МНОЖЕСТВА

Тема 1

Основные понятия

- *Множеством* называется совокупность каких-либо объектов, обладающим общим для всех характеристическим свойством.
- «Множество есть многое, мыслимое как целое» – Г. Кантор

- Объекты, составляющие множество, называются *элементами множества*.
- Множества обозначают большими буквами, например, *A, B, C,*

элементы – маленькими буквами, например, *a, b, c.*

- Множество и его элементы обозначаются следующим образом:

$A = \{a_1, a_2, a_3\}$ – множество, состоящее из трех элементов;

$A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ – множество, состоящее из бесконечного

Основные понятия

- Множество, число элементов которого конечно, называют *конечным* и *бесконечным* в противном случае.
- Бесконечные множества разделяются на *счётные* и *несчётные*. Если элементы бесконечного множества можно пронумеровать с помощью натурального ряда чисел, то оно называется счётным и несчётным в противном случае.

- $a \in A$ – элемент a принадлежит множеству A
- $a \notin A$ – элемент a не принадлежит множеству A
- Если все элементы множества A являются элементами множества B и наоборот, то говорят, что множества A и B совпадают и пишут $A = B$
- Если каждый элемент множества A является элементом множества B, говорят, что множество A является *подмножеством* множества B, и записывают $A \subseteq B$ или $B \supseteq A$
- Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то по ранее введенному определению $A = B$.
- Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то A есть *собственное подмножество* B, $A \subset B$.
- Если A не является собственным подмножеством B, то записывают $A \not\subset B$.

Основные понятия

- Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым множеством* и обозначается $\varnothing$.
- $\varnothing \subseteq A$, где A – любое множество
- Множество всех элементов, которые могут встретиться в данном исследовании, называют *универсальным* и обозначают U.

- Множество всех подмножеств данного множества A называется множеством-степенью и обозначается $P(A)$.
- Число подмножеств любого конечного множества, содержащего n элементов равно 2^n

Способы задания множеств

1. Перечисление элементов множества.

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ – конечное множество

$B = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ – бесконечное множество

2. Указание свойств элементов множества:

$A = \{a \mid$ указание свойства элементов$\}$. Здесь a является элементом множества A, $a \in A$.

$A = \{a \mid a$ – простое число$\}$ – множество простых чисел

$B = \{b \mid b^2 - 1 = 0,\ b$ – действительное число$\}$ – множество, состоящее из двух элементов, $B = \{-1, 1\}$

$Z = \{x \mid \frac{\sin x}{x} = 1\}$ – множество, состоящее из одного числа, $x = 0$

Операции над множествами

- *Объединением*, или суммой множеств A и B называется множество C, элементы которого принадлежат хотя бы одному из множеств A или B:

$$C = A \cup B = \left\{ c_i \mid c_i \in A \ \text{или} \ c_i \in B \right\}$$

- Пересечением множеств A и B называется множество C, элементы которого принадлежат как множеству A, так и множеству B:

$$C = A \cap B = \left\{ c_i \mid c_i \in A \ \text{и} \ c_i \in B \right\}$$

- Дополнением A множества A есть множество, элементы которого принадлежат универсальному множеству U и не принадлежат A:

$$C = \overline{A} = \left\{ c_i \mid c_i \notin A \ \text{и} \ c_i \in U \right\}$$

Операции над множествами

- *Разность множеств* A\ B – множество, состоящее из элементов множества A и не принадлежащих множеству B:

$$C = A \setminus B = \{c_i \mid c_i \in A \text{ и } c_i \notin B\}$$

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}$$

- Симметрическая разность:

- Декартовым произведением $A \times B$ является множество C всех упорядоченных пар <a_i,b_j>, где $a_i \in A,\ b_j \in B$:

$$C = A \times B = \{\langle a_i, b_j \rangle \mid a_i \in A, b_j \in B\}$$

Свойства операций над множествами

1. *Коммутативность*.

а) $A \cup B = B \cup A$;

б) $A \cap B = B \cap A$.

2. *Ассоциативность*.

а) $A \cup (B \cup C) = (A \cup C) \cup C$;

б) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

3. *Дистрибутивность*.

а) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

б) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

4. *Закон де Моргана*.

а) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

б) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Свойства операций над множествами

5. *Идемпотентность*.

а) $A \cup A = A$;

б) $A \cap A = A.$

6. *Поглощение.*

а) $A \cup (A \cap B) = A$;

б) $A \cap (A \cup B) = A.$

7. Расщепления (склеивания).

а) $(A \cup B) \cap \left(A \cup \overline{B}\right) = A$

б) $(A \cap B) \cup \left(A \cap \overline{B}\right) = A$

8. Двойное дополнение.

$$\overline{\overline{A}} = A$$

Свойства операций над множествами

9. Закон исключенного третьего.

а) $A \cup \overline{A} = U$

б) $A \cap \overline{A} = \varnothing$

10. *Операции с пустым и универсальным множествами.*

а) $A \cup U = U$;

б) $A \cup \varnothing = A$;

в) $A \cap U = A$;

г) $A \cap \varnothing = \varnothing$;

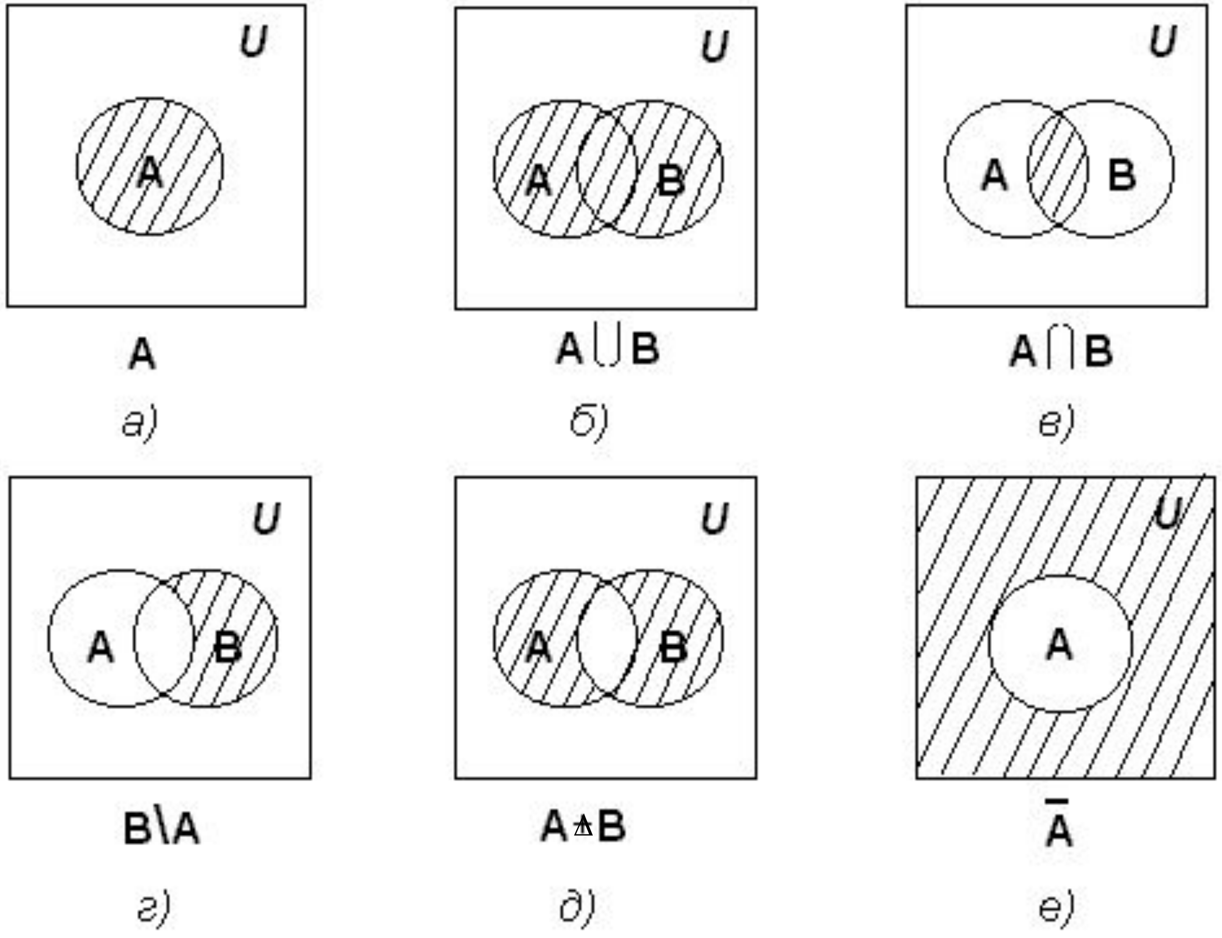
д) $\overline{\varnothing} = U$

е) $\overline{U} = \varnothing$

11. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

Геометрическое моделирование множеств. Диаграммы Эйлера-Венна

Универсальное множество изображают в виде прямоугольника, а множества, входящие в универсальное множество, – в виде кругов внутри прямоугольника; элементу множества соответствует точка внутри круга.

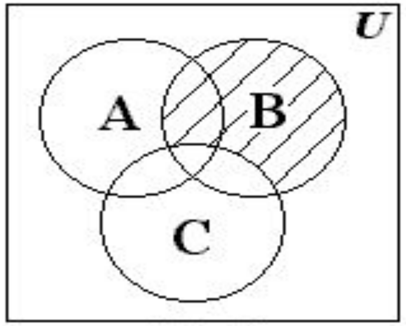


Порядок выполнения операций

- дополнение ($\overline{}$),
- пересечение ($\cap$),
- объединение ($\cup$).

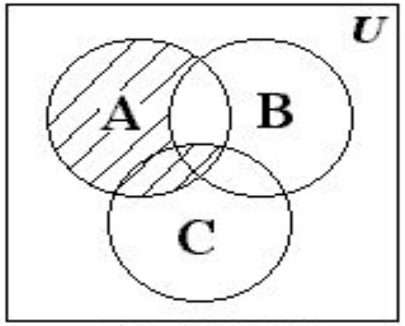
Пример

Доказать тождество: $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.



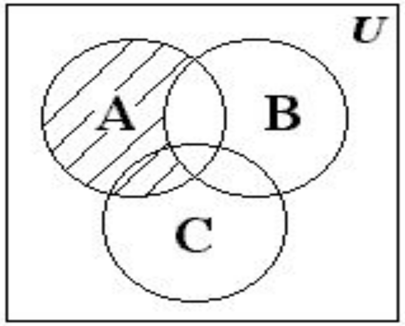
$B \setminus C$

а)



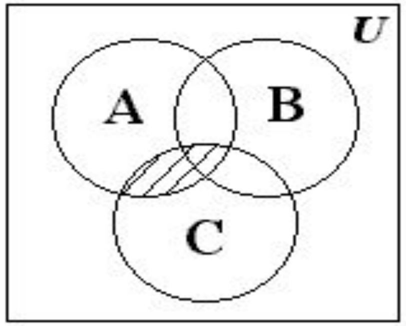
$A \setminus (B \setminus C)$

б)



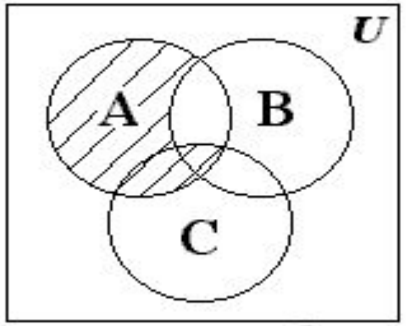
$A \setminus B$

в)



$A \cap C$

г)



$(A \setminus B) \cup (A \cap C)$

д)

Пример

Доказать тождество: $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

Воспользуемся следующими тождествами:

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Получим следующее:

$$A \setminus (B \setminus C) = A \cap \left(\overline{B \cap \overline{C}}\right) = A \cap \left(\overline{B} \cup \overline{\overline{C}}\right) = A \cap \left(\overline{B} \cup C\right) =$$

$$= \left(A \cap \overline{B}\right) \cup (A \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$$

Эквивалентность множеств

Если каждому элементу множества *A* сопоставлен единственный элемент множества *B* и при этом всякий элемент множества *B* оказывается сопоставленным одному и только одному элементу множества *A*, то говорят, что между множествами *A* и *B* существует *взаимно однозначное соответствие.*

Множества *A* и *B* в этом случае называют *эквивалентными или равномощными.*

Эквивалентность множеств обозначается $A \sim B$.

Эквивалентность множеств обладает свойством *транзитивности*, т.е. если $A \sim B$ и $B \sim C$, то $A \sim C$.

Два конечных множества эквивалентны тогда и только тогда, когда количество элементов в них одинаково

Теорема Бернштейна

Если множество *A* эквивалентно части множества *B*, а множество *B* эквивалентно части множества *A*, то множества *A* и *B* эквивалентны

- Докажем, что множество точек любого отрезка эквивалентно множеству точек любого интервала.

Пусть $A = [a, b]$ – произвольный отрезок, а $B = (c, d)$ – произвольный интервал.

Пусть $A_1 = (a_1, b_1)$– любой внутренний интервал отрезка $[a, b]$, $A_1 \subset A$.

Тогда $A_1 \sim B$.

Пусть $B_1 = [c_1, d_1]$ – любой внутренний отрезок интервала (c, d), $B_1 \subset B$.

Тогда $B_1 \sim A$.

Таким образом, выполняются условия теоремы Бернштейна. Поэтому $A \sim B$.

Мощность множества

Мощностью конечного множества *A* (обозначается $|A|$) называется число элементов этого множества.

Все счетные множества имеют мощность, равную мощности натурального ряда чисел.

Мощность натурального ряда чисел обозначается $\aleph_0$ – алеф-нуль.

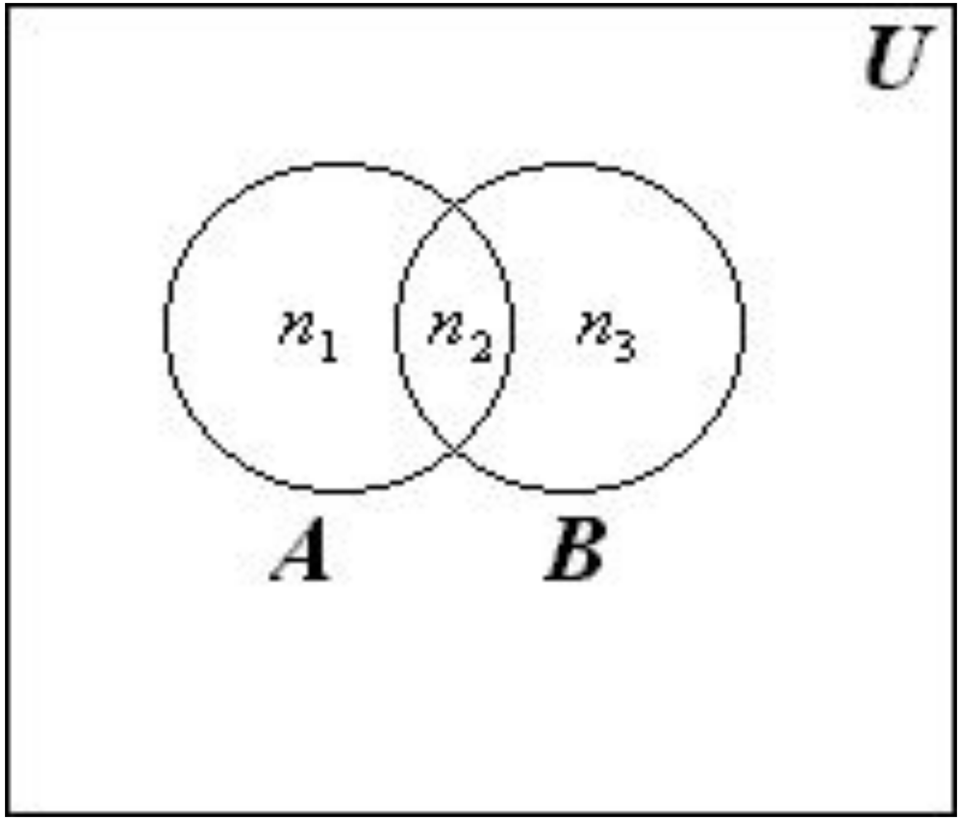
Мощность несчетного множества, эквивалентного множеству всех действительных чисел, называется мощностью *континуума* (continuum – непрерывный). Мощность континуума обозначается готической буквой С. Между этими мощностями существует следующая связь:

$$C = 2^{\aleph_0}$$

Мощность объединения *n* конечных множеств

$n = 2$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



- $|A \cup B| = n_1 + n_2 + n_3$;
- $|A| = n_1 + n_2$;
- $|B| = n_2 + n_3$;
- $|A \cap B| = n_2$.
- Очевидно, что

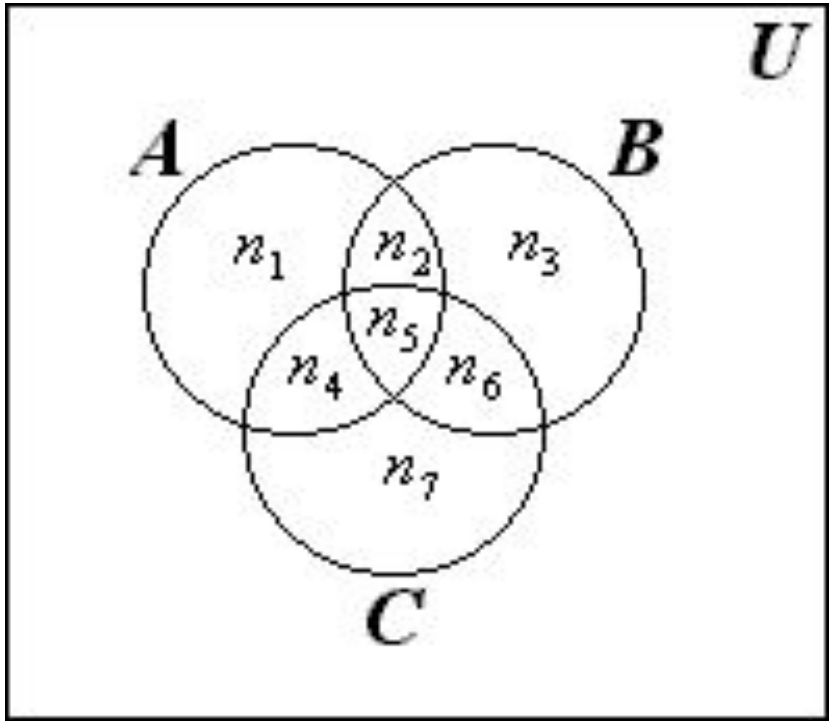
$$n_1 + n_2 + n_3 = (n_1 + n_2) + (n_2 + n_3) - n_2$$

Мощность объединения *n* конечных множеств

$n = 3$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

- $|A \cup B \cup C| = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7;$
- $|A| = n_1 + n_2 + n_4 + n_5;$
- $|B| = n_2 + n_3 + n_5 + n_6;$
- $|C| = n_4 + n_5 + n_6 + n_7;$
- $|A \cap B| = n_2 + n_5;$
- $|A \cap C| = n_4 + n_5;$
- $|B \cap C| = n_5 + n_6;$
- $|A \cap B \cap C| = n_5.$



$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 = (n_1 + n_2 + n_4 + n_5) + (n_2 + n_3 + n_5 + n_6) + (n_4 + n_5 + n_6 + n_7) -$
$- (n_2 + n_5) - (n_4 + n_5) - (n_5 + n_6) + n_5$

Мощность объединения *n* конечных множеств

В общем случае мощность объединения *n* множеств определяется по формуле:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \ldots +$$
$$+ |A_{n-1} \cap A_n|) + |A \cap B \cap C| + (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \ldots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n|) - \ldots +$$
$$+ (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n|.$$

Если множества A_i попарно не пересекаются, т.е. $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, то получим частный случай формулы:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|.$$

В общем случае справедливо неравенство

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| \leq |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|.$$

Пример

На трех станках должны пройти обработку 80 деталей. Известно, что 10 из них были обработаны на всех трех станках, 20 только на первом и втором, 5 только на первом и третьем, 15 только на втором и третьем. Определить, сколько деталей было обработано только на одном станке, если известно:

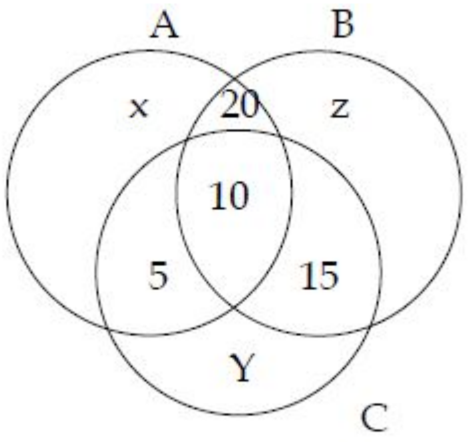
1) что на каждом из станков было обработано одинаковое число деталей;

2) детали, обрабатываемые на втором станке, обязательно проходили обработку на первом или на третьем станке.

3) все ли детали прошли обработку хотя бы на одном из станков?

Решение

- Обозначим множество деталей, прошедших обработку на первом станке через А, на втором через В, на третьем через С.
- Число деталей, обработанных на трех станках, есть число элементов множества *A*⋂B⋂C и равно 10.
- Только на первом и втором станках прошли обработку 20 деталей, это число элементов множества $A \cap B \setminus A \cap B \cap C$
- Аналогично проставляем цифры 5 и 15 из условия задачи.
- Число деталей, прошедших обработку только на первом станке, обозначим через *X*, на третьем через Y, только на втором через *Z.* Из условия задачи *Z* = 0.
- Число деталей, обработанных на каждом из станков одинаково, следовательно, X + 20 + 10+ 5 = Y + 15 + 10 + 5 = 20 + 10 + 15 + 0. Получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными. Отсюда определяем X = 10; Y = 15. Следовательно, только на одном станке (первом, втором или третьем) прошли обработку X + Y + Z = 25 деталей;
- хотя бы на одном станке обработано 10+ 20 + 10 + 5 + 15 + 15 + 0 = 75 деталей
- Следовательно, 80 – 75 = 5 деталей не были обработаны ни на одном из станков



Счётные множества

- Множество, эквивалентное множеству натуральных чисел $N = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$, называется *счетным*.
- Множество счетно, если его элементы можно перенумеровать.

- Примеры счётных множеств:

1. $A_1 = \{-1, -2, \ldots, -n, \ldots\}$;
2. $A_2 = \{2, 2^2, \ldots, 2^n, \ldots\}$;
3. $A_3 = \{2, 4, \ldots, 2n, \ldots\}$;
4. $A_4 = \{\ldots, -n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n, \ldots\}$.

Теоремы о счётных множествах

- Всякое бесконечное подмножество счетного множества счетно.
- Объединение конечной или счетной совокупности счетных множеств счетно.
- Все счетные множества эквивалентны между собой.
- Всякое множество, эквивалентное счетному множеству, счетно.
- Множество всех рациональных чисел, т.е. чисел вида $\frac{p}{q}$, где p и q целые числа, счетно.
- Если $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ и $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$ – счетные множества, то множество всех пар $C = \{(a_k, b_n), k = 1, 2, \ldots; n = 1, 2, \ldots\}$ счетно.
- Множество всех многочленов $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ любых степеней с рациональными коэффициентами $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ счетно.
- Множество всех корней многочленов любых степеней с рациональными коэффициентами счетно.

Множества мощности континуума

- Существуют бесконечные множества, элементы которых нельзя перенумеровать. Такие множества называются *несчетными.*

- ***Теорема Кантора.*** Множество всех точек отрезка [0, 1] несчетно.

- Множество, эквивалентное множеству всех точек отрезка [0, 1] называется *множеством мощности континуума.*

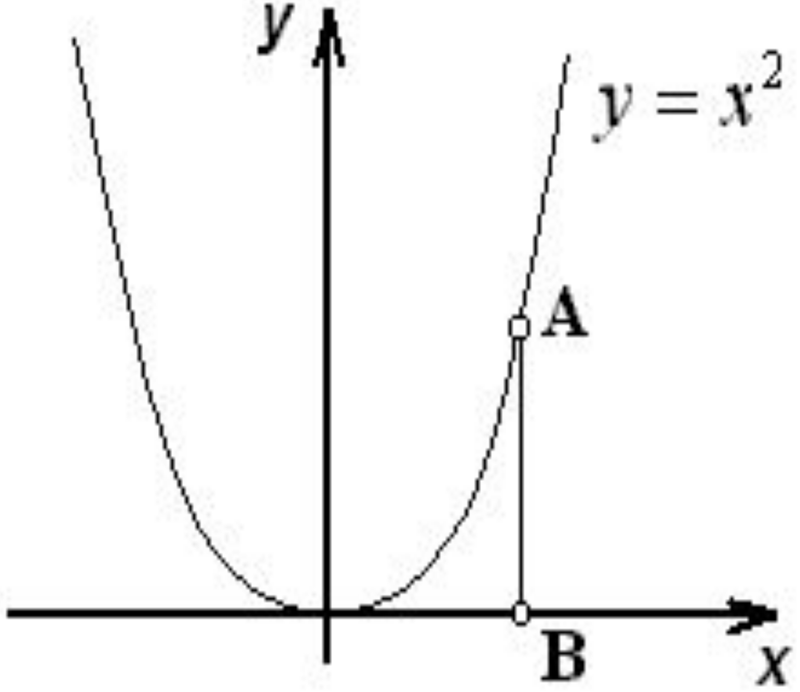
Теоремы о множествах мощности континуума

- Множество всех подмножеств счетного множества счетно.
- Множество иррациональных чисел имеет мощность континуума.
- Множество всех точек *n*-мерного пространства при любом *n* имеет мощность континуума.
- Множество всех комплексных чисел имеет мощность континуума.
- Множество всех непрерывных функций, определенных на отрезке [*a*, *b*] имеет мощность континуума.

Мощность континуума больше, чем мощность счетного множества.

Пример

Множество точек параболы $y = x^2$ эквивалентно множеству точек прямой $-\infty < x < \infty$ и, следовательно, имеет мощность континуума.



Отображения множеств

- Если каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие некоторый элемент $y \in Y$, то говорят, что определено отображение f множества X во множество Y. Обозначают $y = f(x)$.
- Элемент y есть образ элемента x при данном отображении f,

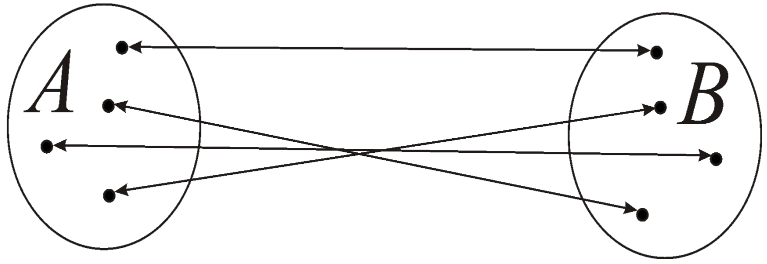
x – прообраз элемента y и обозначают $x = f^{-1}(y)$.

Сюрьективное, инъективное отображения

- Отображение f множества *X* в *Y* является отображением множества *X* на *Y*, если каждому элементу *y* ∈ Y был поставлен в соответствие какой-либо элемент *x* ∈X при данном отображении f. Такое соотношение называется **сюръективным**, т.е. если каждый элемент множества *y* имеет прообраз, то отображение f сюръективно.
- Отображение *X* в *Y* называется **инъективным**, если для каждого элемента *y* ∈ Y существует не более одного прообраза.

Биективное отображение

- Если отображение f сюръективно и инъективно, оно называется **биективным** (взаимнооднозначное соответствие).



- Очевидно, биективное отображение между конечными множествами *X* и *Y* возможно только в случае, когда число элементов этих множеств совпадает.

Пример

- Пусть X={a, b, c, d} Y={2, 4, 6}. Зададим отображения f_1 и f_2 :

f_1:	$a \to 2$	f_2:	$a \to 2$
	$b \to 4$		$b \to 2$
	$c \to 4$		$c \to 6$
	$d \to 6$		$d \to 6$

Определить тип отображения.

Решение

$f_1(a)=\{2\}$, $f_1^{-1}(2)=\{a\}$,

$f_1(b)=\{4\}$, $f_1^{-1}(4)=\{b,c\}$,

$f_1(c)=\{4\}$, $f_1^{-1}(6)=\{d\}$,

$f_1(d)=\{6\}$,

$f_2(a)=\{2\}$, $f_2^{-1}(2)=\{a,b\}$,

$f_2(b)=\{2\}$, $f_2^{-1}(4)=\varnothing$,

$f_2(c)=\{6\}$, $f_2^{-1}(6)=\{c,d\}$.

$f_2(d)=\{6\}$,

- Отображение f_1 X в Y является сюръективным, т.е. отображением X на Y, т.к. каждый элемент множества Y имеет прообраз. Отображение f_2 несюръективно, элемент «4» не имеет прообраза.
- Приведенные выше отображения f_1 и f_2 не являются инъективными (для каждого элемента $y \in Y$ существует не более одного прообраза)

Пример инъективного отображения

- Рассмотрим отображение $y = f_3(x)$:

$$X = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$$

$$f_3: \; x_1 \to y_1$$
$$x_2 \to y_2$$
$$x_3 \to y_4$$

- Отображение f_3 – инъективно.