на различные товары и услуги, поэтому они являются основными составляющими рынка. Изучением механизма их взаимодействия и занимается экономическая наука.

Зависимость между ценой товара и объемом его покупки, сложившаяся на конкретный момент времени называется спросом на какой-либо товар. На отдельный товар спрос графически изображается в виде кривой, показывающей зависимость между ценой p единицы этого товара и количеством товара q , которое потребители готовы купить при каждой заданной цене. Наклон кривой - отрицательный (чем дешевле товар, тем большее количество товара готовы купить покупатели, и наоборот).

Другое основное понятие экономической теории - предложение товара - определяется по аналогии: взаимосвязь между количеством товара, предлагаемого к продаже и ценой данного товара, сложившаяся на конкретный момент времени. Графически предложение какого-либо товара изображается в виде кривой, показывающей зависимость между ценой единицы данного товара p и количеством этого товара q , которое потребители готовы продать при каждой цене. Наклон кривой - положительный.

Большую роль в моделировании процессов экономики играет еще одно понятие - рыночное равновесие. Его характеризуют такие цена и количество, при которых величина предложения совпадает с объемом спроса. Точка пересечения кривых спроса и предложения - графическое изображение рыночного равновесия.

Перейдем теперь к рассмотрению приложений интеграла для определения потребительского излишка. Приобретая товар в количестве по равновесной цене, общие расходы на покупку такого товара составят. Предположим теперь, что товар в количестве продается продавцами не сразу, а поступает на рынок небольшими партиями. Именно такое допущение вместе с предположением о непрерывности функции спроса и предложения является основным при выводе формулы для расчета потребительского излишка.

Далее рассмотрим примеры определение излишка потребителя.

1. Известно, что спрос на некоторый товар задается функцией, где q - количество товара (в шт.), p - цена единицы товара (в руб.), а равновесие на рынке данного товара достигается при $p = 2$. Определите величину потребительского излишка

Решение.

руб.

2. Спрос на некоторый товар описывается функцией $p = 1000 - q$, а предложение данного товара характеризуется функцией $q = 500p$. Необходимо найти величину излишка потребителя при покупке данного товара.

Решение. Для расчета излишка потребителя сначала определим параметры рыночного равновесия (p^* ; q^*). Для этого решим систему уравнений

Таким образом, $p^* = 2$, $q^* = 1000$.

Запишем формулу для вычисления потребительского излишка (1), где $f(q)$ - функция, обратная функции т.е

Отсюда

При применении интегрального метода должно соблюдаться условие непрерывной дифференцируемости функции, где в качестве аргумента берется какой-либо экономический показатель. Независимо от числа элементов, которые входят в модель, а также независимо от формы связи между этими элементами интегральное исчисление устанавливает общий подход к решению моделей различных видов. При его применении имеется возможность получения более обоснованных результатов исчисления влияния отдельных факторов, чем при использовании других методов.