

# Отображение

В то время как полный поворот на плоскости  $\pi$  обычно осуществляется в двумерном пространстве относительно нормали к плоскости, отображение представляет собой тот же поворот на угол  $\pi$  в трехмерном пространстве и обратно на плоскость относительно оси, лежащей в плоскости  $\pi$ . На рис. 2-6 приведены примеры двух отражений на плоскости треугольника. Отражение относительно прямой (ось  $\pi$ ) получено с использованием матрицы.



(2-33)

В этом случае новые вершины треугольника  $T'$  будут определяться преобразованием



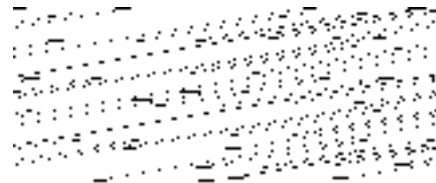
Подобным образом отображение относительно оси  $Ox$  при  $\alpha = 0$  будет иметь вид


$$(2-34)$$

Отображение относительно прямой  $Ox = Oy$  осуществляется с помощью [матрицы](#)


$$(2-35)$$

Выполнив преобразования, получим координаты вершин треугольника 



Аналогичным образом отображение относительно оси  $Oy$  будет иметь вид


$$(2-36)$$

У каждой из этих матриц [определитель](#) равен  $-1$ . В общем случае, если определитель [матрицы](#) преобразования равен  $-1$ , то преобразование дает полное отображение.

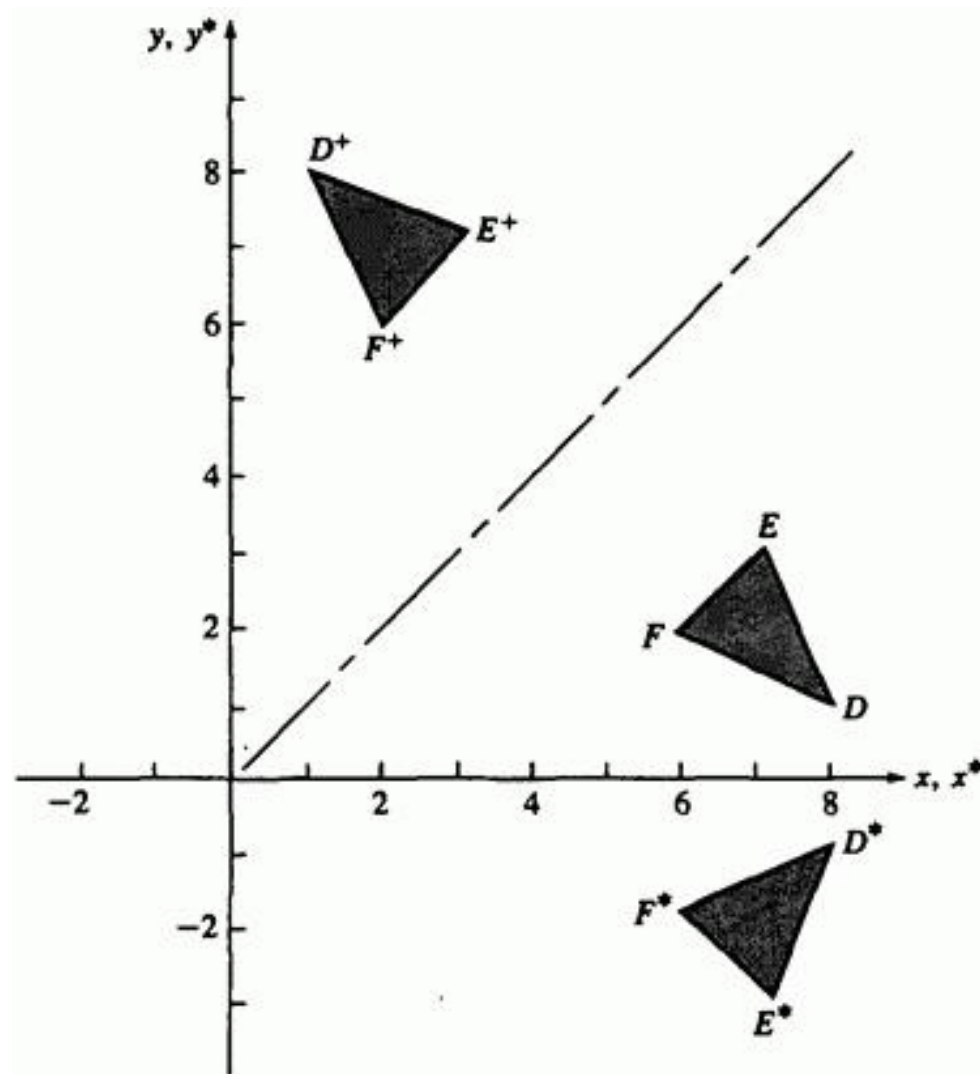


Рис. 2-6 Отображение.

Если оба полных отображения осуществляются последовательно относительно прямых, проходящих через начало координат, то результатом будет полный поворот относительно начала координат. Это можно увидеть, обратившись к следующему примеру.

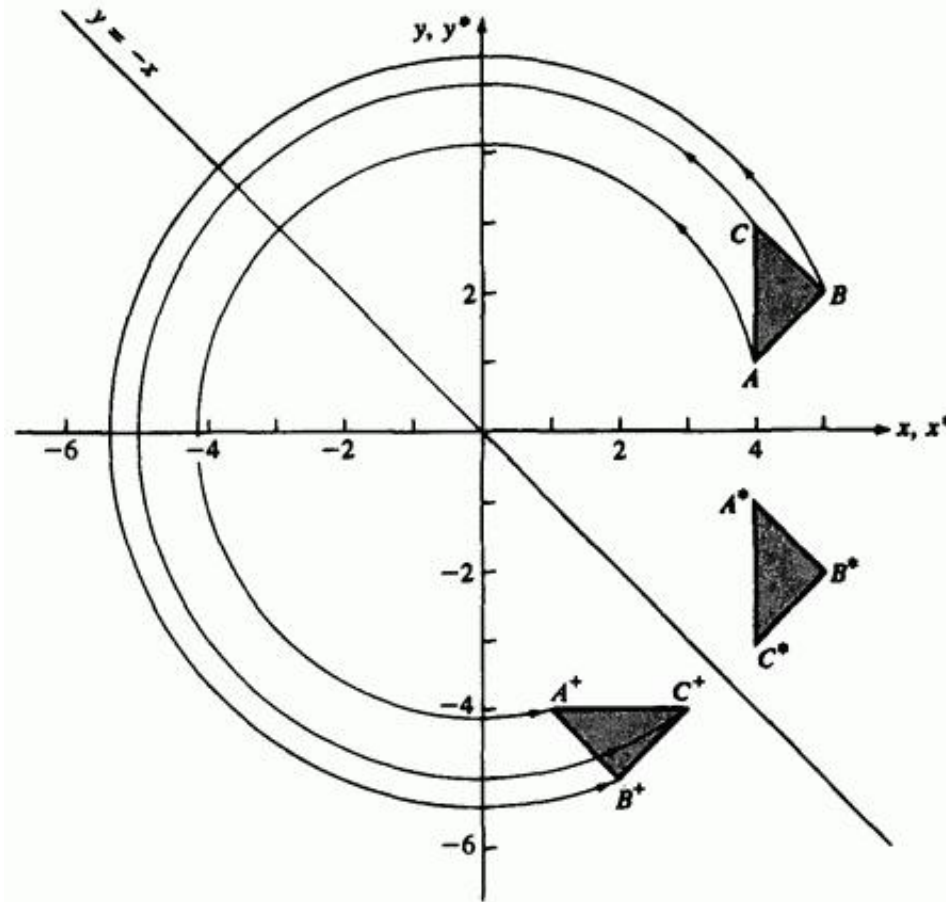
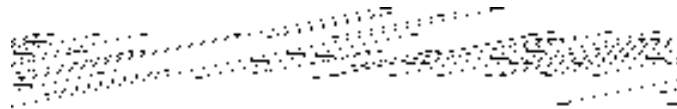


Рис. 2-7 Выполнение отражения путем поворота.

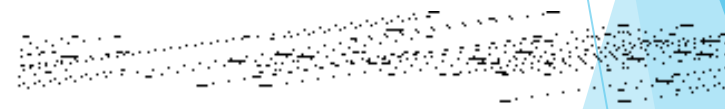
## Комбинированные операции

Возможности матричного метода достаточно ясно описаны в предыдущих разделах книги. С помощью матричных операций над координатными векторами, определяющими вершины фигур, можно управлять формой и положением поверхности. Однако для получения желаемой ориентации может потребоваться более одного преобразования. Так как операция умножения матриц не коммутативна, то важен порядок выполнения преобразования.

Для иллюстрации эффекта не коммутативности операции умножения матриц рассмотрим преобразования поворота и отражения координатного вектора. Если в след за поворотом (посредством  $R$ ) производится отражение относительно прямой  $l$  (посредством  $M$ ), то эти два последовательных преобразования дают



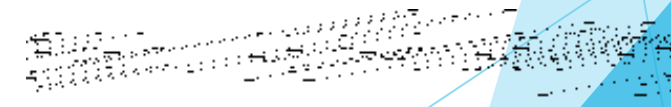
и затем



С другой стороны, если отражение следует за поворотом, то получатся следующие результаты:



и



Оба результата различны, что подтверждает важность порядка применения матричных преобразований.

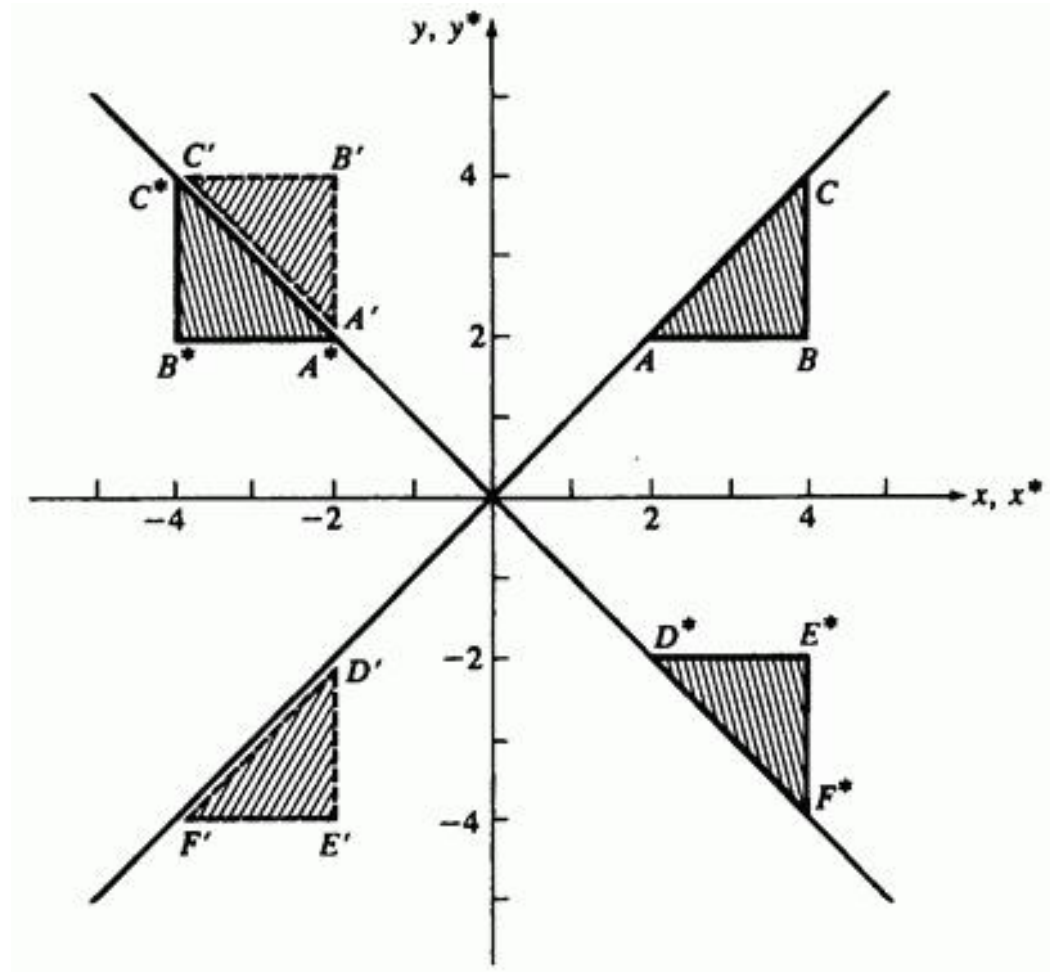
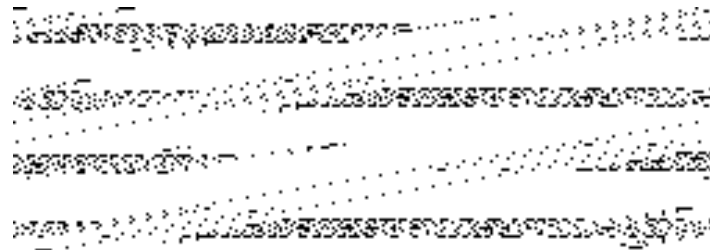


Рис. 2-10 Комбинированное преобразование на плоскости

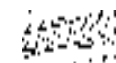
## ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЕДИНИЧНОГО КВАДРАТА

До сих пор мы рассматривали поведение точек и линий для определения результатов простых матричных преобразований. Однако можно корректно рассматривать применение матрицы к любой точке плоскости. Как было показано ранее, единственная точка, остающаяся инвариантной при воздействии матричных преобразований, - это точка начала координат. Все другие точки плоскости подвержены преобразованию, которое можно представить как растяжение исходной плоскости, системы координат и перевод в новую форму. Формально принято считать, что преобразование вызывает переход от одного координатного пространства к другому.

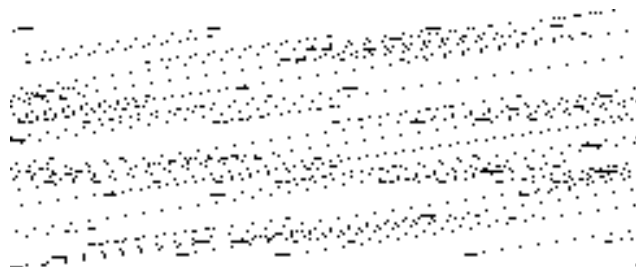
Рассмотрим координатную сетку, состоящую из единичных квадратов на координатной плоскости (рис. 2-11). Четыре координатных вектора вершин единичного квадрата, проходящие под одним углом к началу координат, имеют следующий вид:



Такой единичный квадрат изображен на рис. 2-11а. Применяя к нему



-матрицу общего преобразования, получаем



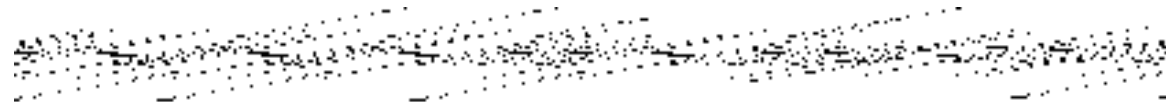
(2-38)



Результаты этого преобразования показаны на рис. 2-11b. Из выражения (2-38) следует, что начало координат не подвергается преобразованию, т.е.  $x_0 = 0, y_0 = 0$ . Далее отметим, что координаты  $x_1, y_1$  равны первой строке матрицы преобразования, а координаты  $x_2, y_2$  - второй. Таким образом, матрица преобразования является определенной, если определены координаты  $x_1, y_1$  и  $x_2, y_2$  (преобразование единичных векторов  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ ). Поскольку стороны единичного квадрата первоначально параллельны и ранее было показано, что параллельные линии преобразуются снова в параллельные, то результирующая фигура является параллелограммом.

Влияние элементов  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$  и матрицы  $T$  может быть установлено отдельно. Элементы  $a_{11}$  и  $a_{22}$ , как видно из рис. 2-11b, вызывают сдвиг (см. разд. 2-4) исходного квадрата в направлениях  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$  соответственно. Как отмечалось ранее, элементы  $a_{11}$  и  $a_{22}$  играют роль масштабных множителей. Таким образом, матрица  $T$  задает комбинацию сдвига и масштабирования.

Несложно определить также площадь параллелограмма  $S$  из рис. 2-11b, которую можно вычислить следующим образом:



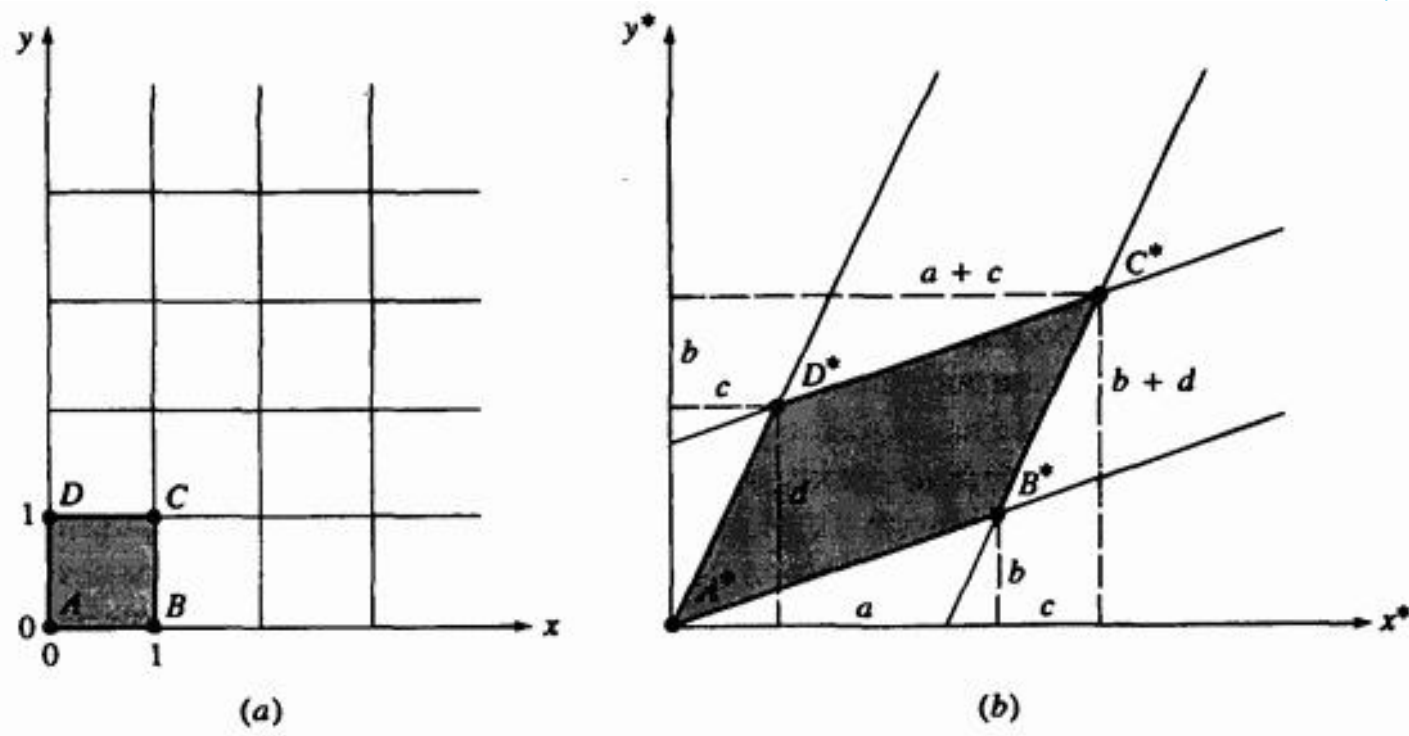


Рис. 2-11 Общее преобразование единичного квадрата: а) до преобразования; б) после преобразования

В результате получаем:

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \quad (2-39)$$

Можно показать, что площадь любого параллелограмма, образованного путем преобразования квадрата, есть функция от определителя матрицы преобразования и связана с площадью исходного квадрата простым отношением

$$S_{\text{параллелограмма}} = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \cdot S_{\text{квадрата}} \quad (2-40)$$

Фактически, так как площадь всей фигуры равна сумме площадей единичных квадратов, то площадь любой преобразованной фигуры зависит от площади исходной фигуры

$$S_{\text{преобразованной}} = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \cdot S_{\text{исходной}} \quad (2-41)$$

Это полезный способ определения площадей произвольных фигур.

Эти способы наряду с соответствующими алгоритмами рисования используются для изображения объектов или визуализации графической информации. Возможность проводить преобразования точек и линий является фундаментом машинной графики. Нарисованный объект может быть представлен в нужном масштабе, повернут, перемещен, преобразован или модифицирован в соответствии с требованиями решаемой задачи. Все эти манипуляции с изображением можно выполнить, используя математический аппарат