

# Тригонометрические уравнения

1. Арккосинус числа  $a \in [-1; 1]$  (обозначается  $\arccos a$ ) — такое число  $\alpha \in [0; \pi]$ , косинус которого равен  $a$ , т. е.

$$0 \leq \arccos a \leq \pi, \quad \cos(\arccos a) = a.$$

Если  $a \in [0; 1]$ , то  $0 \leq \arccos a \leq \frac{\pi}{2}$ , а если  $a \in [-1; 0)$ , то  $\frac{\pi}{2} < \arccos a \leq \pi$ . Если  $|a| > 1$ , то выражение  $\arccos a$  не имеет смысла.

2. Для любого  $a \in [-1; 1]$  справедливо равенство

$$\cos(\arccos a) = a. \quad (1)$$

Равенство

$$\arccos(\cos \alpha) = \alpha \quad (2)$$

является верным только при  $\alpha \in [0; \pi]$ , хотя выражение  $\arccos(\cos \alpha)$  имеет смысл при всех  $\alpha \in \mathbf{R}$ .

Для любого  $a \in [-1; 1]$  верно равенство

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a. \quad (3)$$

3. Если  $-1 \leq a \leq 1$ , то все корни уравнения

$$\cos x = a \quad (4)$$

определяются формулой

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (5)$$

Если  $|a| > 1$ , то уравнение (4) не имеет корней.

4. Формулы корней уравнения (4) при  $a = 0$ ,  $a = 1$ ,  $a = -1$ :

$$\cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}; \quad (6)$$

$$\cos x = 1, \quad x = 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}; \quad (7)$$

$$\cos x = -1, \quad x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (8)$$

3. Решить уравнение:

1)  $5 \cos x = 2$ ;

2)  $\cos 5x = -1$ ;

3)  $2 \cos \frac{x}{2} = 1$ ;

4)  $\cos \left( 3x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$ ;

5)  $4 \cos^2 x - 3 = 0$ ;

6)  $\cos 2x = \frac{3}{2\sqrt{2}}$ .

Решение.

1) Запишем уравнение в виде  $\cos x = \frac{2}{5}$  и по формуле (5) найдём его корни:  $x = \pm \arccos \frac{2}{5} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$ .

2) Применяя формулу (8), получим  $5x = \pi + 2\pi n$ , откуда  $x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi n}{5}, n \in \mathbf{Z}$ .

3) Так как  $\cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$ , то по формуле (5) получаем  $\frac{x}{2} = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n$ , где  $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ . Поэтому  $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 4\pi n, n \in \mathbf{Z}$ .

4) Применив формулу (6), получим  $3x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n$ , откуда  $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .

5) Так как  $\cos^2 x = \frac{3}{4}$ , то  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  и  $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ , откуда  $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n$  и  $x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ . Заметим, что эти две серии корней можно объединить в одну с помощью формулы  $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ . Тогда уравнение примет вид  $\cos 2x = \frac{1}{2}$ , откуда  $2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ ,  $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .

6) Уравнение  $\cos 2x = \frac{3}{2\sqrt{2}}$  не имеет корней, так как  $3 > 2\sqrt{2}$  (это следует из неравенства  $9 > 8$ ).

1. Арксинус числа  $a \in [-1; 1]$  (обозначается  $\arcsin a$ ) — такое число  $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ , синус которого равен  $a$ , т. е.

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin a \leq \frac{\pi}{2}, \quad \sin(\arcsin a) = a.$$

Если  $a \in [0; 1]$ , то  $0 \leq \arcsin a \leq \frac{\pi}{2}$ , а если  $a \in [-1; 0)$ , то  $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin a < 0$ .

Если  $|a| > 1$ , то выражение  $\arcsin a$  не имеет смысла.

2. Для любого  $a \in [-1; 1]$  справедливо равенство

$$\sin(\arcsin a) = a. \quad (1)$$

Равенство

$$\arcsin(\sin \alpha) = \alpha \quad (2)$$

является верным при  $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ , хотя выражение в левой части имеет смысл при всех  $\alpha \in \mathbf{R}$ .

Для любого  $a \in [-1; 1]$  верно равенство

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a. \quad (3)$$

3. Для любого  $a \in [-1; 1]$  справедливо равенство

$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}. \quad (4)$$

4. Если  $|a| \leq 1$ , то все корни уравнения

$$\sin x = a \quad (5)$$

определяются формулой

$$x = \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

$$x = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Если  $|a| > 1$ , то уравнение (5) не имеет корней.

5. Формулы корней уравнения (5) при  $a = 0$ ,  $a = 1$ ,  $a = -1$ :

$$\sin x = 0, \quad x = \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}; \quad (7)$$

$$\sin x = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}; \quad (8)$$

$$\sin x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (9)$$

Решить уравнение:

1)  $4 \sin x = 3$ ;      2)  $\sin 4x = -1$ ;      3)  $2 \sin \frac{x}{2} = -\sqrt{3}$ ;

4)  $\sin \left( 5x + \frac{3\pi}{4} \right) = 0$ ;      5)  $3\sqrt{3} \sin x = 2\sqrt{7}$ ;

6)  $9 \sin^2 x - 1 = 0$ ;      7)  $\sin 5x \cos 2x - \cos 5x \sin 2x = 1$ .

1) Так как  $\sin x = \frac{3}{4}$ , то по формуле (6) получаем

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{3}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

2) По формуле (9) находим  $4x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ , откуда

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

3) Корни уравнения  $\sin \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  найдём по формуле (6).

Учитывая, что  $\arcsin \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}$ , получаем

$$\frac{x}{2} = (-1)^n \arcsin \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \pi n = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + \pi n,$$

откуда  $x = (-1)^{n+1} \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$



4) Применяя формулу (7), находим  $5x + \frac{3\pi}{4} = \pi n$ , откуда  $x = -\frac{3\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .

5) Уравнение  $\sin x = \frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}$  не имеет корней, так как  $\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}} > 1$  (это вытекает из неравенства  $28 > 27$ ).

6) Так как  $\sin^2 x = \frac{1}{9}$ , то  $\sin x = \frac{1}{3}$ ,  $\sin x = -\frac{1}{3}$ , откуда  $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n$ ,  $x = (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{3} + \pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .

Заметим, что эти две серии корней можно записать в виде одной формулы, если заменить  $\sin^2 x$  на  $\frac{1 - \cos 2x}{2}$ . Тогда

получим  $\frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{9}$ ,  $\cos 2x = \frac{7}{9}$ , откуда  $2x = \pm \arccos \frac{7}{9} + 2\pi n$ ,  $x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{7}{9} + \pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .

7) Применяя формулу синуса разности, запишем уравнение в виде  $\sin(5x - 2x) = 1$ , или  $\sin 3x = 1$ , откуда по формуле (8) получим  $3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ,  $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .

1. Арктангенс числа  $a \in \mathbf{R}$  (обозначается  $\operatorname{arctg} a$ ) — такое число  $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ , тангенс которого равен  $a$ , т. е.

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = a.$$

2. Для любого  $a \in \mathbf{R}$  справедливо равенство

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a. \quad (1)$$

Равенство

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha) = \alpha \quad (2)$$

является верным только при  $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ .

Для любого  $a \in \mathbf{R}$  справедливо равенство

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a. \quad (3)$$

3. Для любого  $a \in \mathbf{R}$  уравнение  $\operatorname{tg} x = a$  имеет корни, определяемые формулой

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (4)$$

3. Решить уравнение:

1)  $\operatorname{tg} 2x = 1$ ;      2)  $\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{3} + 1 = 0$ ;      3)  $4 - 9 \operatorname{tg}^2 3x = 0$ .

Решение.

1) По формуле (4) находим  $2x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n = \frac{\pi}{4} + \pi n$ , откуда  $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .

2) Записав уравнение в виде  $\operatorname{tg} \frac{x}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ , по формуле (4) находим  $\frac{x}{3} = \operatorname{arctg} \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \pi n$ , где  $\operatorname{arctg} \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = -\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}$ .

Поэтому  $x = 3 \left( -\frac{\pi}{6} \right) + 3\pi n = -\frac{\pi}{2} + 3\pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .

3) Запишем уравнение в виде  $\operatorname{tg}^2 3x = \frac{4}{9}$ , откуда  $\operatorname{tg} 3x = \frac{2}{3}$ ,  $\operatorname{tg} 3x = -\frac{2}{3}$ . Если  $\operatorname{tg} 3x = \frac{2}{3}$ , то  $3x = \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \pi n$ ,  $x = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \frac{\pi n}{3}$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ . Если  $\operatorname{tg} 3x = -\frac{2}{3}$ , то  $x = -\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \frac{\pi n}{3}$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .

Решение тригонометрических уравнений сводится в итоге к решению одного из простейших тригонометрических уравнений  $\sin x = a$ ,  $\cos x = a$ ,  $\operatorname{tg} x = a$ . Напомним общие формулы корней этих уравнений:

Уравнение	Корни
$\sin x = a,  a  \leq 1$ (1)	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbf{Z}$
$\cos x = a,  a  \leq 1$ (2)	$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$
$\operatorname{tg} x = a, a \in \mathbf{R}$ (3)	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbf{Z}$

1. Решить уравнение  $2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 = 0$ .

Решение. Полагая  $\sin x = y$ , получаем уравнение  $2y^2 - 3y - 2 = 0$ , имеющее корни  $y_1 = 2$ ,  $y_2 = -\frac{1}{2}$ . Если  $y = -\frac{1}{2}$ , то  $\sin x = -\frac{1}{2}$ , откуда  $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n$ . Если  $y = 2$ , то  $\sin x = 2$ . Это уравнение не имеет корней.

Ответ.  $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$ .

2. Решить уравнение  $2 \sin^2 x - 3 \cos x = 3$ .

Решение. Заменяем  $\sin^2 x$  на  $1 - \cos^2 x$ . Тогда уравнение примет вид  $2(1 - \cos^2 x) - 3 \cos x = 3$ , или  $2 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$ , откуда  $\cos x = -1$ ,  $\cos x = -\frac{1}{2}$ .

Если  $\cos x = -1$ , то  $x = \pi + 2\pi n$ , а если  $\cos x = -\frac{1}{2}$ , то  $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ .

Ответ.  $x = \pi + 2\pi n, x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$ .

3. Решить уравнение  $\operatorname{tg} x - 3 \operatorname{ctg} x = 2$ .

Решение. Записав уравнение в виде  $\operatorname{tg} x - \frac{3}{\operatorname{tg} x} = 2$  и умножив обе его части на  $\operatorname{tg} x$ , получим  $\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x - 3 = 0$ , откуда  $\operatorname{tg} x = -1$ ,  $\operatorname{tg} x = 3$ . Если  $\operatorname{tg} x = -1$ , то  $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$ , а если  $\operatorname{tg} x = 3$ , то  $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n$ .

В процессе решения мы умножили обе части уравнения на  $\operatorname{tg} x$ , что могло привести к появлению посторонних корней, которые являются корнями уравнения  $\operatorname{tg} x = 0$ . Так как значения  $x$ , при которых  $\operatorname{tg} x = 0$ , не являются корнями уравнения  $\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x - 3 = 0$ , то это уравнение и исходное уравнение равносильны.

Ответ.  $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$ ,  $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .

4. Решить уравнение  $\cos 2x - 2 \cos x = 0$ .

Решение. Используя формулу  $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$  и полагая  $\cos x = t$ , получаем уравнение  $2t^2 - 2t - 1 = 0$ , имеющее

корни  $t_1 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$ ,  $t_2 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ . Так как  $-1 < t_1 < 0$ ,  $t_2 > 1$ , то

$x = \pm \arccos t_1 + 2\pi n$ , где  $\arccos t_1 = \arccos \frac{1 - \sqrt{3}}{2} = \pi - \arccos \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$ .

Ответ.  $x = \pm \left( \pi - \arccos \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \right) + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$ .

## Уравнения, однородные относительно $\sin x$ и $\cos x$

Однородные уравнения — это уравнения вида

$$\begin{aligned} a \sin x + b \cos x &= 0, \\ a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x &= 0. \end{aligned}$$

5. Решить уравнение  $2 \sin x + 5 \cos x = 0$ .

**Решение.** Заметим, что  $\cos x \neq 0$ . Действительно, если  $\cos x = 0$ , то из уравнения следует, что  $\sin x = 0$ , а это невозможно, так как  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ . Поэтому, разделив обе части уравнения на  $\cos x$ , получим уравнение  $2 \operatorname{tg} x + 5 = 0$ , равносильное исходному. Отсюда находим  $\operatorname{tg} x = -\frac{5}{2}$ . Ответ.  $x = -\operatorname{arctg} \frac{5}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$ .



6. ■ Решить уравнение  $\sin^2 x - 3 \sin x \cos x - 4 \cos^2 x = 0$ .

Решение. Разделив обе части данного уравнения на  $\cos^2 x$ , получаем равносильное уравнение  $\operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x - 4 = 0$ , откуда  $\operatorname{tg} x = 4$ ,  $\operatorname{tg} x = -1$ . Ответ.  $x = \operatorname{arctg} 4 + \pi n$ ,  $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .

З а м е ч а н и е. Уравнение  $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d$  можно свести к однородному, если воспользоваться тождеством  $d = d(\sin^2 x + \cos^2 x)$ .

**Уравнения, решаемые с помощью разложения  
их левой части на множители**

8. ■ Решить уравнение  $2 \sin x \cos 2x - 1 + \sin x - 2 \cos 2x = 0$ .

**Решение.** Сгруппируем слагаемые левой части уравнения и получим

$$\begin{aligned}2 \cos 2x (\sin x - 1) + (\sin x - 1) &= 0, \\(\sin x - 1)(2 \cos 2x + 1) &= 0.\end{aligned}$$

Поэтому исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:  $\sin x = 1$  и  $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ . В подобных случаях говорят также, что уравнение распадается на два уравнения.

**Ответ.**  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$ .

9. Решить уравнение  $\sin x \cos 3x = \cos x \sin 5x$ .

Решение. Преобразуя в обеих частях уравнения произведение в сумму (см. формулу (5) § 11), запишем уравнение в виде

$$\frac{1}{2}(\sin 4x - \sin 2x) = \frac{1}{2}(\sin 6x + \sin 4x),$$

$$\sin 6x + \sin 2x = 0.$$

По формуле суммы синусов получаем  $2 \sin 4x \cos 2x = 0$ . Заметим, что все корни уравнения  $\cos 2x = 0$  содержатся среди корней уравнения  $\sin 4x = 0$ , и найдём все решения исходного уравнения:  $x = \frac{\pi n}{4}$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .

10. Решить уравнение  $\cos^2 2x + \sin^2 x = \cos^2 3x$ .

Решение. Применяя формулы понижения степени, запишем уравнение в виде

$$\cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2} - \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 2x = \frac{\cos 6x + \cos 2x}{2}.$$

По формулам суммы и разности косинусов последовательно преобразуем полученное уравнение:

$$\begin{aligned} \cos^2 2x &= \cos 4x \cos 2x, & \cos 2x (\cos 2x - \cos 4x) &= 0, \\ & & 2 \cos 2x \sin 3x \sin x &= 0. \end{aligned}$$

Так как все корни уравнения  $\sin x = 0$  содержатся среди корней уравнения  $\sin 3x = 0$ , то исходное уравнение равносильно совокупности уравнений  $\cos 2x = 0$ ,  $\sin 3x = 0$ .

$$\text{Ответ. } x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad x = \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$