$$\nabla \times E = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\nabla B = 0$$

$$\nabla \times H = \frac{4\pi}{c} j + \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t}$$

$$\nabla D = 4\pi\rho$$

Таким образом, полная система уравнений Максвелла дифференциальной и интегральной формах имеет вид:

$$\mathrm{rot}\vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{j}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t}, \qquad \oint_L \left(\vec{\mathbf{H}}, d\vec{\mathbf{l}}\right) = \int_S \left(\vec{\mathbf{j}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t}\right) d\vec{\mathbf{S}}$$

- обобщенный закон Био-Савара-Лапласа

$$\mathrm{rot}\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}, \qquad \oint_L \left(\vec{\mathbf{E}}, d\vec{\mathbf{l}}\right) = -\int_S \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} d\vec{\mathbf{S}}$$

- закон Фарадея

$$\mathrm{div}\vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}, \qquad \oint_S \left(\vec{\mathbf{D}}, d\vec{\mathbf{S}}\right) = \int_V \rho\, dV$$

- теорема Гаусса

$$\mathrm{div}\vec{\mathbf{B}} = 0, \quad \oint_S \left(\vec{\mathbf{B}}, d\vec{\mathbf{S}}\right) = 0$$

- отсутствие магнитных зарядов

$$\vec{\mathbf{B}} = \mu_0\mu\vec{\mathbf{H}}, \qquad \vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{\mathbf{E}}, \qquad \vec{\mathbf{j}} = \sigma\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{j}}_{стр}.$$

Уравнения Максвелла в интегральной форме

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$$

Первое уравнение показывает, что источником электрического поля могут быть не только электрические заряды, но и изменяющиеся во времени магнитные поля.

$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$$

Уравнение показывает, что магнитные поля могут возбуждаться либо движущимися зарядами (электрическими токами), либо переменными электрическими полями.

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = \int_V \rho dV$$

Это – постулат Максвелла, выражающий закон создания электрических полей действием зарядов в произвольных средах.

$$\oint_S \vec{B}dS = 0$$

Магнитное поле не имеет стоков и истоков, линии поля не имеют ни начала ни конца. Магнитное поле называют соленоидальным или вихревым.

$$\mathrm{rot}\bar{H} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \bar{j} \qquad \int_S \mathrm{rot}\,\bar{H}\,\overline{ds} = \int_S \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\overline{ds} + \int_S \bar{j}\,\overline{ds}.$$

$$\oint_L \bar{H}\,\overline{dl} = \int_S \mathrm{rot}\,\bar{H}\,\overline{ds}$$

$$\oint_L \bar{H}\,\overline{dl} = \frac{d}{dt}\int_S \bar{D}\,\overline{ds} + I \qquad I = \int_S \bar{j}\,\overline{ds}.$$

$$\oint_L \bar{H}\,\overline{dl} = I \qquad \oint_L \bar{H}\,\overline{dl} = \frac{d}{dt}\int_S \bar{D}\,\overline{ds}$$

ток проводимости отсутствует $(I = 0)$

$$I_{\text{см}} = \frac{d}{dt}\int_S \bar{D}\,\overline{dS} = \int_S \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} ds$$

Вычислим $div\, rot\, \vec{a}$:

$$div\, rot\, \vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}(rot\, \vec{a})_x + \frac{\partial}{\partial y}(rot\, \vec{a})_y + \frac{\partial}{\partial z}(rot\, \vec{a})_z =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial y \partial z} = 0 .$$

$$\text{div rot } H \equiv 0 .$$

$$\text{div}\left(\frac{\partial \overline{D}}{\partial t} + \overline{j}\right) = 0.$$

вектор плотности полного тока $\frac{\partial \overline{D}}{\partial t} + \overline{j}$ не имеет источников (стоков).

$$\frac{\partial}{\partial t}(\text{div}\overline{D}) + \text{div}\,\overline{j} = 0 \qquad \text{div}\overline{D} = \rho \qquad \text{div}\,\overline{j} = -\partial\rho/\partial t$$

Возможные определения и толкования дивергенции

Определение дивергенции	Математическое определение	Условие определения	Физический смысл дивергенции
Общепринятое определение, разделяемое и автором	$div\ \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	Пространственная производная вектора в рассматриваемой точке поля	Пространственная расходимость или сходимость векторного поля
Общепринятое определение, не разделяемое автором	$div\ \vec{F}(M) = \lim \frac{\oint \vec{F} \cdot d\vec{S}}{dV}$ при $dV \to 0$	Объемная плотность потока через замкнутую поверхность предельно малого объема	Дивергенция – это истоки и стоки векторного поля
Встречающийся в литературе вариант, не разделяемый автором	$div\ \vec{F} = \frac{\vec{F}\vec{S}_n}{V}$ при $S \to 0$ и $V \to 0$	Объемная плотность потока при $S \to 0$ и $V \to 0$	Объемная плотность потока векторного поля
Авторский вариант 1	$div\ \vec{F} = \lim \frac{\Delta(\vec{F}\vec{S}_n)}{V}$ при $S \to 0$ и $V \to 0$	Дивергенция – скаляр, численно равный градиенту объемной плотности потока	Пространственное изменение объемной плотности потока вектора
Авторский вариант 2	$div\ \vec{F} = \frac{d\lvert F \rvert}{d\vec{\tau}_{\vec{F}}}$	Дивергенция – это изменение модуля вектора	Пространственное изменение модуля вектора

$$rot\vec{A} \equiv \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right).$$

Переход к уравнениям Максвелла в дифференциальной форме осуществляется на основании

теоремы Остроградского-Гаусса:

$$\oint_S \vec{A}d\vec{S} = \int_V div\vec{A}dV,$$

теоремы Стокса:

$$\oint_L \vec{A}d\vec{l} = \int_S rot\vec{A}d\vec{S}.$$

Таким образом, полная система уравнений Максвелла дифференциальной и интегральной формах имеет вид:

$$\mathrm{rot}\vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{j}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t}, \qquad \oint_L \left(\vec{\mathbf{H}}, \mathrm{d}\vec{\mathbf{l}}\right) = \int_S \left(\vec{\mathbf{j}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t}\right) d\vec{\mathbf{S}}$$

- обобщенный закон Био-Савара-Лапласа

$$\mathrm{rot}\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}, \qquad \oint_L \left(\vec{\mathbf{E}}, \mathrm{d}\vec{\mathbf{l}}\right) = -\int_S \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} d\vec{\mathbf{S}}$$

- закон Фарадея

$$\mathrm{div}\vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}, \qquad \oint_S \left(\vec{\mathbf{D}}, \mathrm{d}\vec{\mathbf{S}}\right) = \int_V \rho \mathrm{d}V$$

- теорема Гаусса

$$\mathrm{div}\vec{\mathbf{B}} = 0, \quad \oint_S \left(\vec{\mathbf{B}}, \mathrm{d}\vec{\mathbf{S}}\right) = 0$$

- отсутствие магнитных зарядов

$$\vec{\mathbf{B}} = \mu_0\mu\vec{\mathbf{H}}, \qquad \vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{\mathbf{E}}, \qquad \vec{\mathbf{j}} = \sigma\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{j}}_{стр}.$$

$$\Delta\mathbf{E} - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \Delta\mathbf{H} - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} = 0.$$

$\Delta = \nabla^2$ – дифференциальный оператор Лапласа

$$\upsilon = \left(\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\right)^{-1/2}$$

Объемная плотность энергии электростатического поля:

СИ СГС

$$W_E = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r \left|\vec{E}\right|^2}{2}$$ (Дж/м3) $$W_E = \frac{\varepsilon \left|\vec{E}\right|^2}{8\pi}$$ (Эрг/см3) (2.2.1)

Объемная плотность энергии магнитного поля:

СИ СГС

$$W_H = \frac{\mu_0 \mu_r \left|\vec{H}\right|^2}{2}$$ (Дж/м3) $$W_H = \frac{\mu \left|\vec{H}\right|^2}{8\pi}$$ (Эрг/см3) (2.2.2)

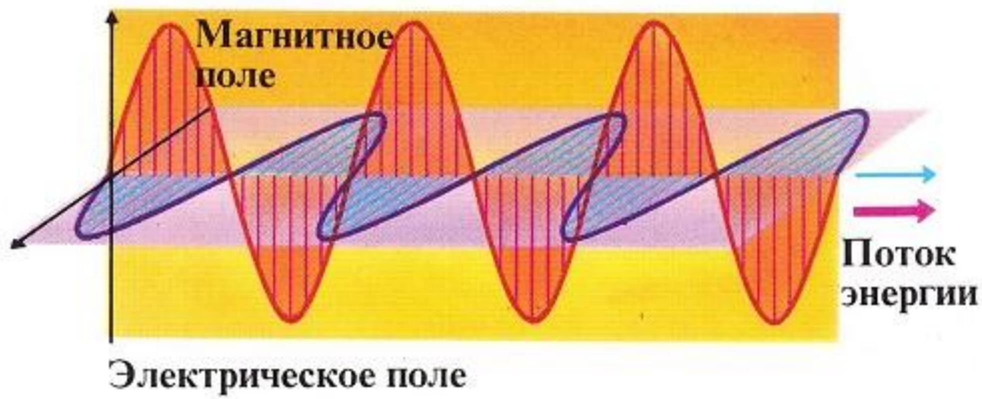
Очевидно, что полная энергия, запасенная электрическим и магнитным полями в объеме V0, определяется интегралами по объему:

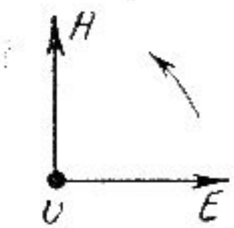
$$W_E^{total} = \int_{V_0} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r \left|\vec{E}\right|^2}{2} dV$$ (2.2.3)

$$W_H^{total} = \int_{V_0} \frac{\mu_0 \mu_r \left|\vec{H}\right|^2}{2} dV$$ (2.2.4)

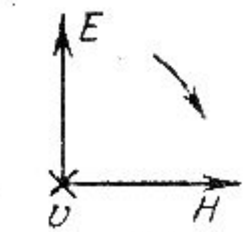
для энергии, запасенной в конденсаторе с емкостью C
и катушке с индуктивностью *L*,
если к конденсатору приложена разность потенциалов *U*,
через катушку протекает ток *I*:

$$W_C = \frac{CU^2}{2} \quad W_L = \frac{LI^2}{2}$$ (2.2.5)





Волна движется
на нас



Волна движется
от нас