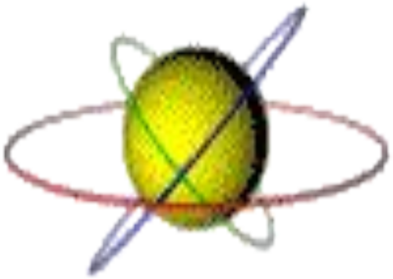
ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

МАТЕМАТИКА - 2012

ЗАДАЧИ ТИПА С2

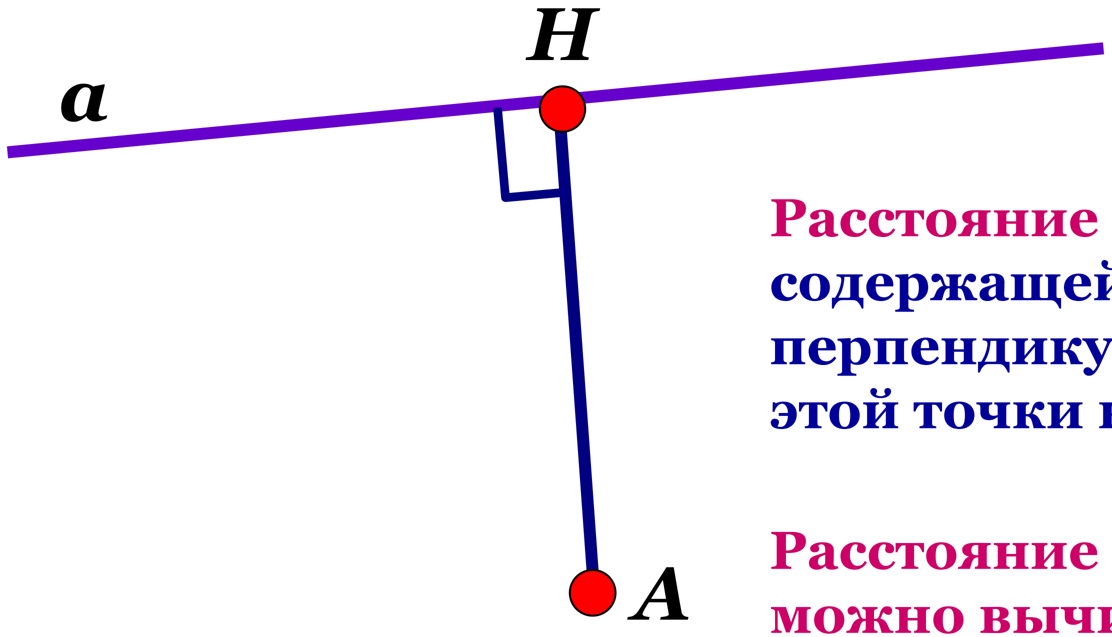


Типы задач

- *Расстояние от точки до прямой*
- *Расстояние от точки до плоскости*
- *Расстояние между скрещивающимися прямыми*
- *Угол между прямыми*
- *Угол между прямой и плоскостью*
- *Угол между плоскостями*

C2 Расстояние от точки до прямой

Повторение:



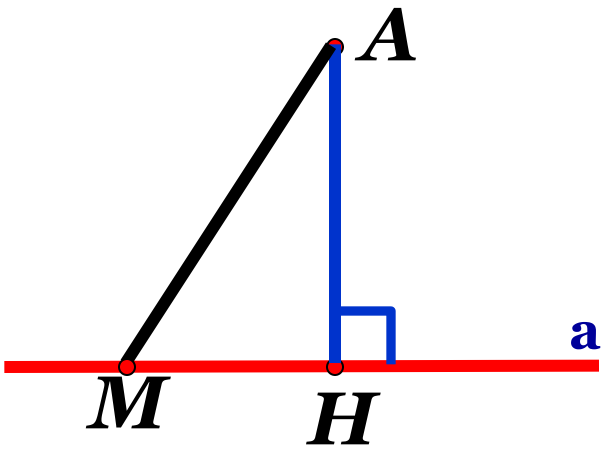
Расстояние от точки до прямой, не содержащей эту точку, есть длина перпендикуляра, проведенного из этой точки на прямую.

Расстояние от точки до прямой можно вычислить:

1) Как длину отрезка перпендикуляра, если удается включить этот отрезок в некоторый треугольник в качестве одной из высот;

2) Используя координатно – векторный метод;

Повторение:

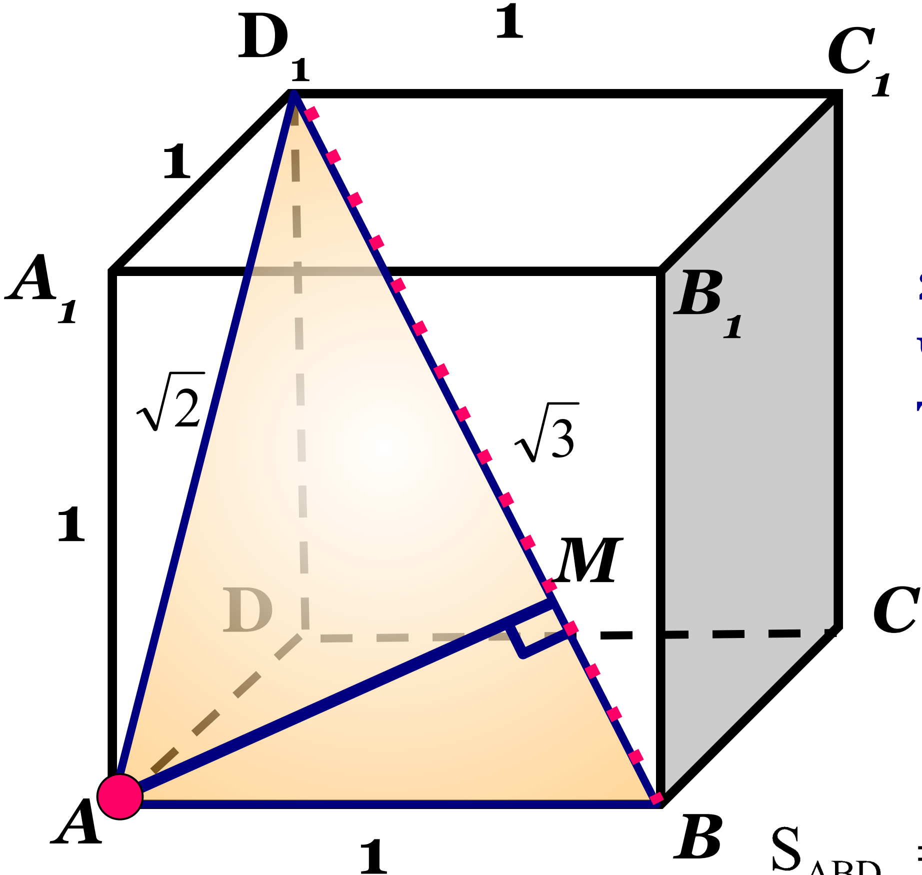


Отрезок АН – перпендикуляр
Точка Н – основание перпендикуляра
Отрезок АМ – наклонная
Точка М – основание наклонной
Отрезок МН – проекция наклонной на прямую а

Из всех расстояний от точки А до различных точек прямой а наименьшим является длина перпендикуляра.

№ 1

В единичном кубе $АВСДА_1В_1С_1Д_1$ найдите расстояние от точки А до прямой $ВД_1$.



1) Построим плоскость AD1B, проведем из точки А перпендикуляр. АМ – искомое расстояние.

2) Найдем искомое расстояние через вычисление площади треугольника AD1B.

$$\Delta AA_1Д_1: \quad AД_1 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$ВД_1 = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

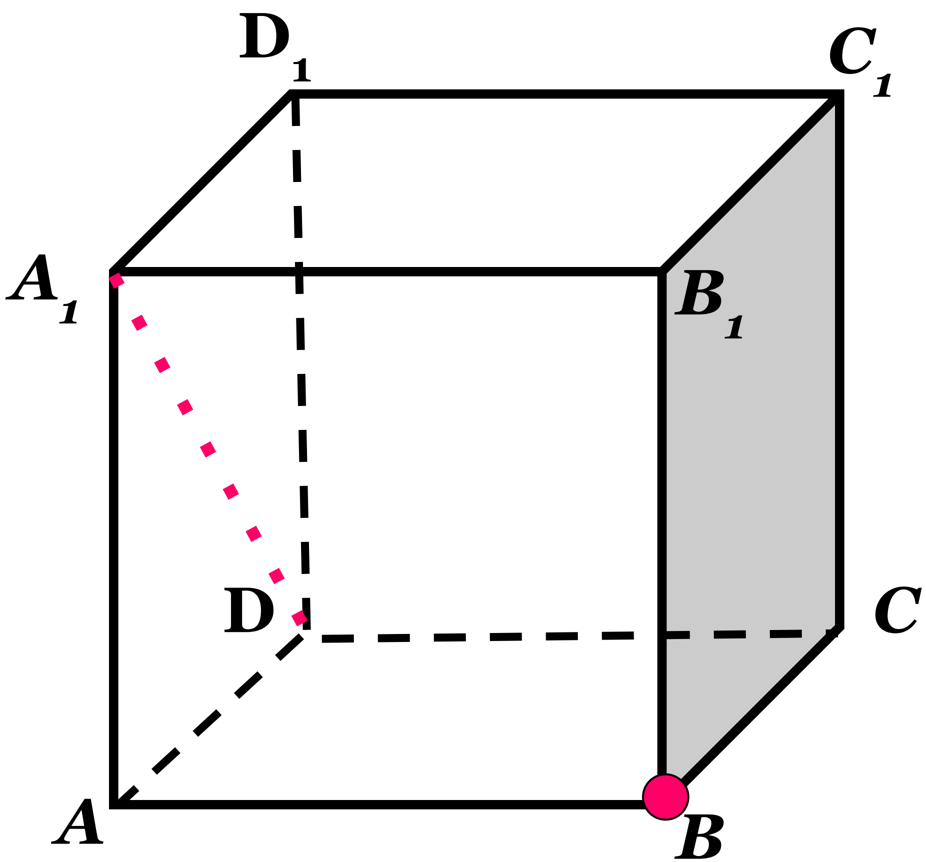
$$S_{ABD_1} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot AM = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \qquad AM = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$S_{ABD_1} = \frac{1}{2}ab \qquad S_{ABD_1} = \frac{1}{2}ch_c$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$

№ 2

В единичном кубе АВСДА$_1$В$_1$С$_1$Д$_1$ найдите расстояние от точки В до прямой ДА$_1$.



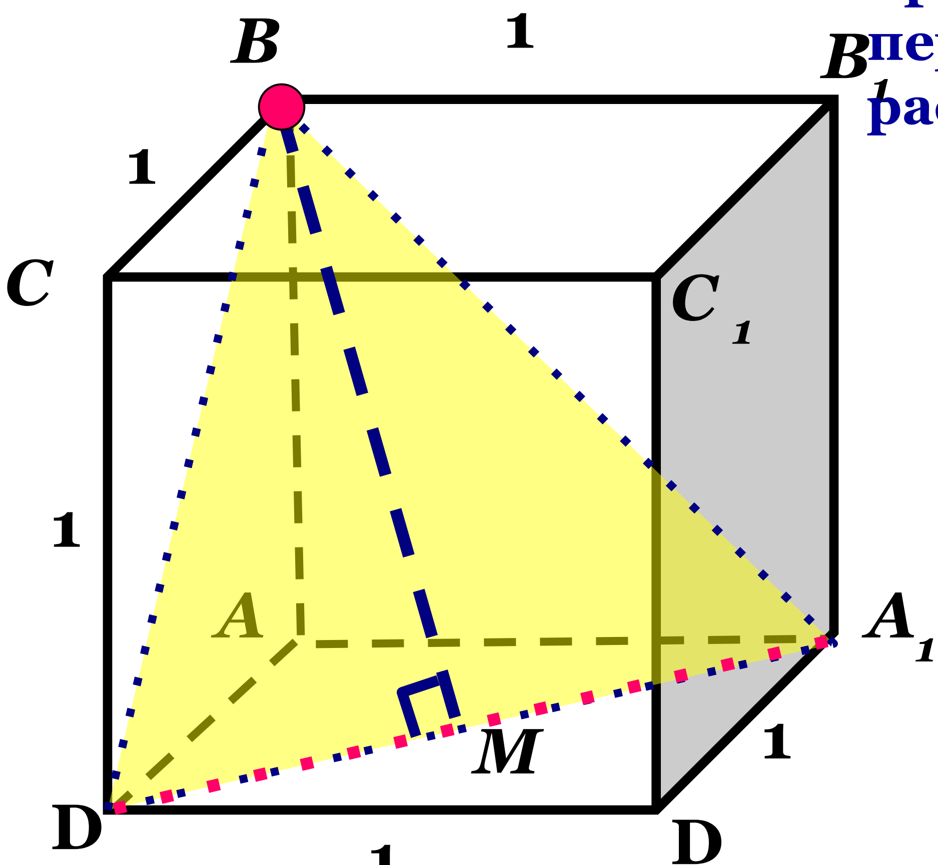
Данный чертеж не является наглядным для решения данной задачи

Попробуем развернуть куб …

№ 2

В единичном кубе АВСДА$_1$В$_1$С$_1$Д$_1$ найдите расстояние от точки В до прямой ДА$_1$.

1) Построим плоскость DBA1, проведем из точки В перпендикуляр. ВМ – искомое расстояние.

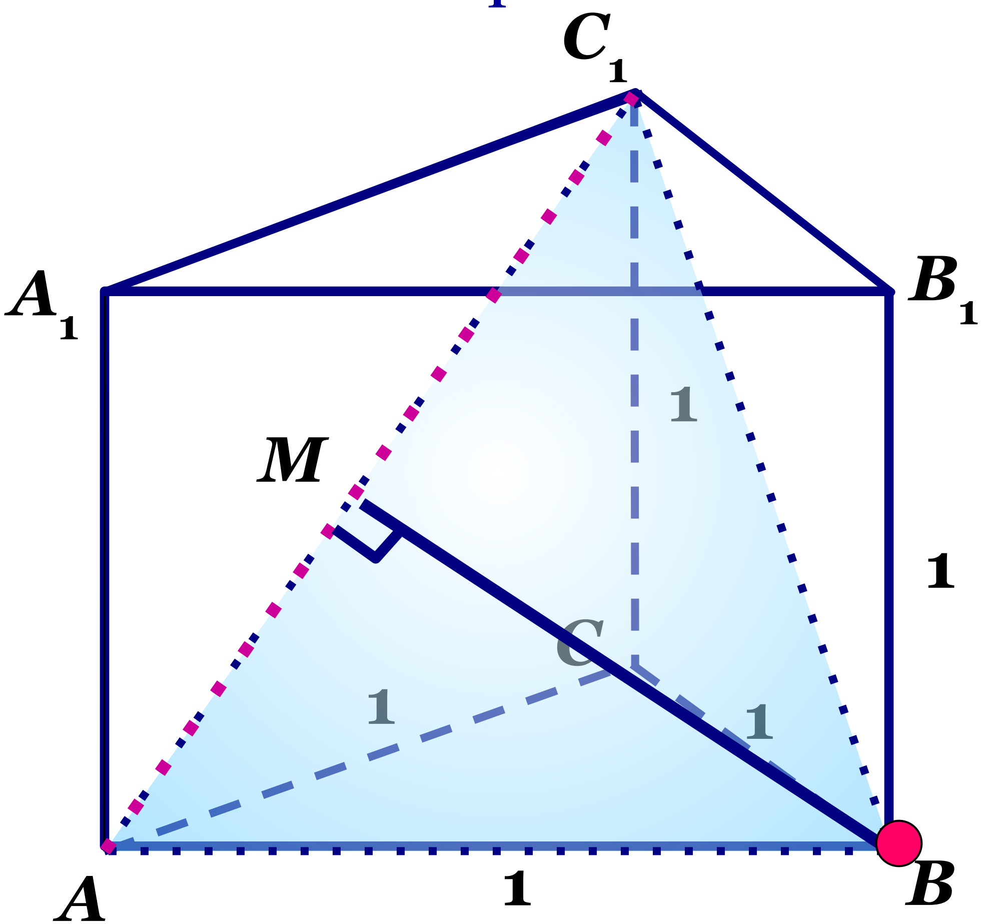


Решить самостоятельно …..

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{2}$

№ 3

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки В до прямой AC_1.



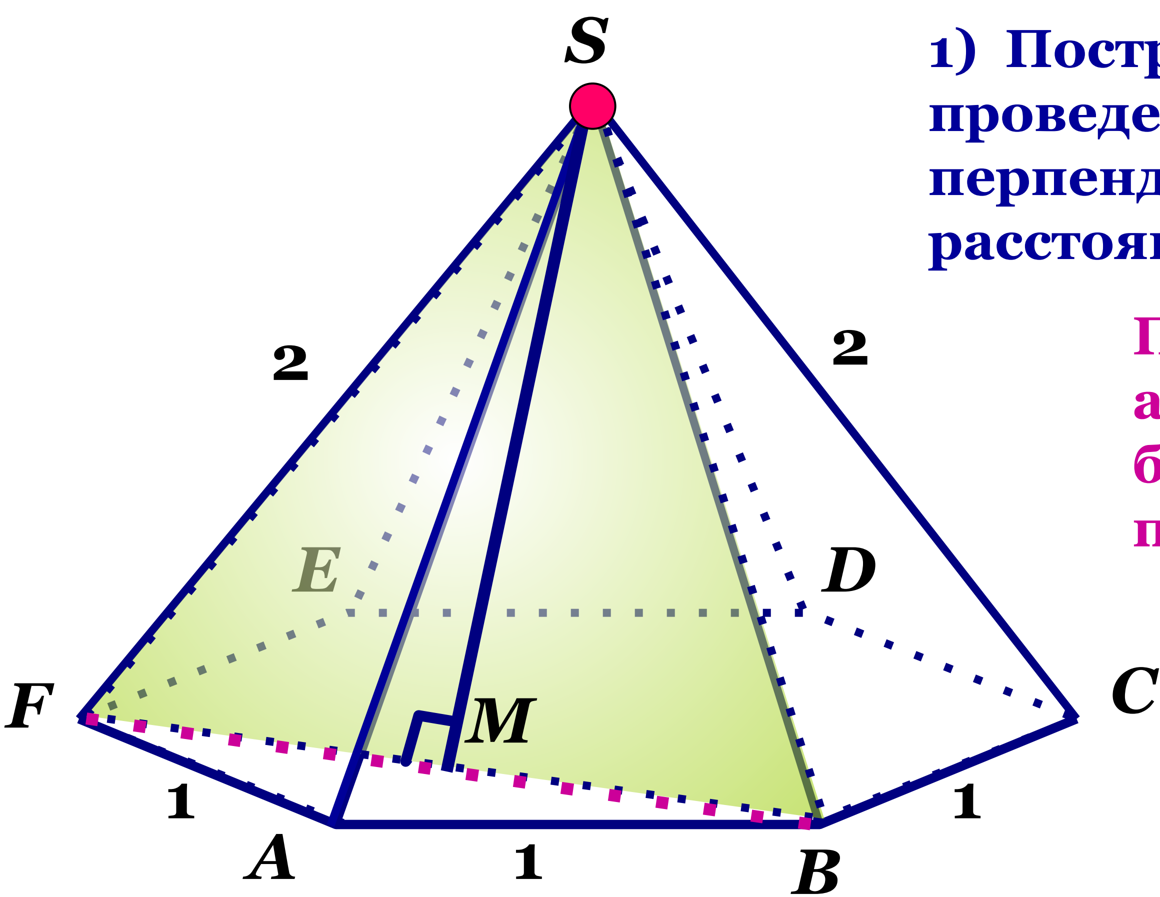
1) Построим плоскость АВС1, проведем из точки В перпендикуляр. ВМ – искомое расстояние.

Решить самостоятельно …..

Ответв: $\frac{\sqrt{1}}{4}$

№ 4

В правильной шестиугольной пирамиде SABCDEF, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки S до прямой BF.



1) Построим плоскость FSB, проведем из точки S перпендикуляр. SM – искомое расстояние.

Подсказка:

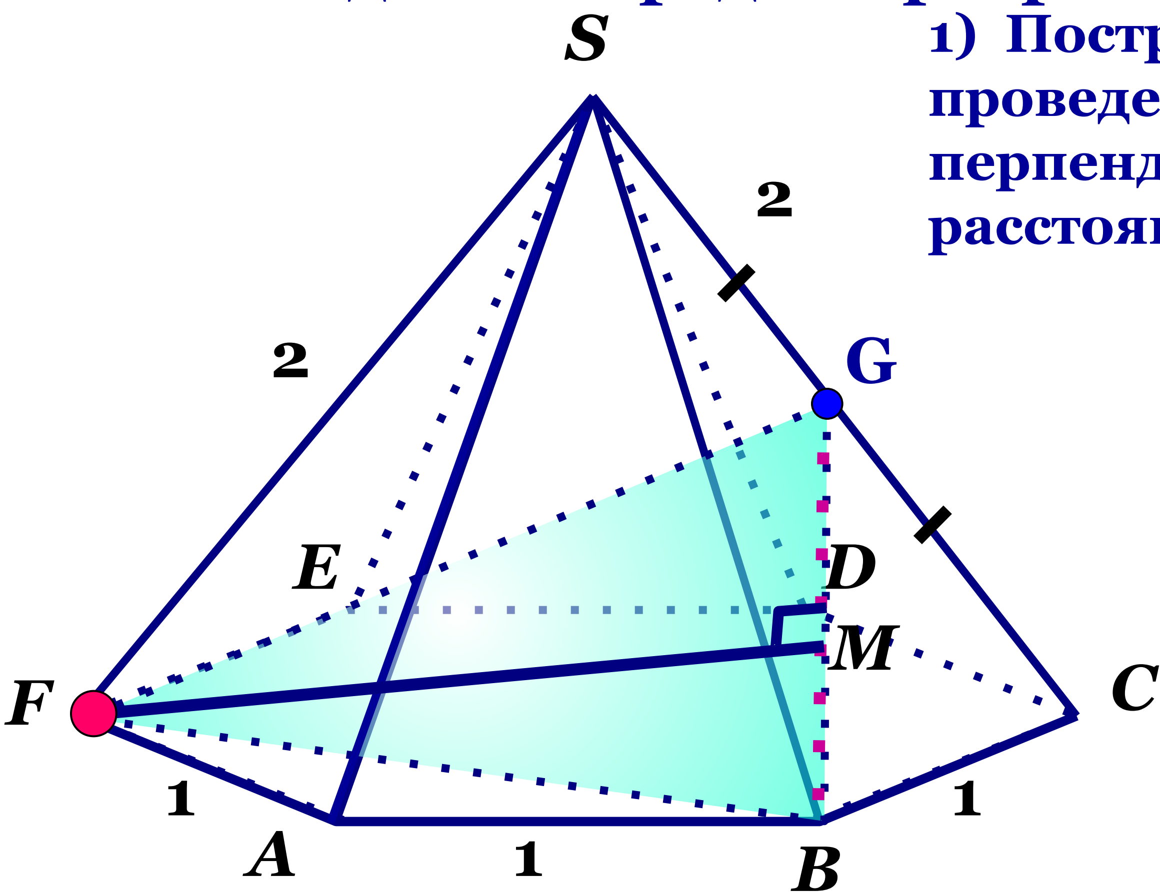
а) $\angle FAB = 120^o$

б) Рассмотреть прямоугольный ΔABM

Ответ: $\frac{\sqrt{1}}{32}$

№ 5

В правильной шестиугольной пирамиде SABCDEF, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки F до прямой BG, где G – середина ребра SC.



1) Построим плоскость FBG, проведем из точки F перпендикуляр. FM – искомое расстояние.

Подсказка:

а) $FB = \sqrt{3}$

б) $FG = \sqrt{3}$

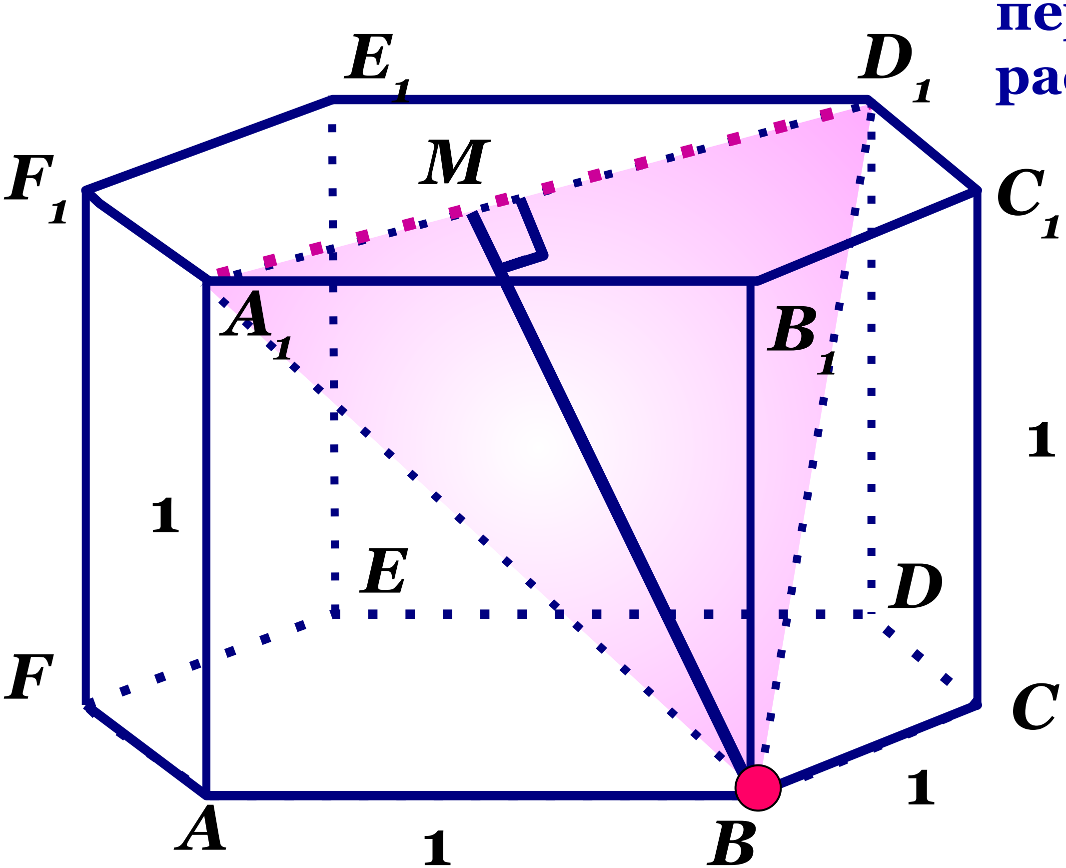
в) $BG = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Ответ: $\frac{\sqrt{4}}{2}$ 4

№ 6

В правильной шестиугольной призме $A.....F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой A_1D_1.

1) Построим плоскость BA_1D_1, проведем из точки B перпендикуляр. BM – искомое расстояние.

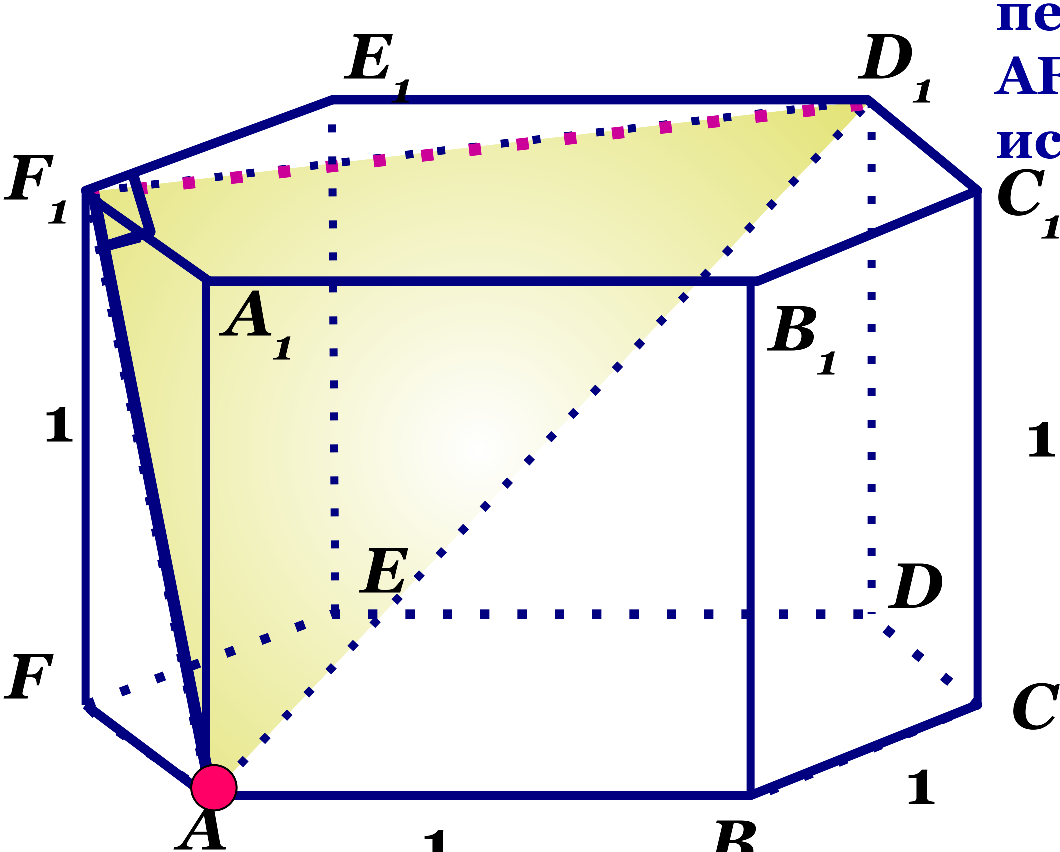


Решить самостоятельно .....

Ответ: $\frac{\sqrt{7}}{2}$

№ 7

В правильной шестиугольной призме $A.....F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой F_1D_1.



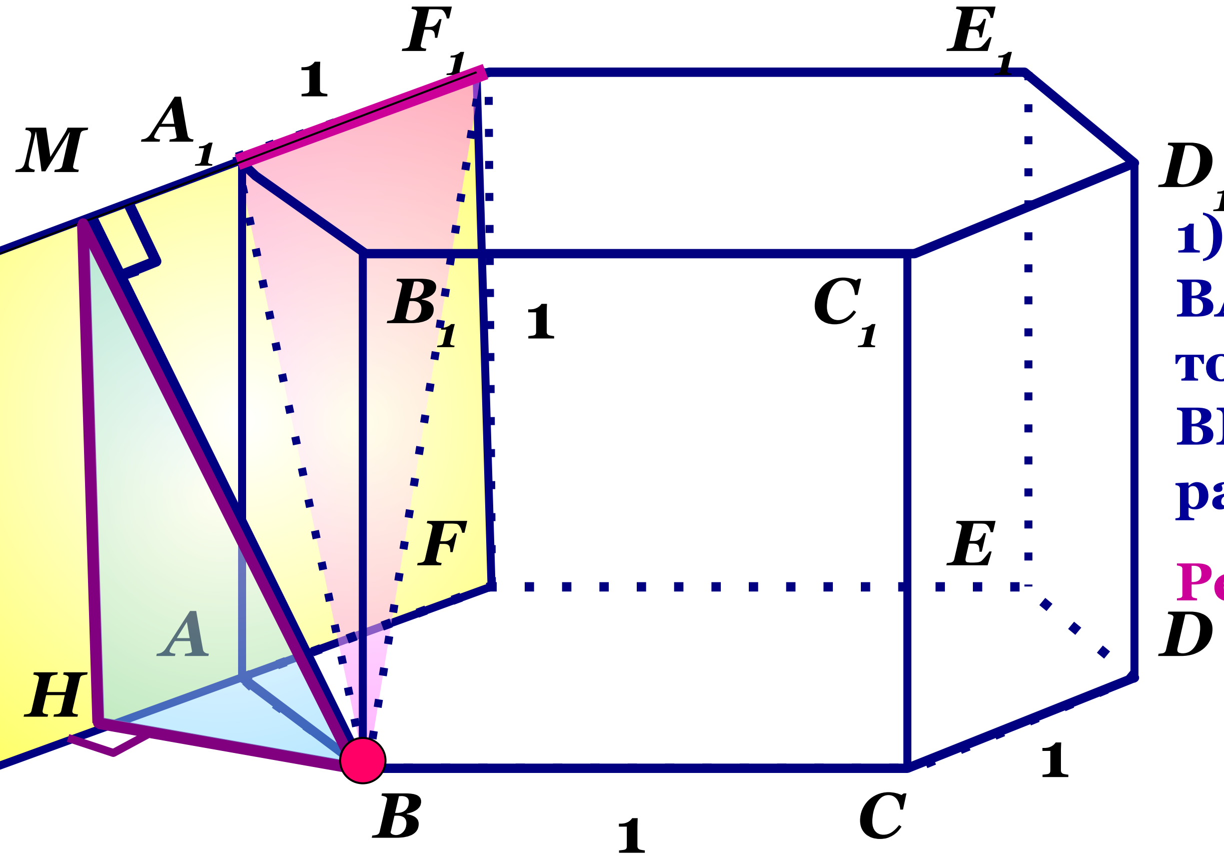
1) Построим плоскость AF_1D_1, так как прямая F_1D_1 перпендикулярна плоскости AFF_1, то отрезок AF_1 будет искомым перпендикуляром.

Решить самостоятельно .....

Ответ: $\sqrt{}$ 2

№ 8

В правильной шестиугольной призме $A.....F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой A_1F_1.



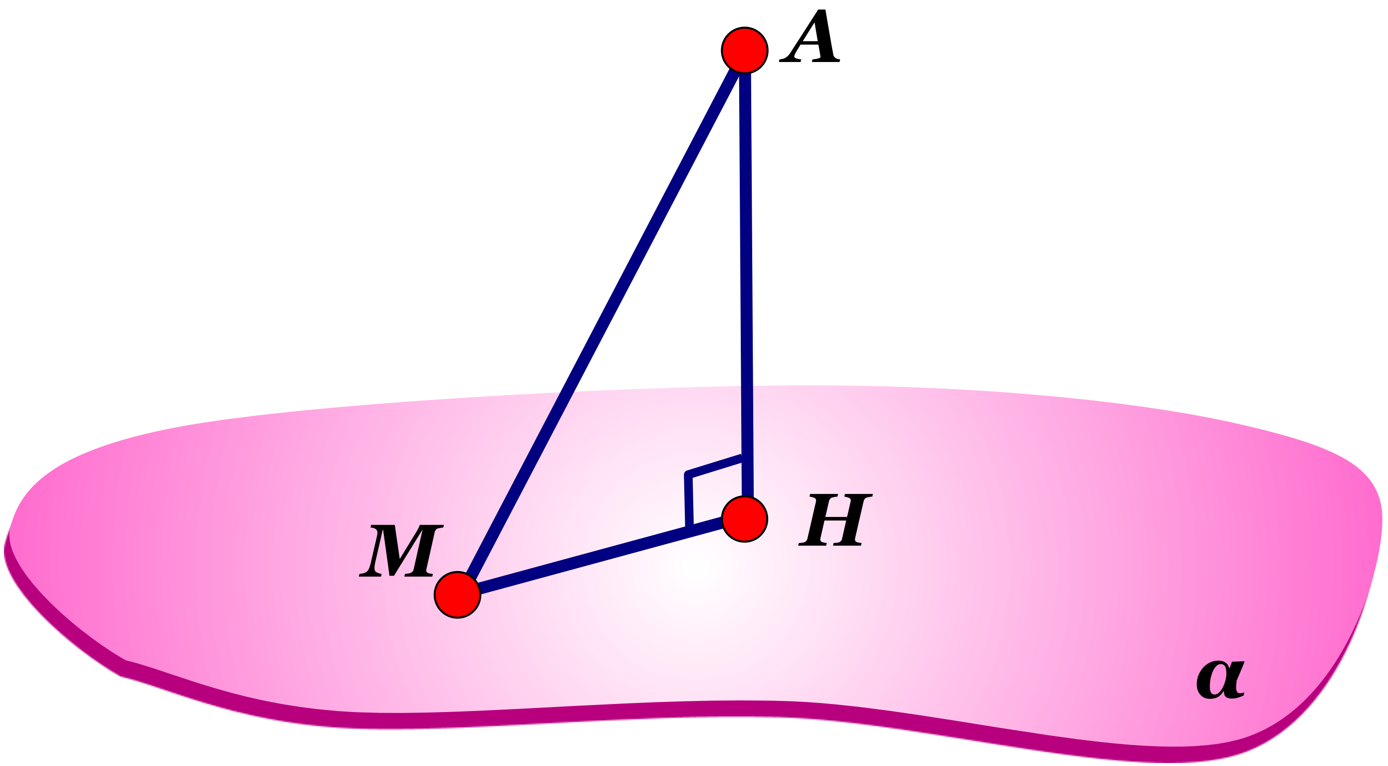
1) Построим плоскость BA_1F_1, проведем из точки B перпендикуляр. BM – искомое расстояние.

Решить самостоятельно ...

Ответ: $\frac{\sqrt{7}}{2}$

С2 Расстояние от точки до плоскости

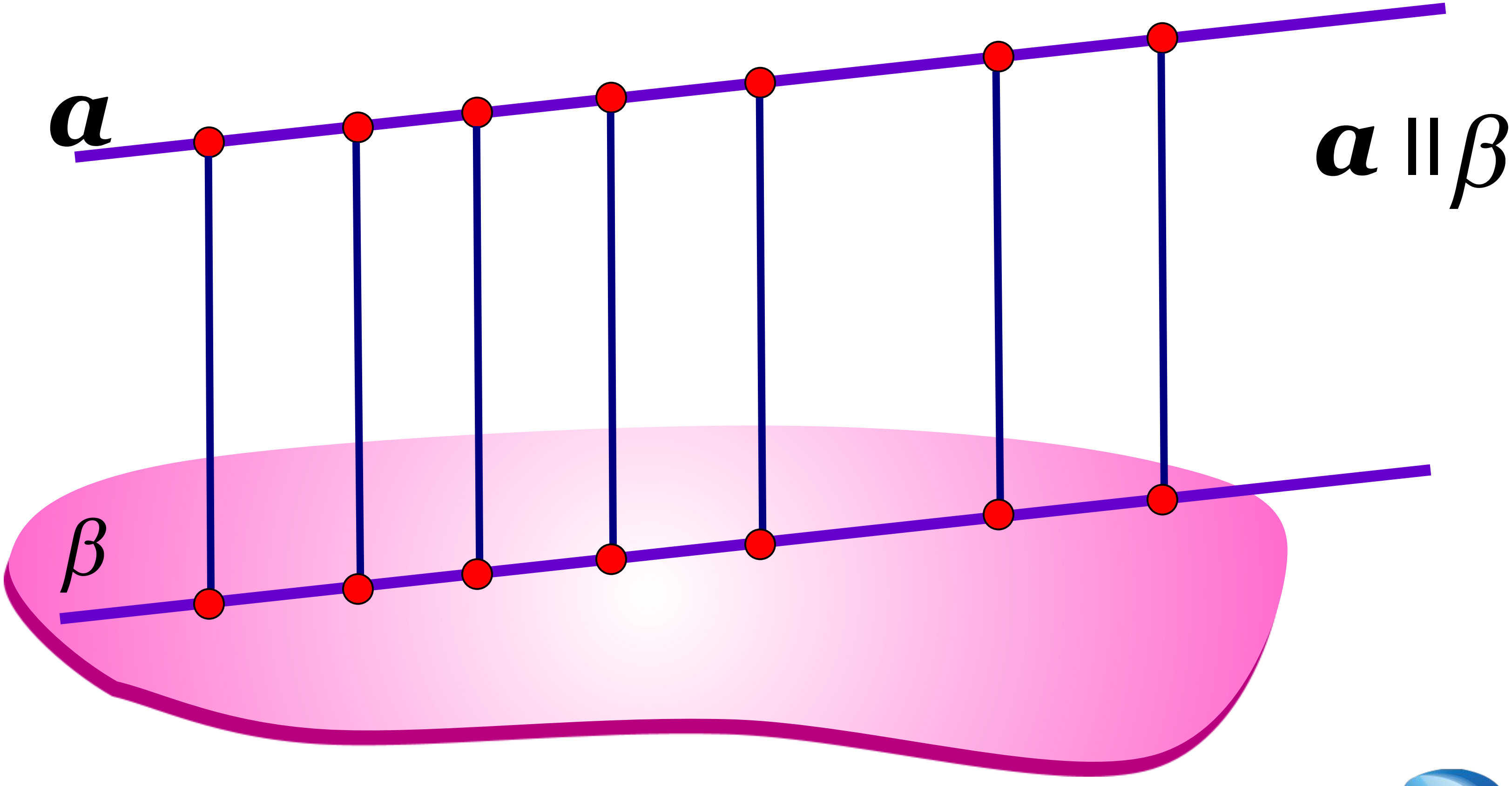
Повторение:



Расстояние от точки до плоскости, не содержащей эту точку, есть длина перпендикуляра, проведенного из этой точки на данную плоскость.

Повторение:

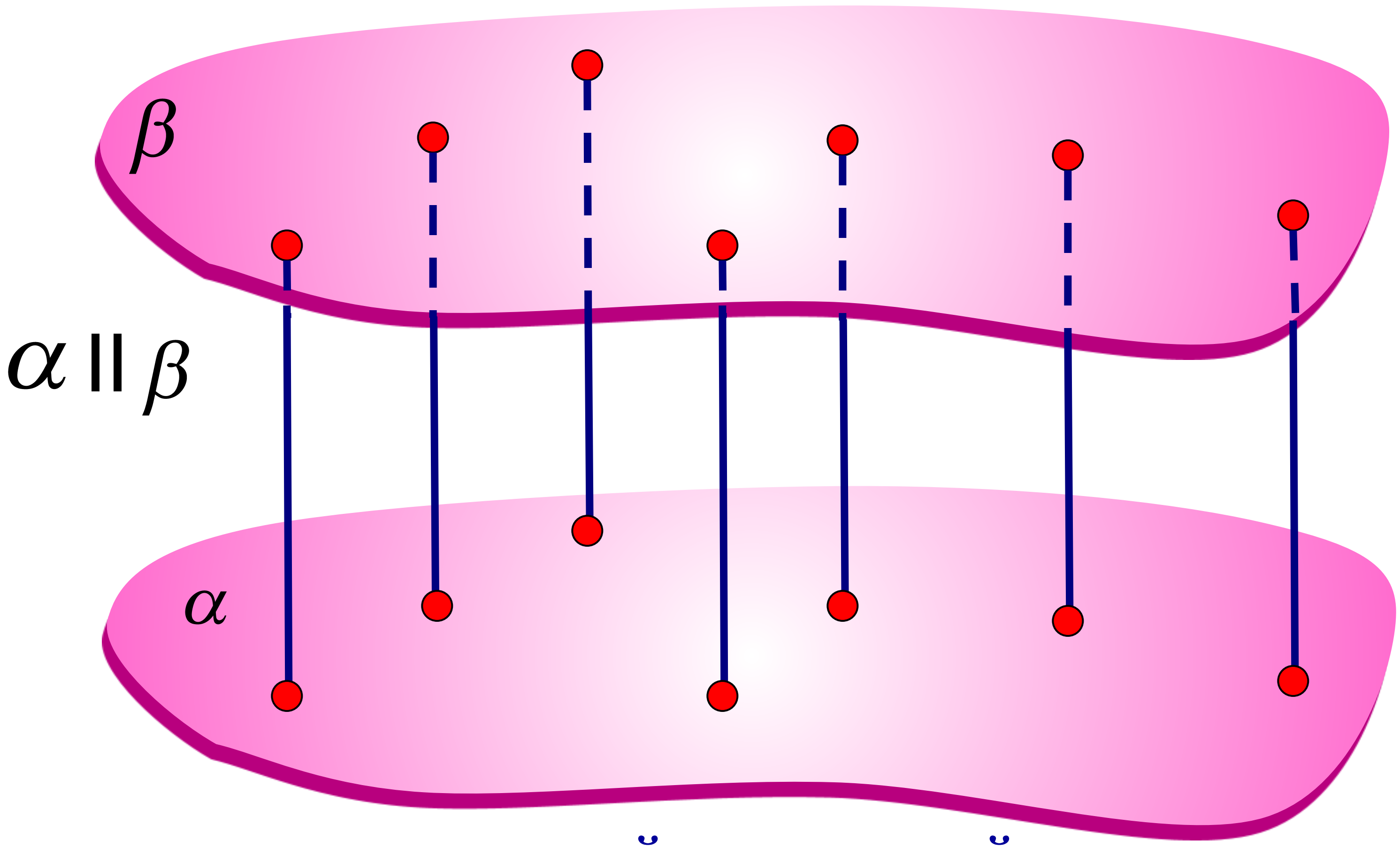
Если прямая параллельна плоскости, то все точки прямой равноудалены от этой плоскости.



Расстояние от произвольной точки прямой до плоскости называется расстоянием между прямой и параллельной ей плоскостью.

Повторение:

Если две плоскости параллельны, то все точки одной плоскости равноудалены от другой плоскости.



Расстояние от произвольной точки одной из параллельных плоскостей до другой плоскости называется расстоянием между параллельными плоскостями.

Повторение:

Расстояние от точки М до плоскости α :

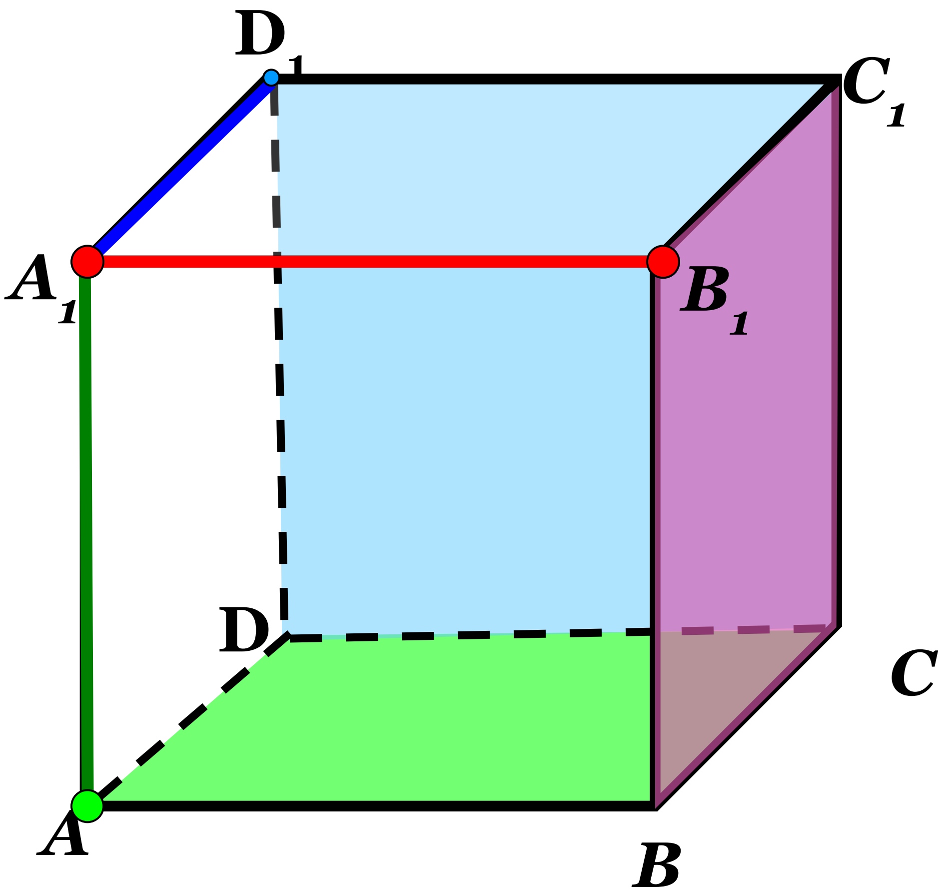
1) Равно расстоянию до плоскости α от произвольной точки Р, лежащей на прямой а, которая проходит ч/з точку М и параллельна плоскости α;

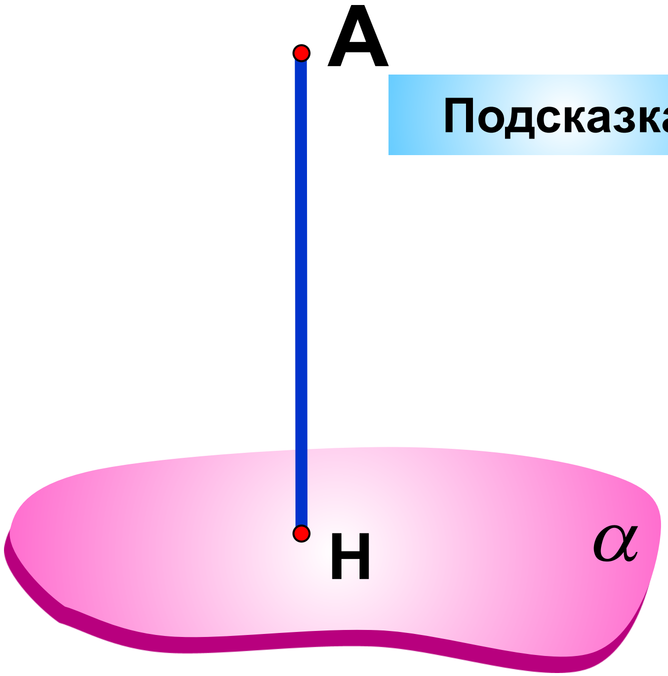
2) Равно расстоянию до плоскости α от произвольной точки Р, лежащей на плоскости β, которая проходит ч/з точку М и параллельна плоскости α;

3) Находится с помощью координатно – векторного метода;

Устно:

Найдите расстояние от вершины куба до плоскости любой грани, в которой не лежит эта вершина, если ребро куба равно 5



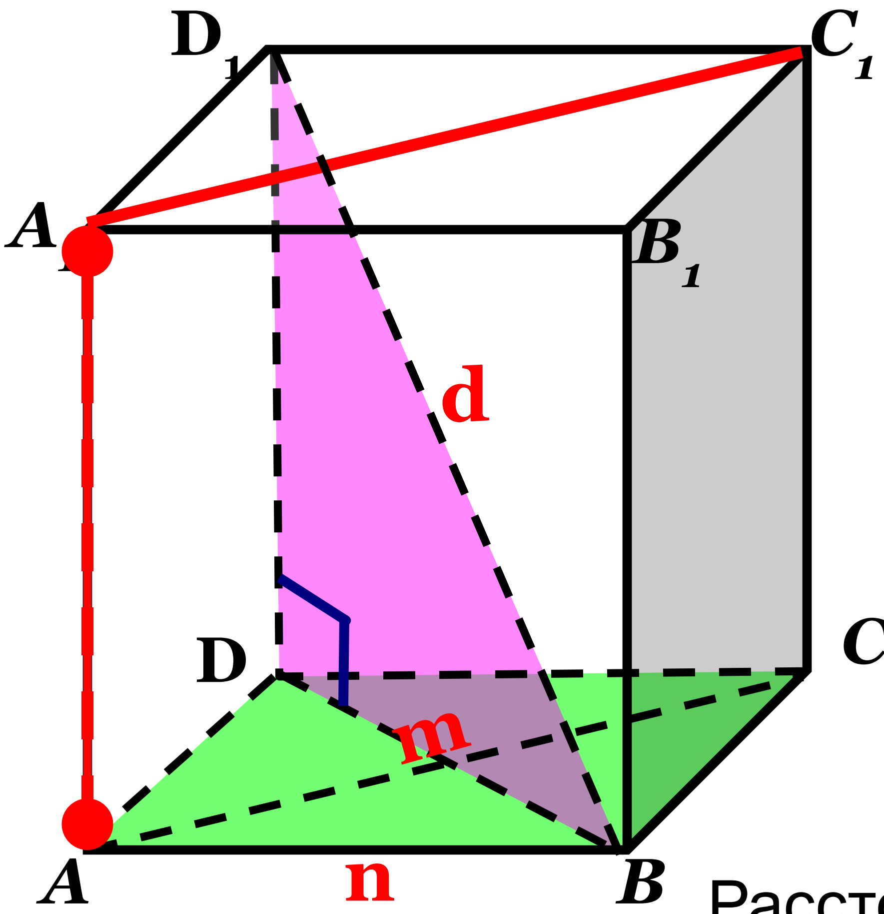


Подсказка

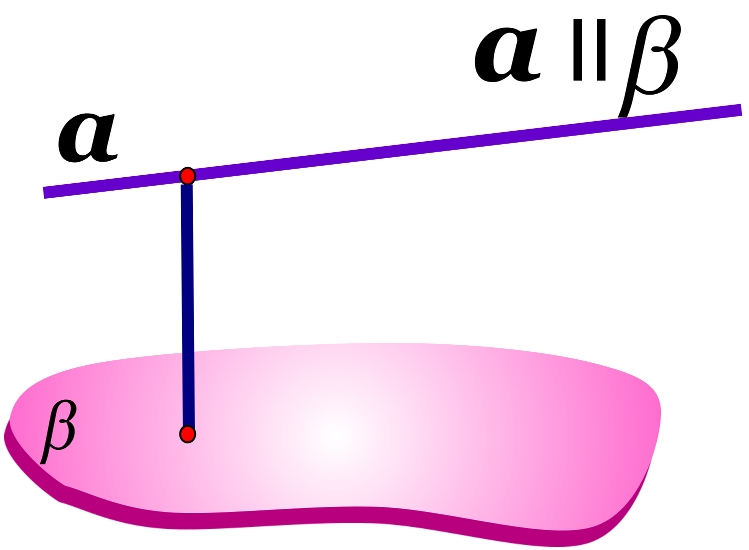
Расстояние от точки до плоскости – длина перпендикуляра

Устно:

Дан прямоугольный параллелепипед $АВСДА_1В_1С_1Д_1$, найдите расстояние между прямой $А_1С_1$ и плоскостью АВС .



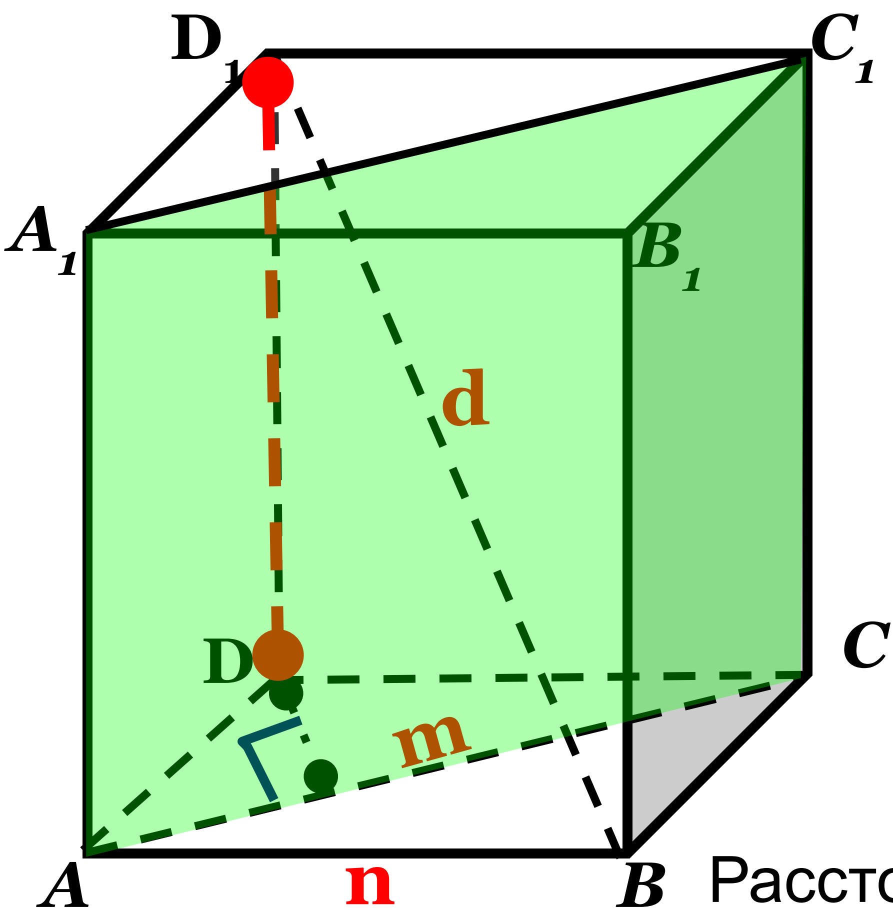
Подсказка



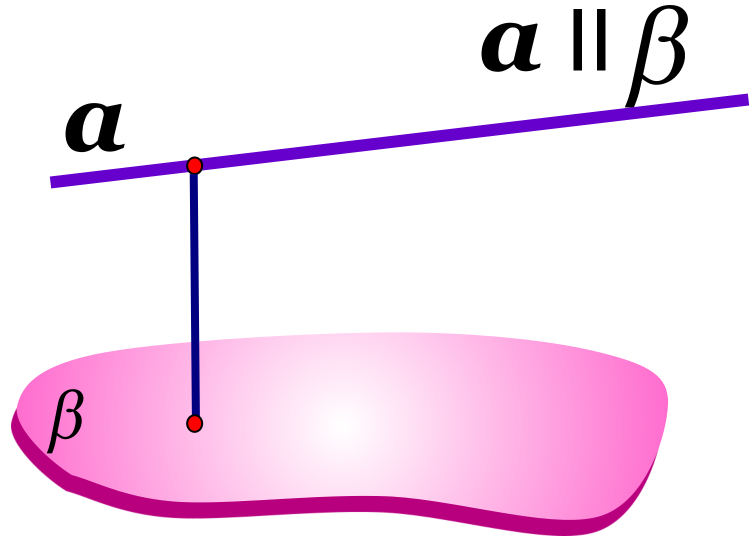
Расстояние от произвольной точки прямой до плоскости называется **расстоянием между прямой и параллельной ей плоскостью**

Устно:

Дан прямоугольный параллелепипед АВСДА$_1$В$_1$С$_1$Д$_1$, найдите расстояние между прямой ДД$_1$ и плоскостью АСС$_1$.



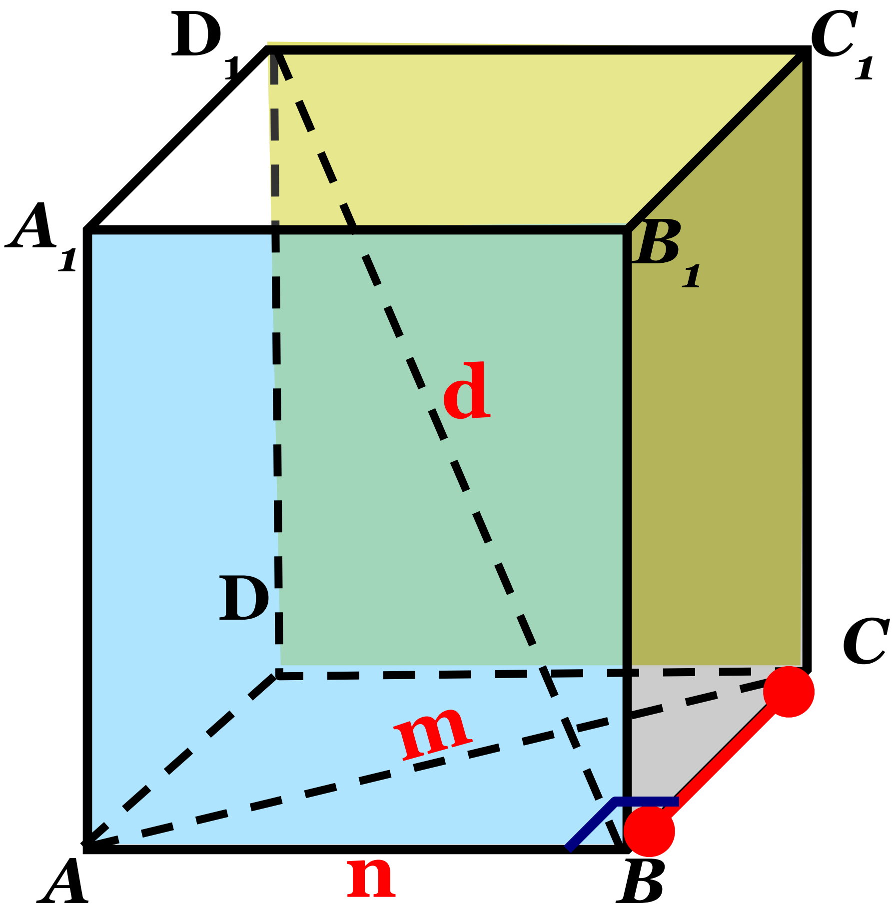
Подсказка



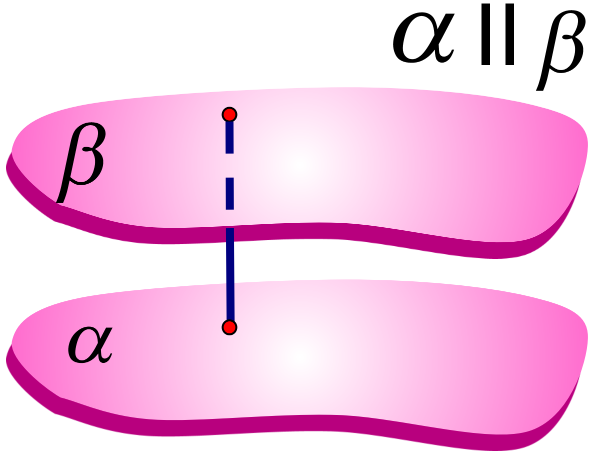
Расстояние от произвольной точки прямой до плоскости называется **расстоянием между прямой и параллельной ей плоскостью**

Устно:

Дан прямоугольный параллелепипед АВСДА1В1С1Д1, найдите расстояние между плоскостями АВВ1 иДСС1.



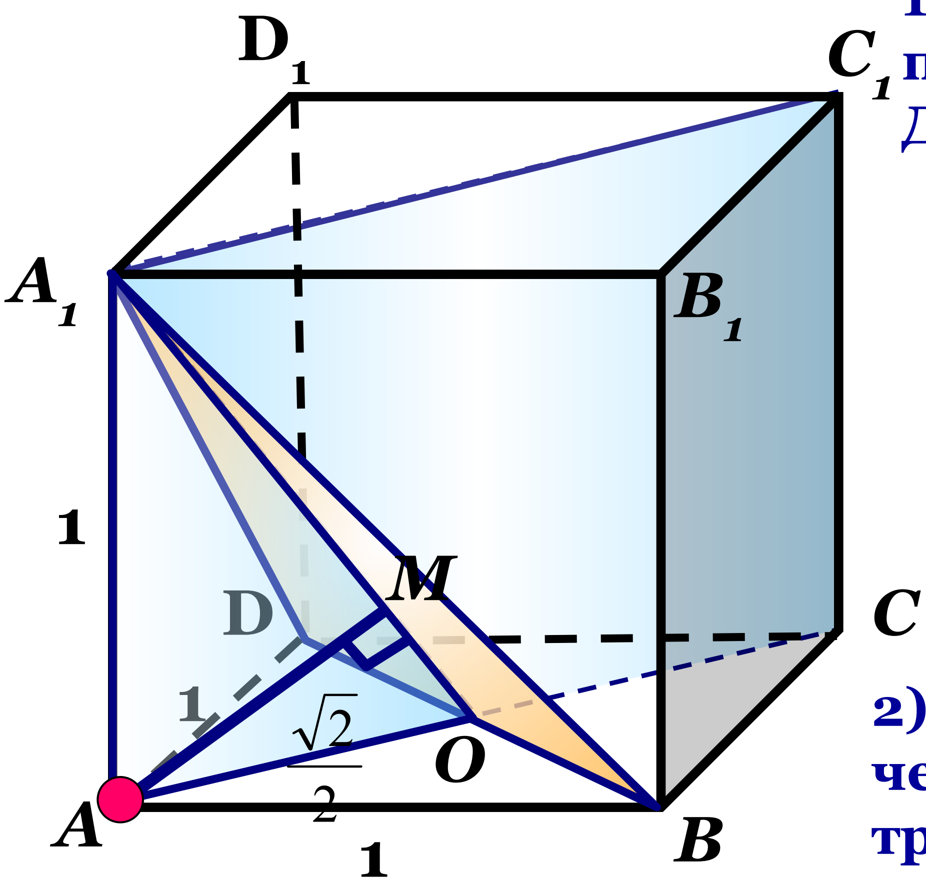
Подсказка



Расстояние от произвольной точки одной из параллельных плоскостей до другой плоскости называется **расстоянием между параллельными плоскостями.**

№ 1

В единичном кубе $АВСДА_1В_1С_1Д_1$ найдите расстояние от точки А до плоскости $ВДА_1$.



1) Построим плоскость $АА_1С_1С$ перпендикулярную плоскости $ДВА_1$.

$$\left.\begin{array}{c} ВД \in (ДВА_1) \\ ВД \perp АС \\ ВД \perp АА_1 \end{array}\right\} \Rightarrow (ДВА_1) \perp (АА_1С_1С)$$

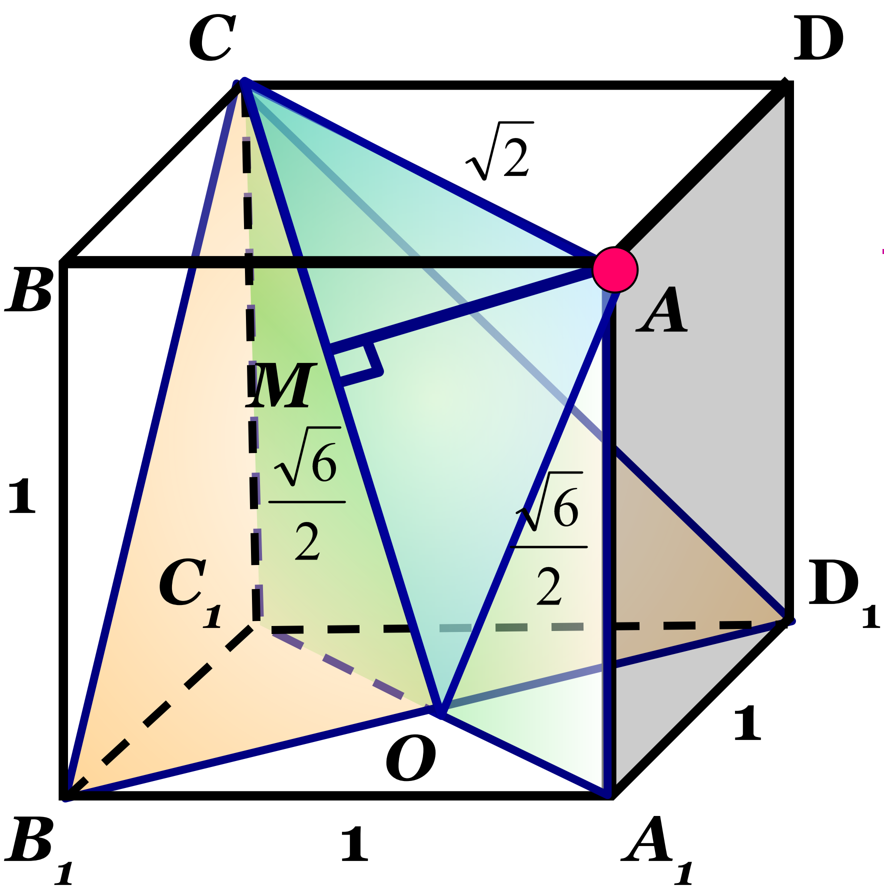
проведем из точки А перпендикуляр. АМ – искомое расстояние.

2) Найдем искомое расстояние через вычисление площади треугольника $АА_1О$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$

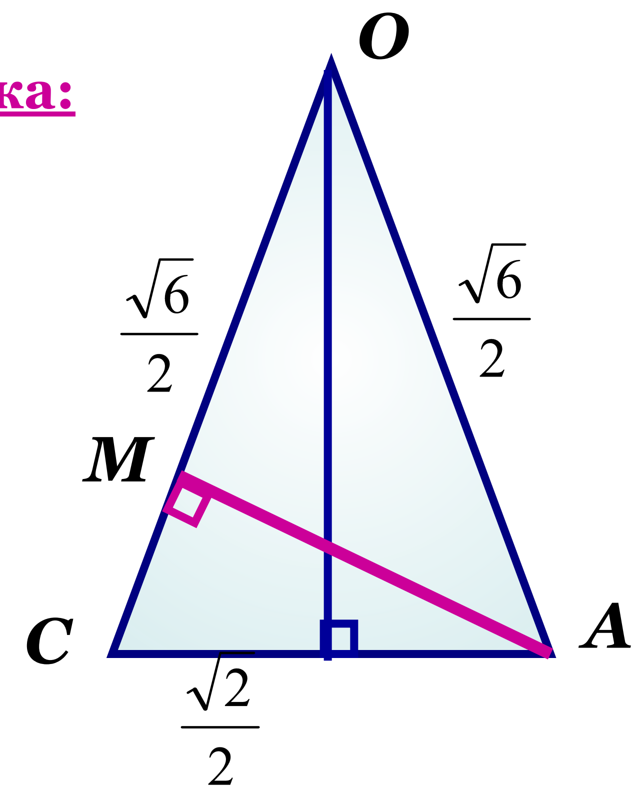
№ 2

В единичном кубе АВСДА$_1$В$_1$С$_1$Д$_1$ найдите расстояние от точки А до плоскости СД$_1$В$_1$.



1) Построим плоскость АА$_1$С$_1$С перпендикулярную плоскости СД$_1$В$_1$.

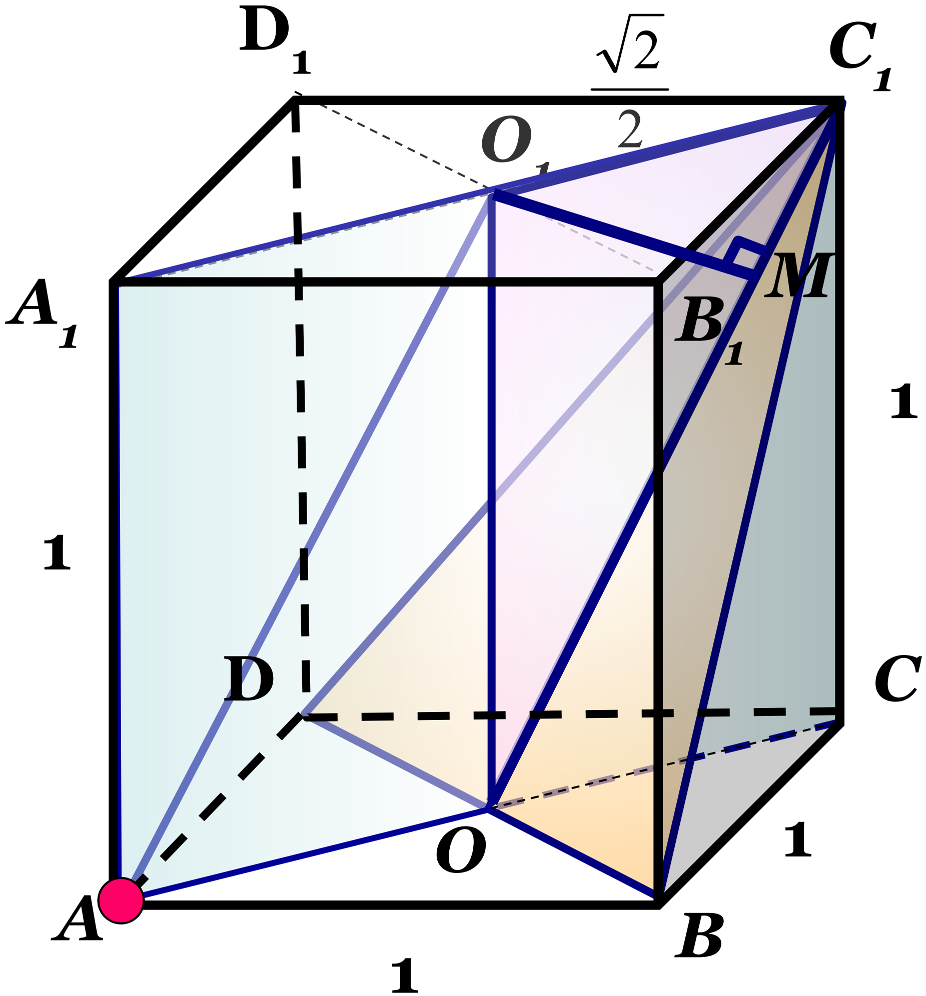
Подсказка:



Ответ: $\frac{\sqrt{1}}{2}$ 3

№ 3

В единичном кубе АВСДА$_1$В$_1$С$_1$Д$_1$ найдите расстояние от точки А до плоскости ДВС$_1$.



1) Так как прямая АО$_1$ || ОС$_1$, то прямая АО$_1$ || (ДВС$_1$). Поэтому искомое расстояние h равно расстоянию от произвольной точки прямой АО$_1$ до плоскости ДВС$_1$. Например расстояние от центра О1 квадрата А$_1$В$_1$С$_1$Д$_1$ до плоскости ДВС$_1$.

2) Построим плоскость АА$_1$С$_1$С перпендикулярную плоскости ДВС$_1$.

$$\left.\begin{array}{l} ВД \in (ДВС_1) \\ ВД \perp АС \\ ВД \perp АА_1 \end{array}\right\} \Rightarrow (ДВС_1) \perp (АА_1С_1С)$$

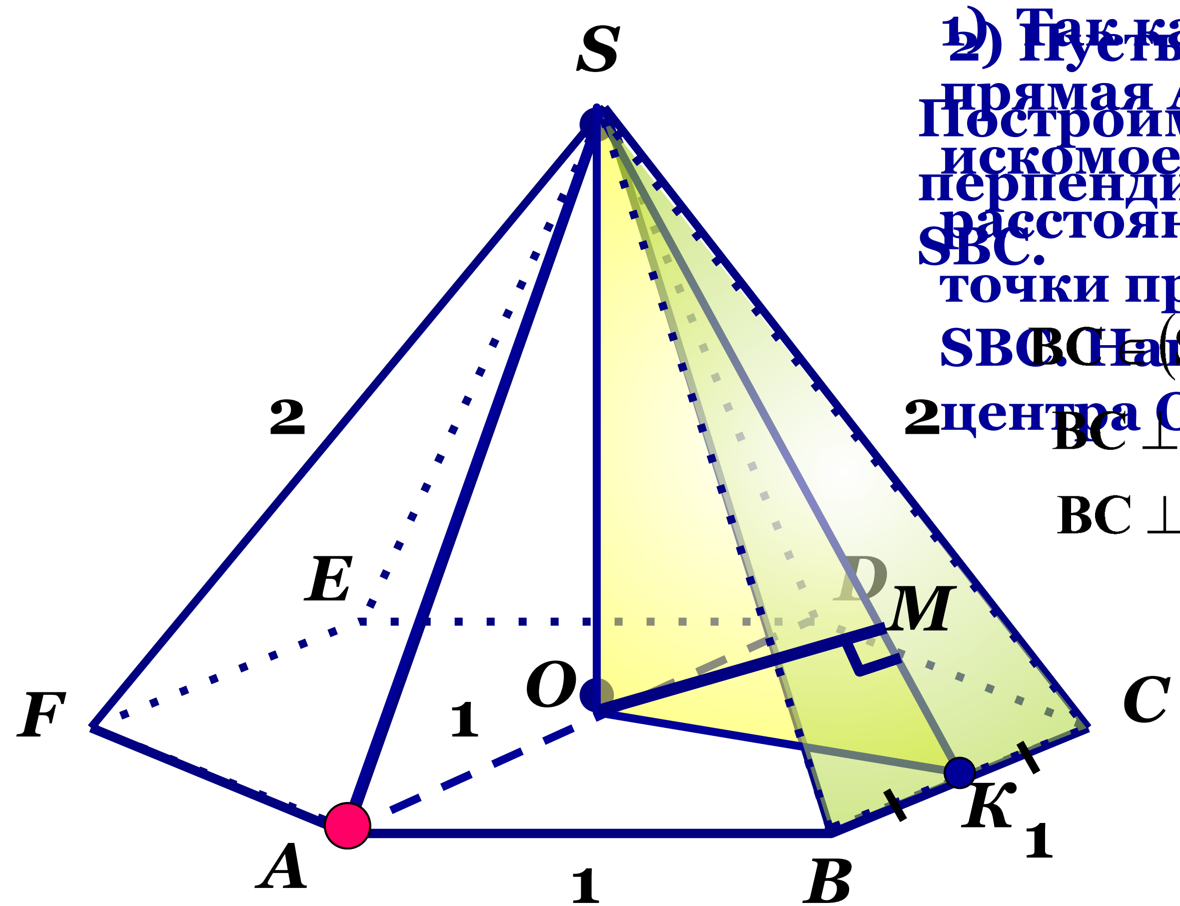
проведем из точки О$_1$ перпендикуляр. О$_1$М – искомое расстояние.

3) Найдем искомое расстояние через вычисление площади треугольника ОО1С$_1$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$

№ 4

В правильной шестиугольной пирамиде SABCDEF, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки А до прямой SBC.



1) Так как прямая АД||ВС, то прямая АД||(SBC). Поэтому искомое расстояние h равно расстоянию от произвольной точки прямой АД до плоскости SBC. Например, расстояние от центра О до плоскости SBC.

2) Пусть К – середина отрезка ВС. Построим плоскость SOK перпендикулярную плоскости SBC.

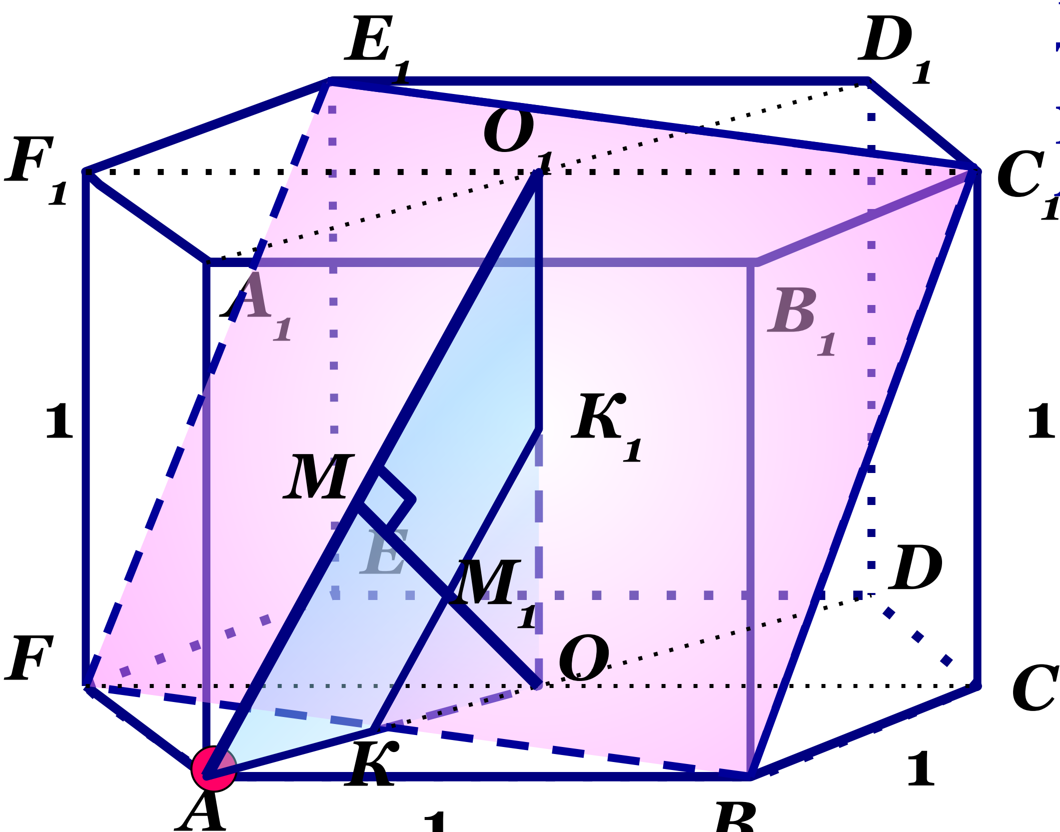
$$\left.\begin{array}{l} BC \subset (SBC) \\ BC \perp OK \\ BC \perp SO \end{array}\right\} \Rightarrow (SBC) \perp (SOK)$$

проведем из точки О перпендикуляр. ОМ – искомое расстояние.

Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{5}$

№ 5

В правильной шестиугольной призме A.....F_1, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости BFE_1.



1)Так как прямая $AO_1 || (BFE_1)$, то искомое расстояние h равно расстоянию от прямой AO_1 до плоскости(BFE_1).

Построим плоскость AOO_1 перпендикулярную плоскости BFE_1.

проведем из точки O перпендикуляр. MM_1 – искомое расстояние.

Ответ: $\frac{\sqrt{\ }}{2}$ 4

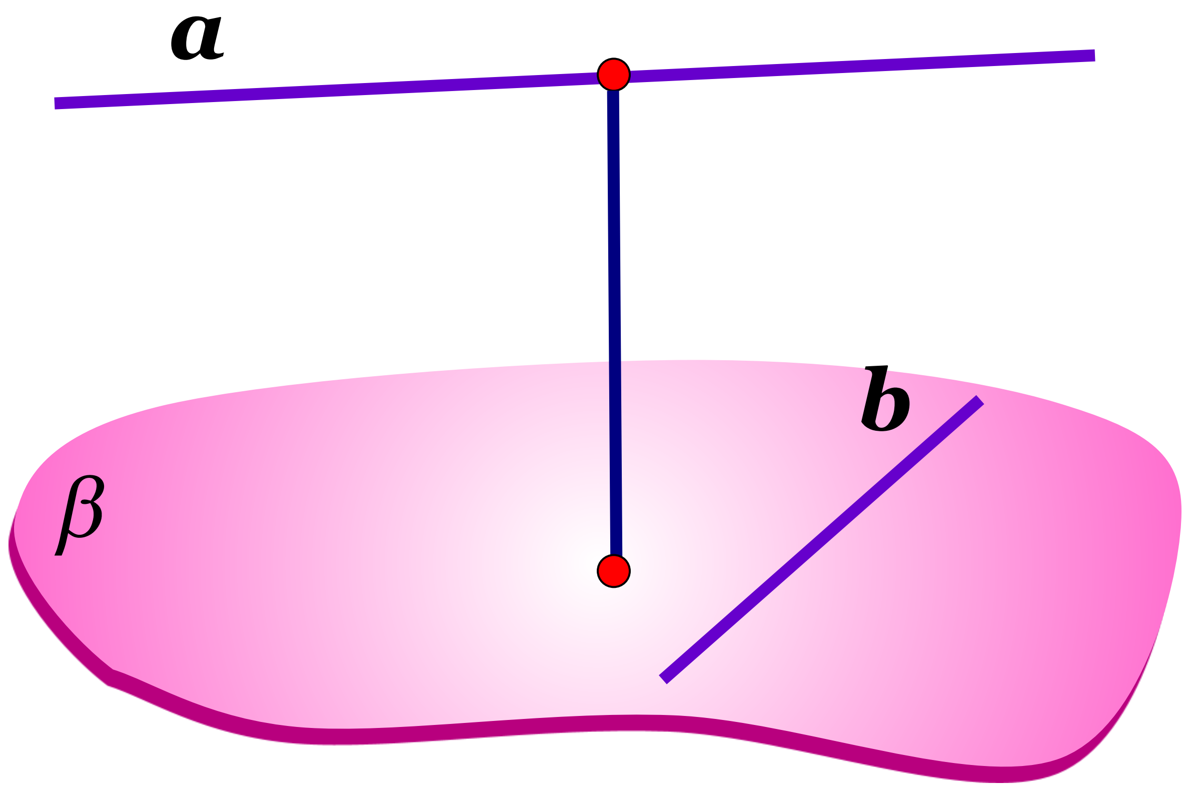
C2

Расстояние между скрещивающимися прямыми

Повторение:

Если две прямые скрещиваются, то через каждую из них проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна.

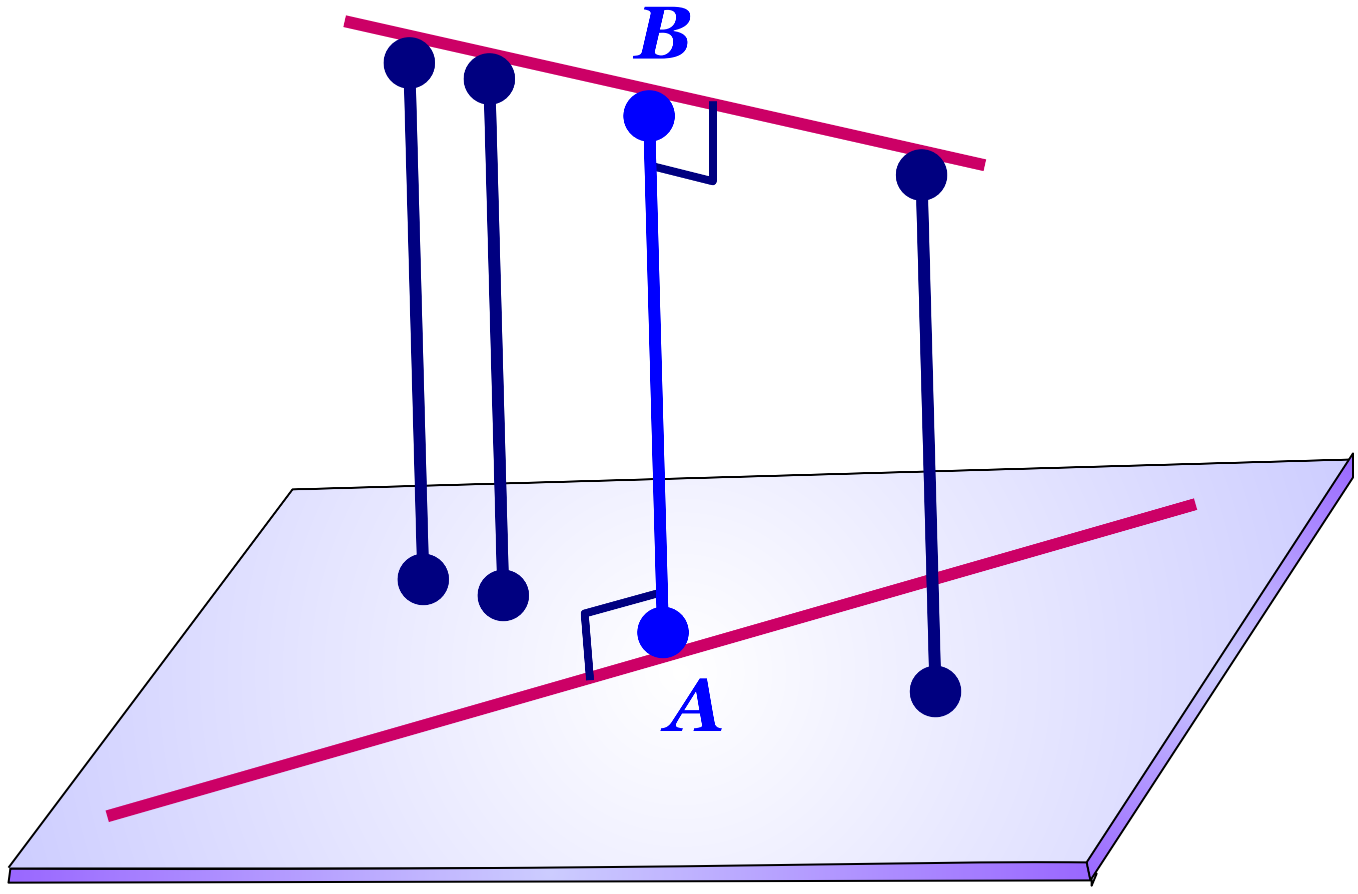
$a \dot{-} b$



$a \parallel \beta$

Расстояние между одной из скрещивающихся прямых и плоскостью, проходящей через другую прямую параллельно первой, называется расстоянием между скрещивающимися прямыми.

Повторение:

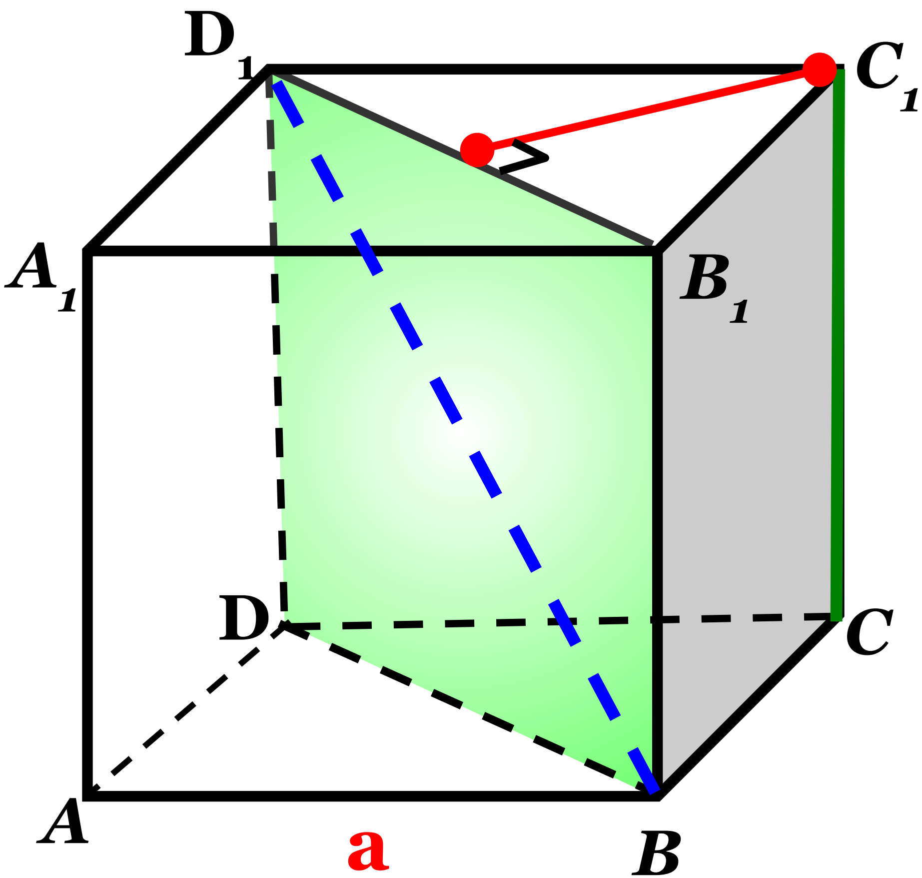


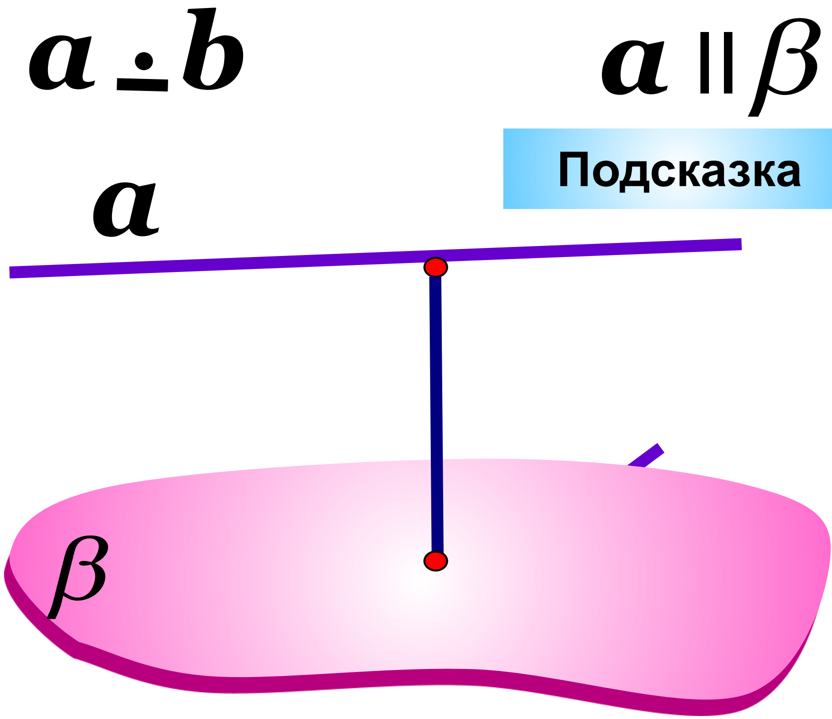
Отрезок, имеющий концы на двух скрещивающихся прямых и перпендикулярный к этим прямым, называется их общим перпендикуляром.

На рисунке АВ – общий перпендикуляр.

Устно:

Ребро куба равно a. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми, содержащими диагональ куба и ребро куба



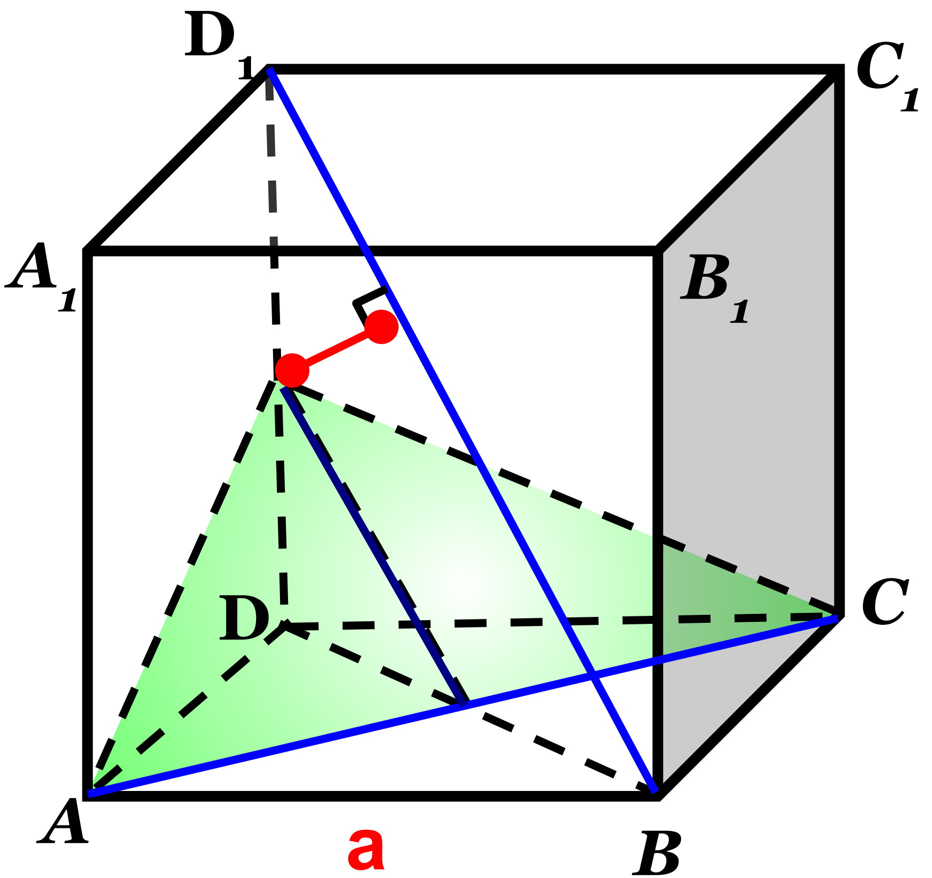


Подсказка

Расстояние между одной из скрещивающихся прямых и плоскостью, проходящей через другую прямую параллельно первой, называется **расстоянием между скрещивающимися прямыми.**

Устно:

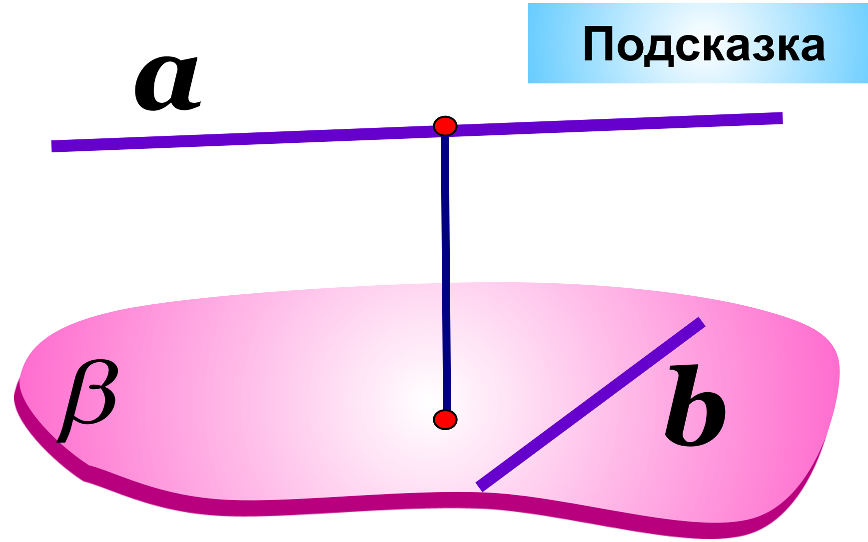
Ребро куба равно а. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми, содержащими диагональ куба и диагональ грани куба



$a \dot{-} b$

$a \parallel \beta$

Подсказка

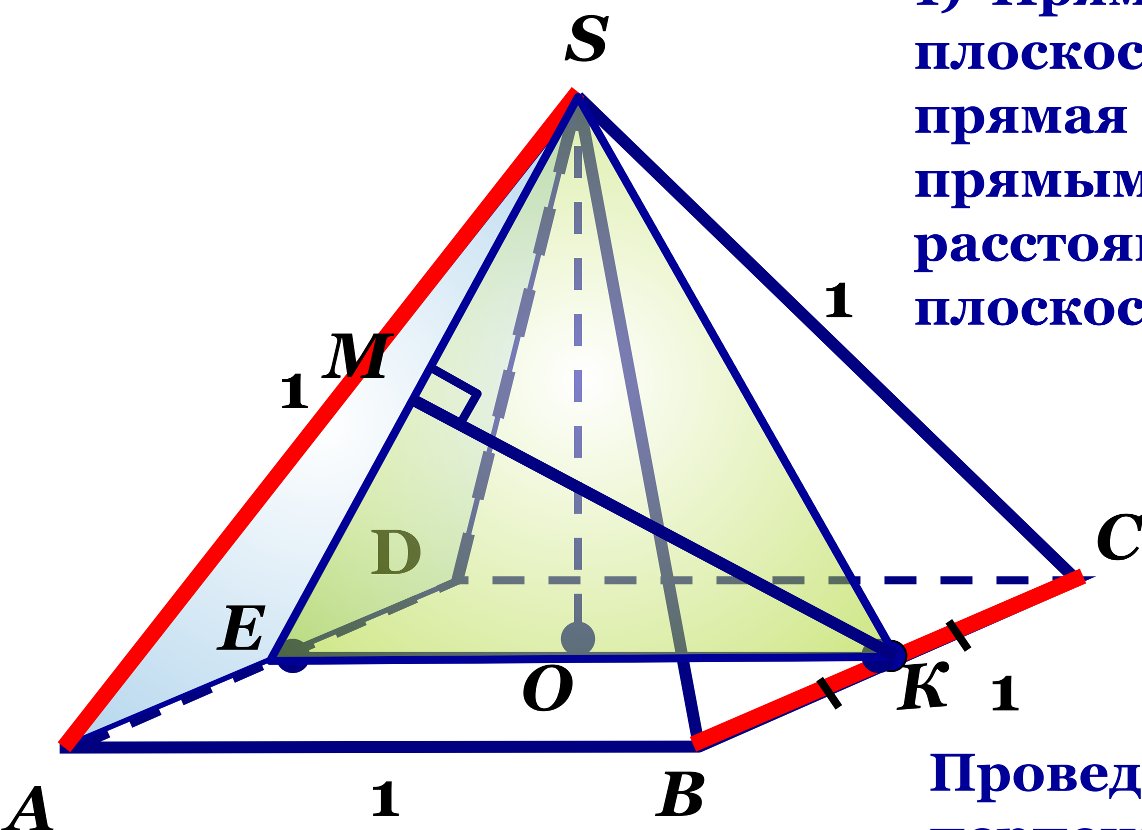


Расстояние между одной из скрещивающихся прямых и плоскостью, проходящей через другую прямую параллельно первой, называется

расстоянием между скрещивающимися прямыми

№ 1

В правильной четырехугольной пирамиде SABCД, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BC и SA.



1) Прямая BC параллельна плоскости SAD, в которой лежит прямая SA. ⇒ расстояние между прямыми BC и SA равно расстоянию от прямой BC до плоскости SAD.

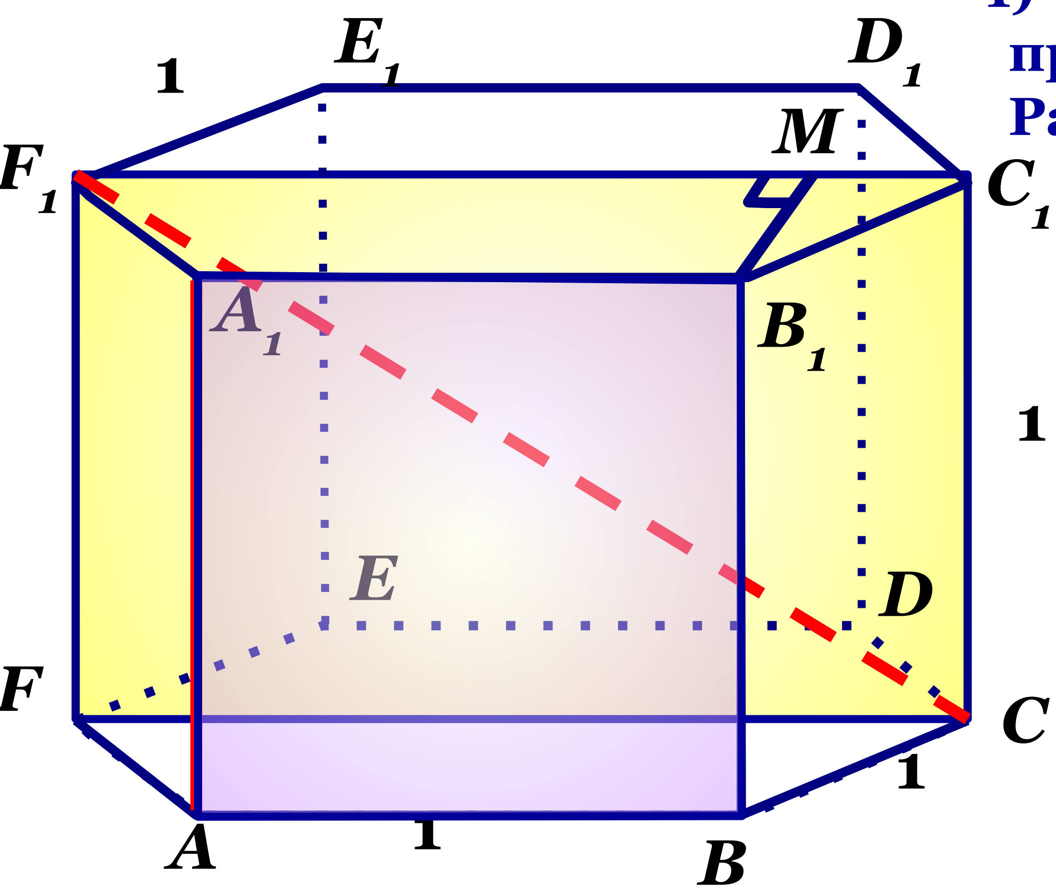
Пусть К середина ребра BC. Построим плоскость SKE перпендикулярную плоскости SAD, в которой лежит прямая SA.

Проведем из точки К перпендикуляр. КМ – искомое расстояние.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$

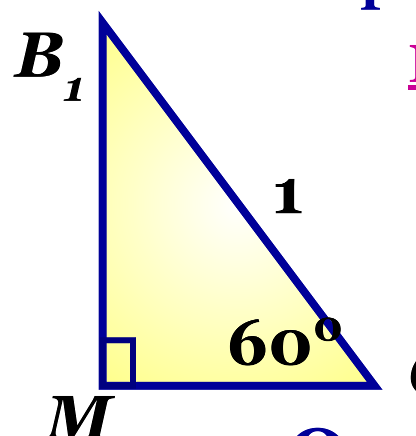
№ 2

В правильной шестиугольной призме $A.....F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AA_1 и CF_1.



1) Расстояние между прямыми AA1 и CF1 равно Расстоянию между параллельными плоскостями ABB_1A_1 и FCC_1F_1, в которых лежат эти прямые.

Проведем из точки B_1 перпендикуляр. B_1M – искомое расстояние.

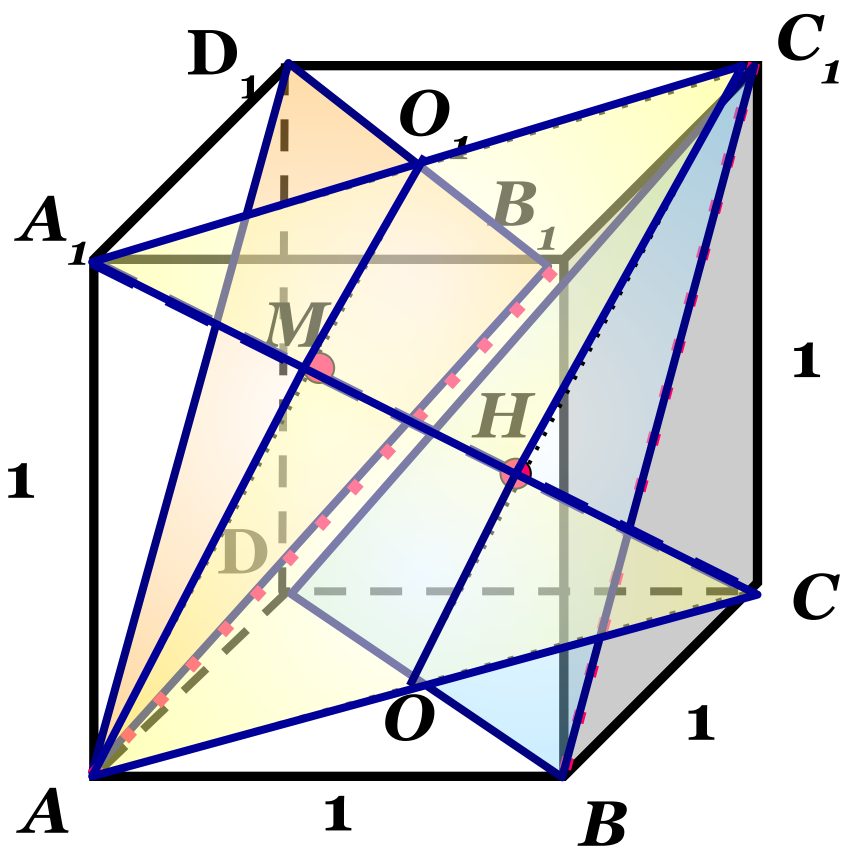


Подсказка:

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$

№ 3

В единичном кубе АВСДА$_1$В$_1$С$_1$Д$_1$ найдите расстояние между прямыми АВ$_1$ и ВС$_1$.



2) Через прямые АВ$_1$ и ВС$_1$ проведём параллельные плоскости АВ$_1$D$_1$ и ВДС$_1$.

1) Диагональ куба А$_1$С перпендикулярна этим плоскостям, а длина отрезка МН будет равна расстоянию между прямыми АВ$_1$ и ВС$_1$.

$$\left.\begin{array}{l} ВС_1 \parallel АД_1 \\ АВ_1 \parallel ДС_1 \\ ВС_1 \cap ДС_1 \\ АД_1 \cap АВ_1 \end{array}\right\} \Rightarrow (АД_1В_1) \parallel (ДВС_1)$$

Подсказка:

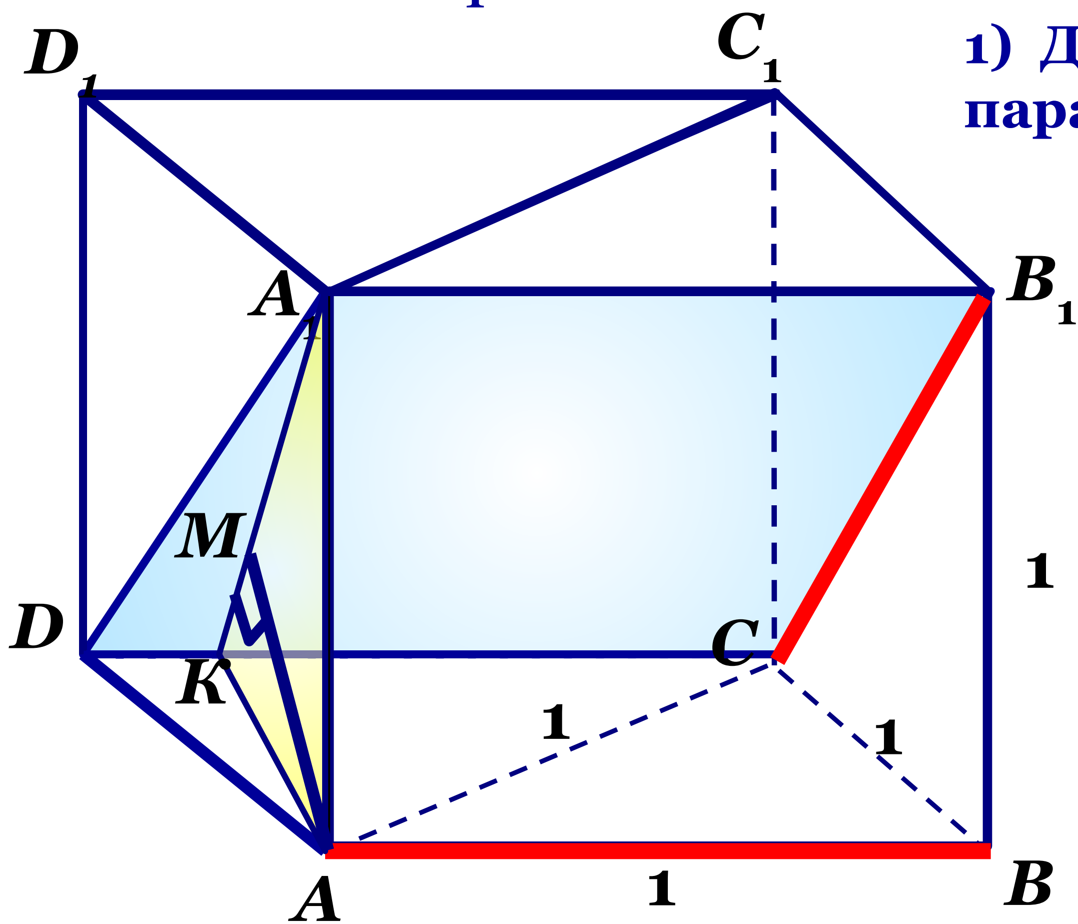
А$_1$М = МН = НС

⇒ Расстояние между этими прямыми равно расстоянию между соответствующими плоскостями АВ$_1$D$_1$ и ВДС$_1$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$

№ 4

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми АВ и CB_1.



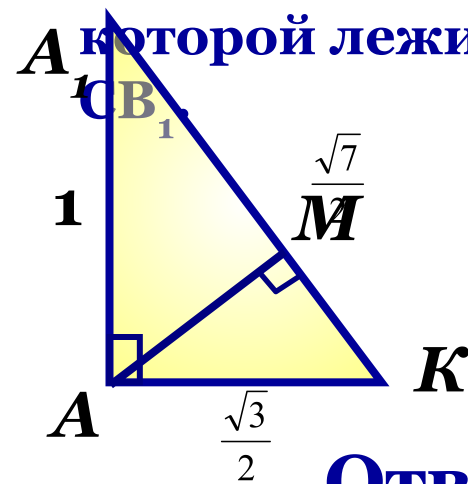
1) Достроим призму до параллелепипеда $ABCДA_1B_1C_1Д_1$.

Прямая AA_1 перпендикулярна плоскости $ДA_1B_1C$.

Расстояние между прямыми АВ и СВ1 равно расстоянию между прямой АВ и параллельной ей плоскостью $ДA_1B_1C$, в которой лежит прямая CB_1.

Проведем из точки А перпендикуляр. АМ – искомое расстояние.

Подсказка:

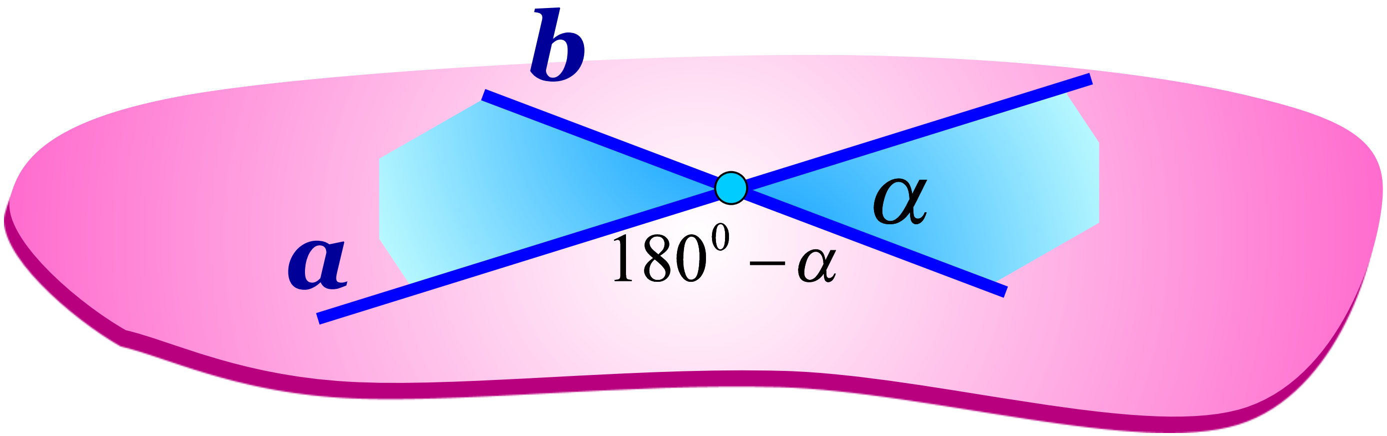


Ответ: $\frac{\sqrt{21}}{7}$

С2 Угол между прямыми

Повторение:

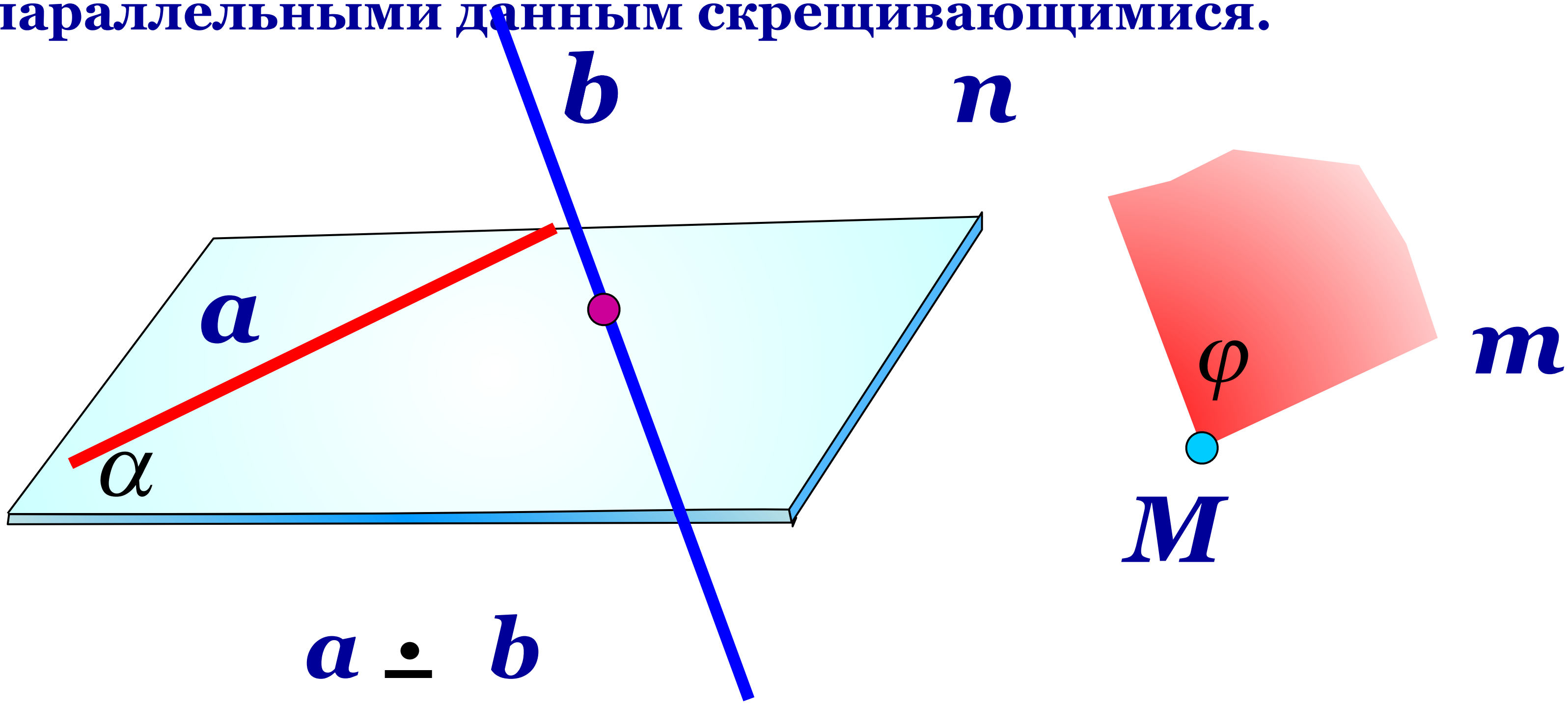
Углом между двумя пересекающимися прямыми называется наименьший из углов, образованных при пересечении прямых.



Пусть α – тот из углов, который не превосходит любой из трех остальных углов. Тогда говорят, что угол между пересекающимися прямыми равен α

Повторение:

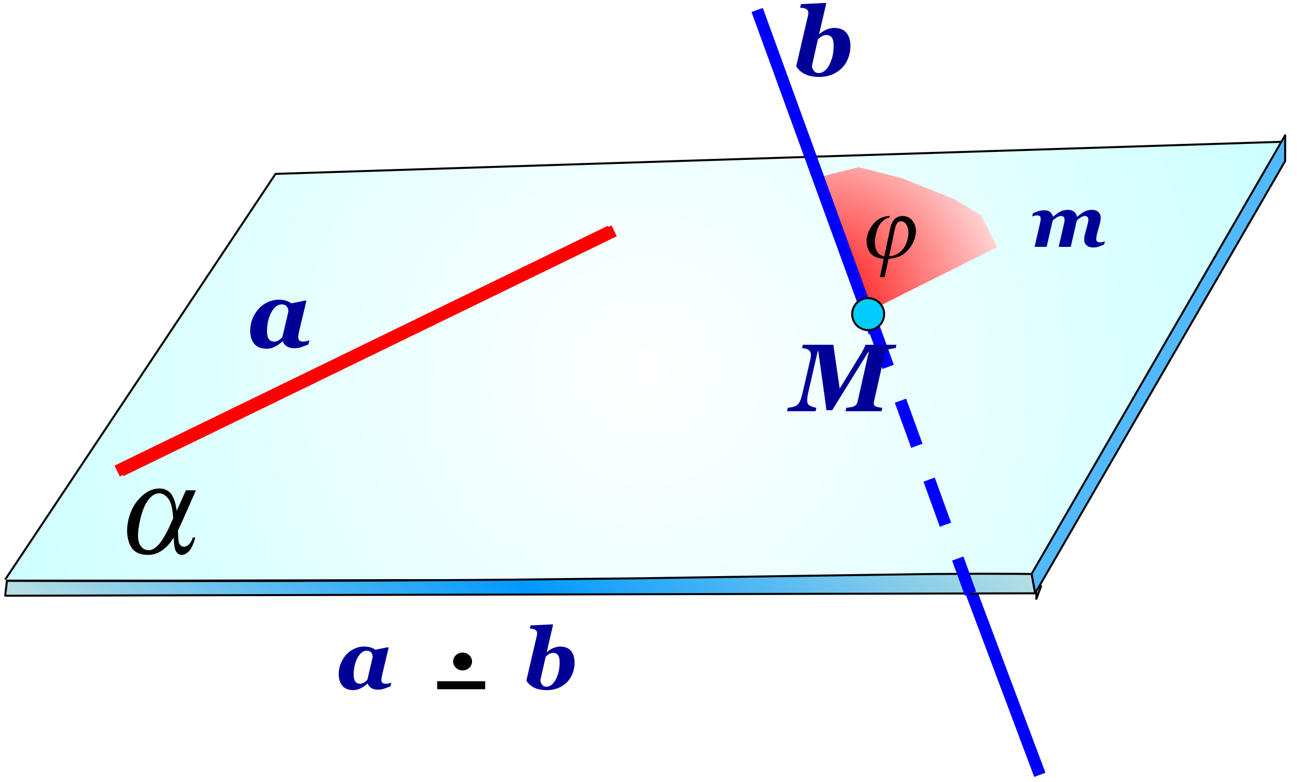
Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным скрещивающимися.



Через произвольную точку M проведем прямые m и n, соответственно параллельные прямым a и b.
Угол между скрещивающимися прямыми a и b равен φ

Повторение:

Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным скрещивающимися.



$a \dot{-} b$

Точку М можно выбрать произвольным образом.
В качестве точки М удобно взять любую точку на одной из скрещивающихся прямых.

Повторение:

При нахождении угла между прямыми используют

1) Формулу $$\cos\alpha = \frac{|b^2 + c^2 - a^2|}{2bc}$$ **(теорема косинусов)**

для нахождения угла α между прямыми m и n, если стороны a и b треугольника ABC соответственно параллельны этим прямым;

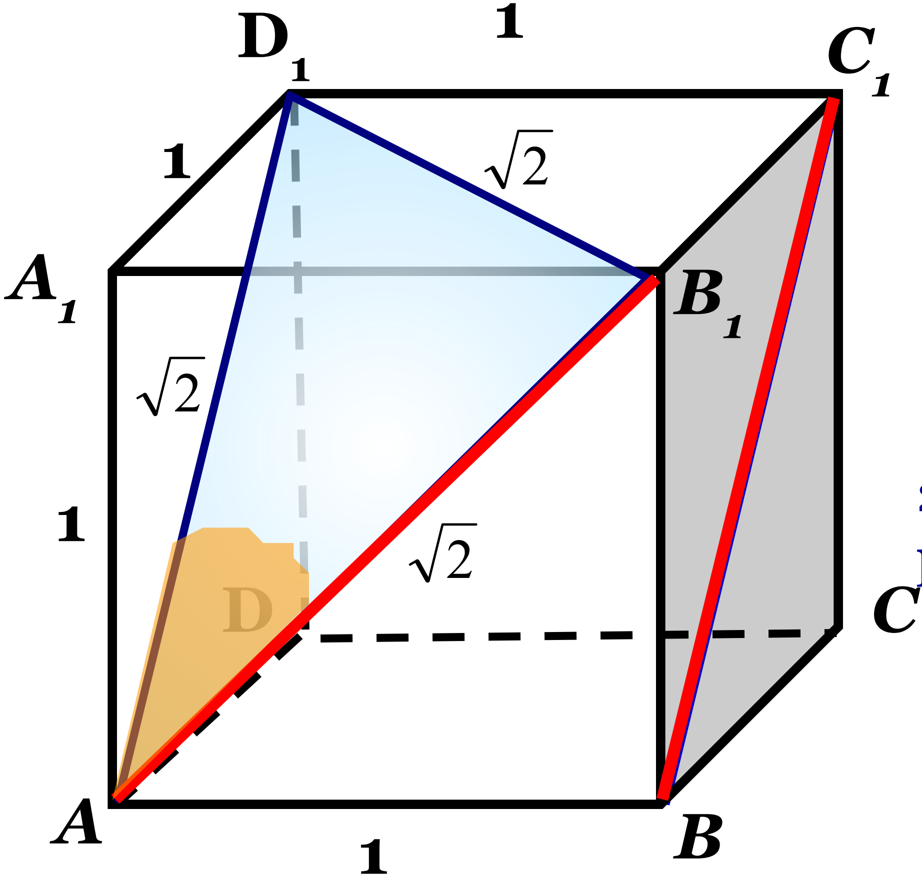
2) Или в координатной форме:

$$\cos\alpha = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

3) Ключевые задачи;

№ 1

В единичном кубе АВСДА$_1$В$_1$С$_1$Д$_1$ найдите угол между прямыми АВ$_1$ и ВС$_1$.



I решение

1) Прямая AD$_1$ параллельна прямой BC$_1$,

⇒ Угол между прямыми AB$_1$ и BC$_1$ равен углу B$_1$AD$_1$.

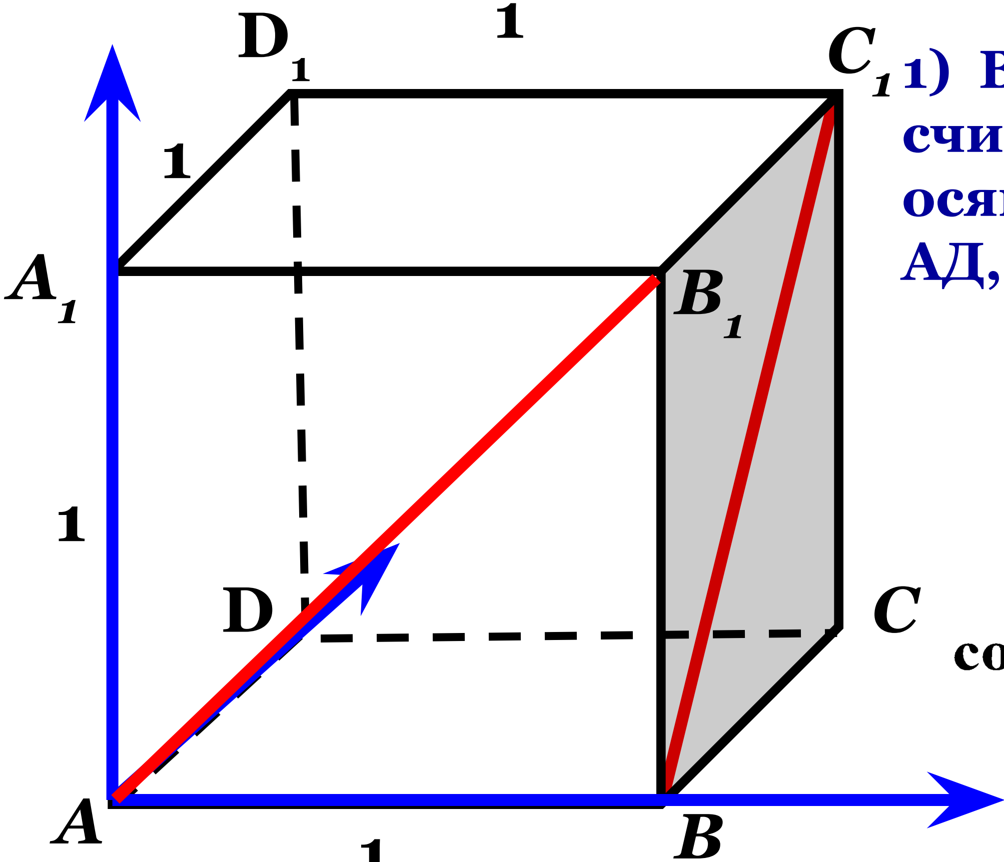
2) Треугольник B$_1$AD$_1$ – равносторонний, ⇒ ∠ B$_1$AD$_1$ = 60°.

Ответ: 60°

№ 1

В единичном кубе АВСДА$_1$В$_1$С$_1$Д$_1$ найдите угол между прямыми АВ$_1$ и ВС$_1$.

II решение



1) Введем систему координат, считая началом координат (·) А, осями координат – прямые АВ, АД, АА$_1$.

$$\left.\begin{array}{l} A(0;0;0) \\ B_1(1;0;1) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{AB_1}(1;0;1)$$

$$\left.\begin{array}{l} B(1;0;0) \\ C_1(1;1;1) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{BC_1}(0;1;1)$$

$$\cos\alpha = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

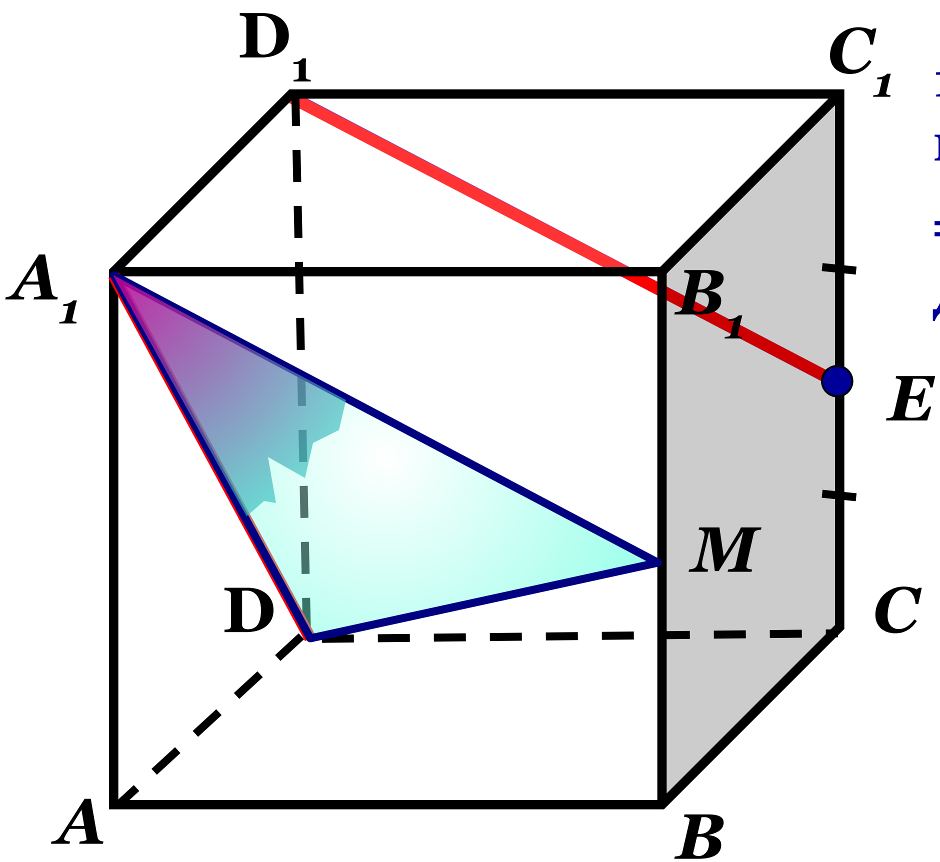
cos α = 1/2, ⇒ ∠ (AB$_1$;AD$_1$) = 60°.

Ответ: 60°

№ 2

В единичном кубе АВСДА$_1$В$_1$С$_1$Д$_1$ найдите угол между прямыми А$_1$Д и Д$_1$Е, где Е – середина ребра СС$_1$.

I решение



1) Прямая А$_1$М параллельна прямой ВС$_1$

⇒ Угол между прямыми А$_1$D и Д$_1$Е равен углу МА$_1$D.

2) из ΔМА$_1$D по теореме косинусов:

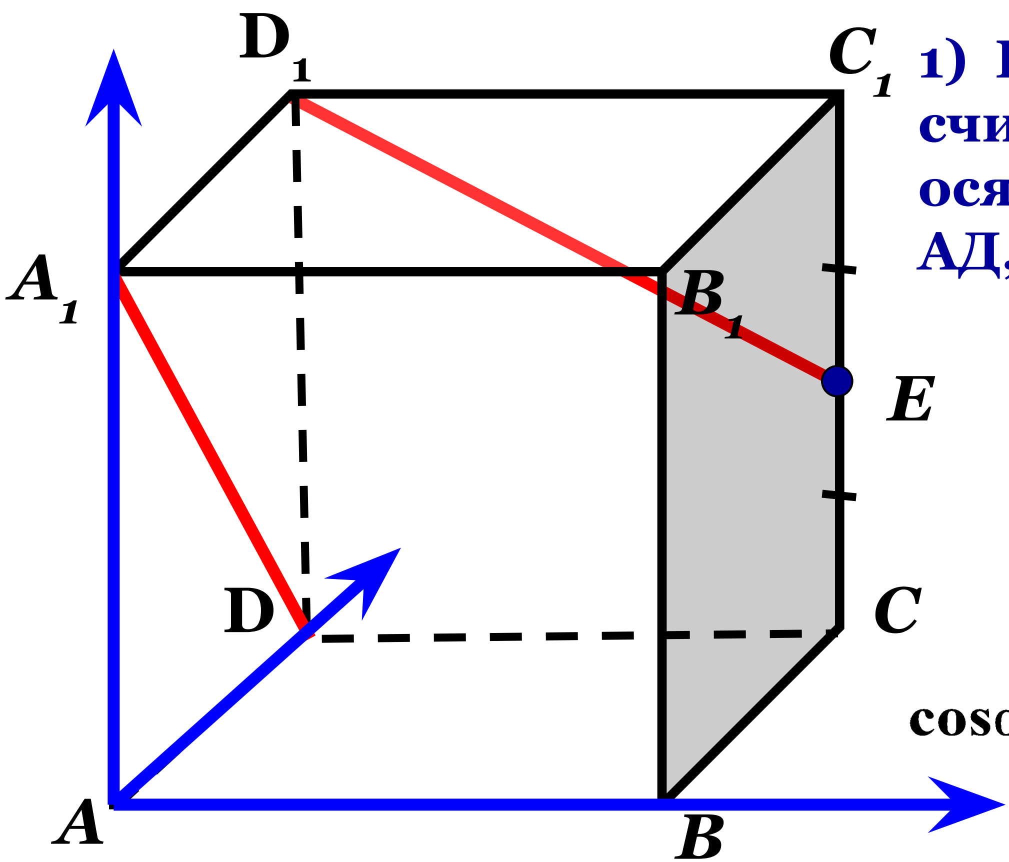
$$\cos\alpha = \frac{\left|b^2 + c^2 - a^2\right|}{2bc}$$

Ответ: $\alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$

№ 2

В единичном кубе АВСДА$_1$В$_1$С$_1$Д$_1$ найдите угол между прямыми А$_1$Д и Д$_1$Е, где Е – середина ребра СС$_1$.

II решение



1) Введем систему координат, считая началом координат (·) А, осями координат – прямые АВ, АД, АА$_1$.

$$\left.\begin{matrix} A_1(0;0;1) \\ B(0;1;0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{A_1Д}(0;1;-1)$$

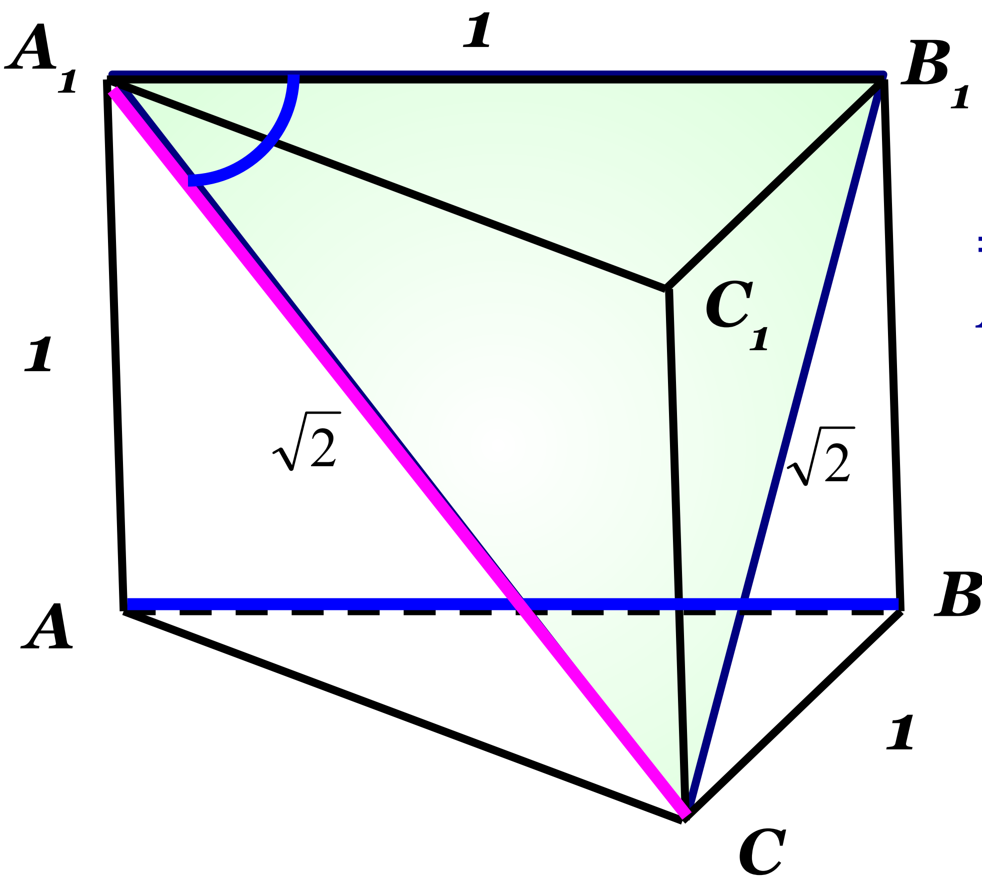
$$\left.\begin{matrix} Д_1(0;1;1) \\ E(1;1;0,5) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{Д_1E}(1;0;-0,5)$$

$$\cos\alpha = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Ответ: $\alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$

№ 3

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$,все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB и A_1C .



1) Прямая A_1B_1 параллельна прямой AB,

$\Rightarrow$ Угол между прямыми AB и A_1C равен углу $CA_1B_{1.}$

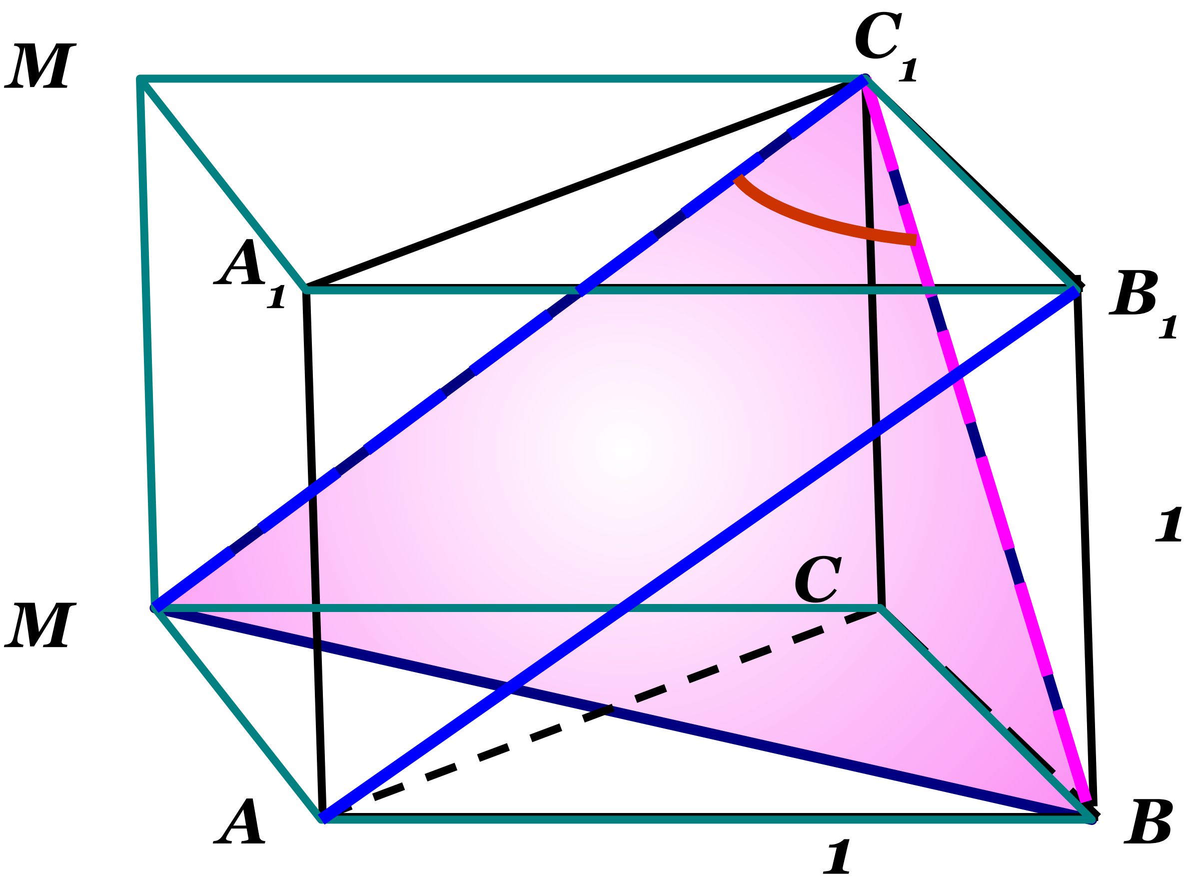
2) из $\Delta\, CA_1B_1$ по теореме косинусов:

$$\cos\alpha = \frac{\left|b^2 + c^2 - a^2\right|}{2bc}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}$

№ 4

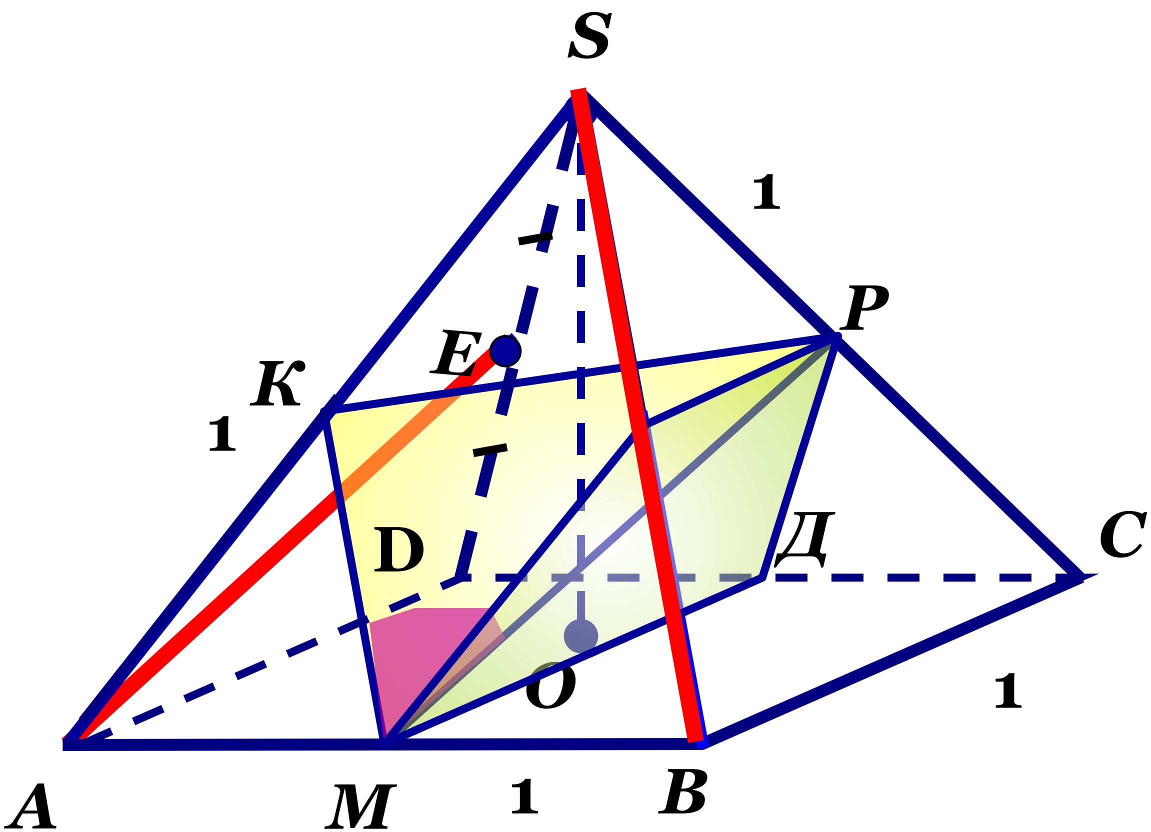
В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1.



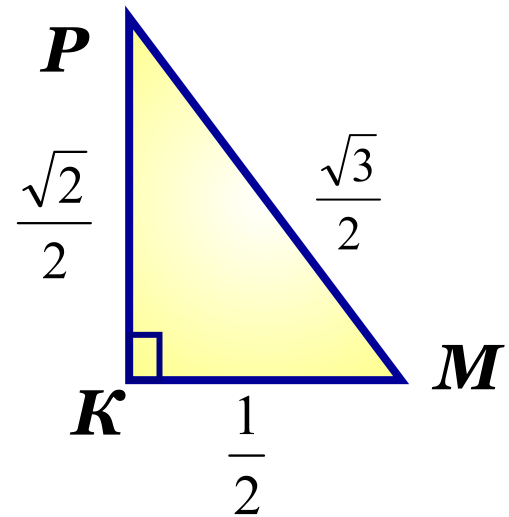
Ответ: $\frac{1}{4}$

№ 5

В правильной четырехугольной пирамиде SABCД, все ребра которой равны 1, точка E – середина ребра SD. Найдите тангенс угла между прямыми AE и SB.



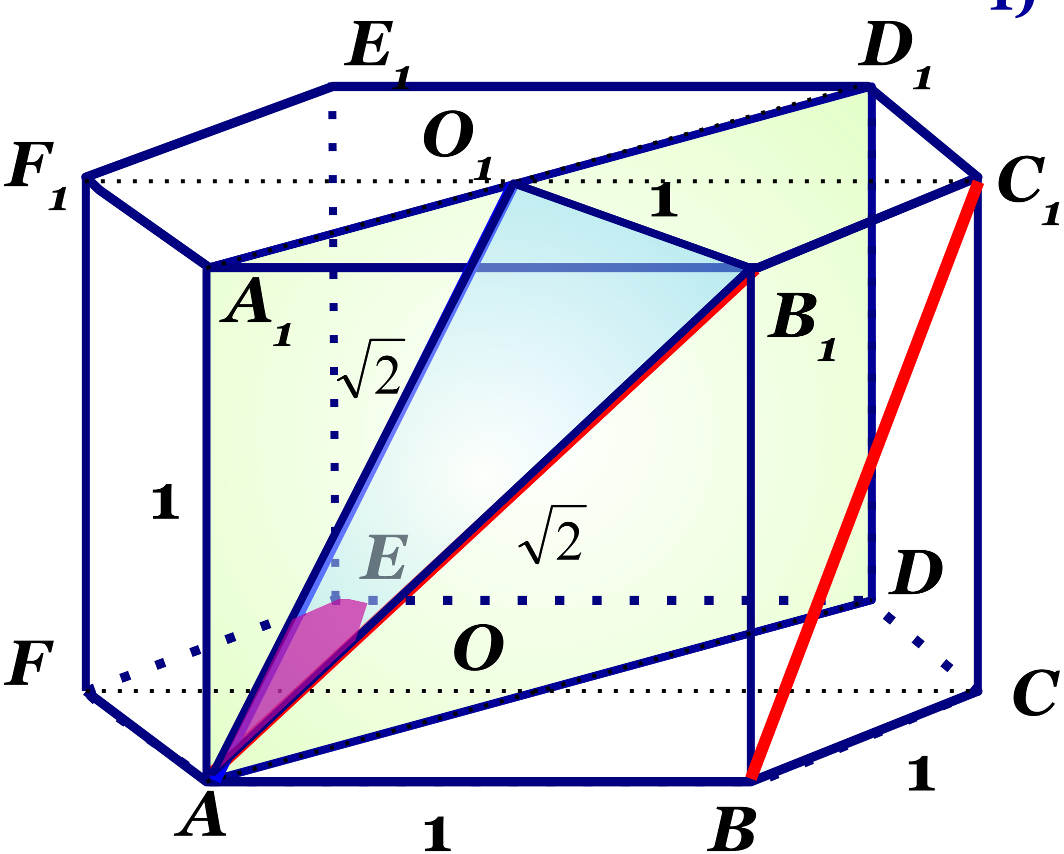
Подсказка:



Ответ: $\frac{\sqrt{\ }}{2}$

№ 6

В правильной шестиугольной призме A … F1, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1



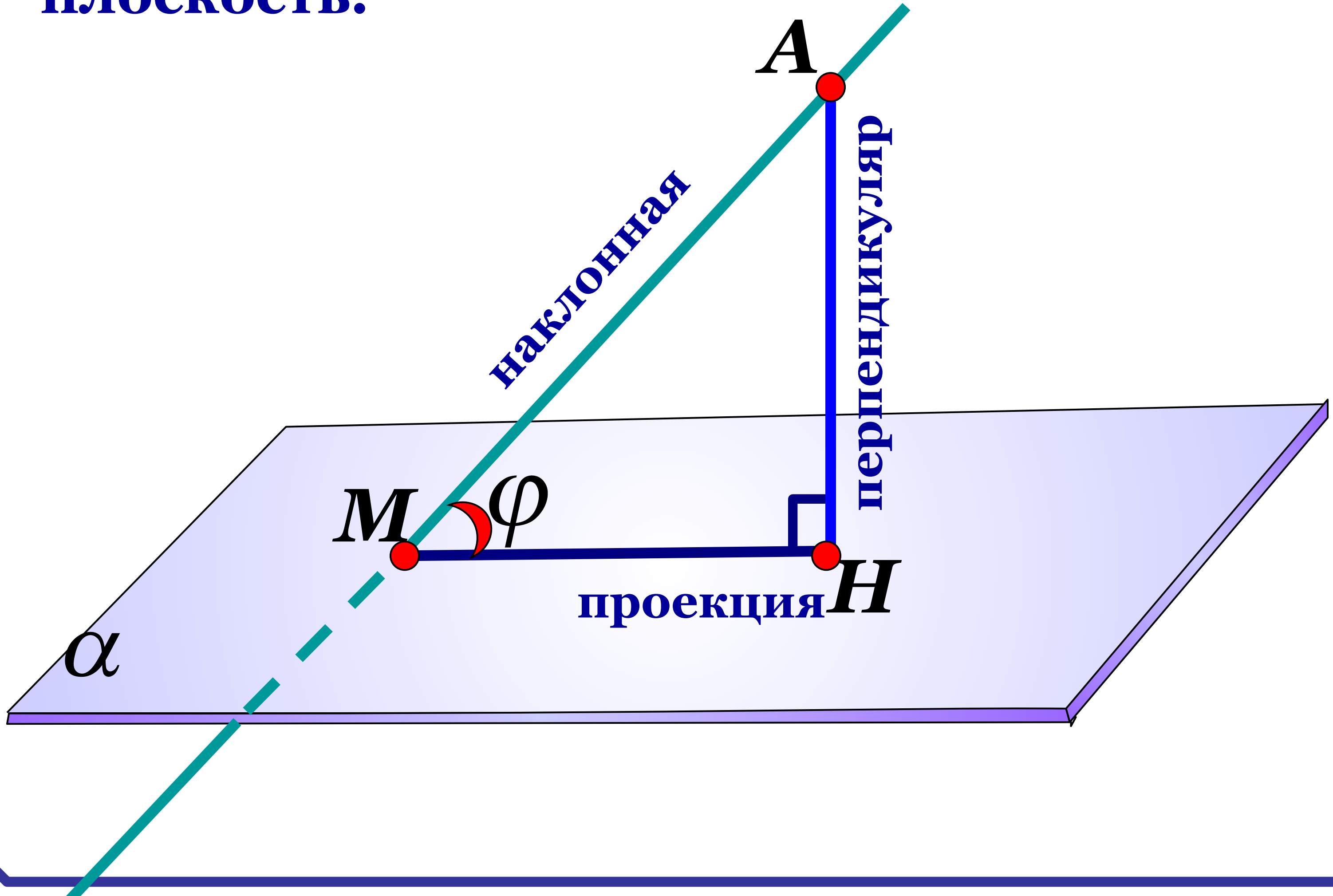
1) Построим плоскость AA_1D_1D параллельную плоскости BB_1C_1C. Тогда прямая AO_1 параллельна прямой BC_1, и искомый угол φ между прямыми AB_1 и BC_1 равен $\angle B_1AO_1$.

Ответ: 0,75

C2 Угол между прямой и плоскостью

Повторение:

Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость.



Повторение:

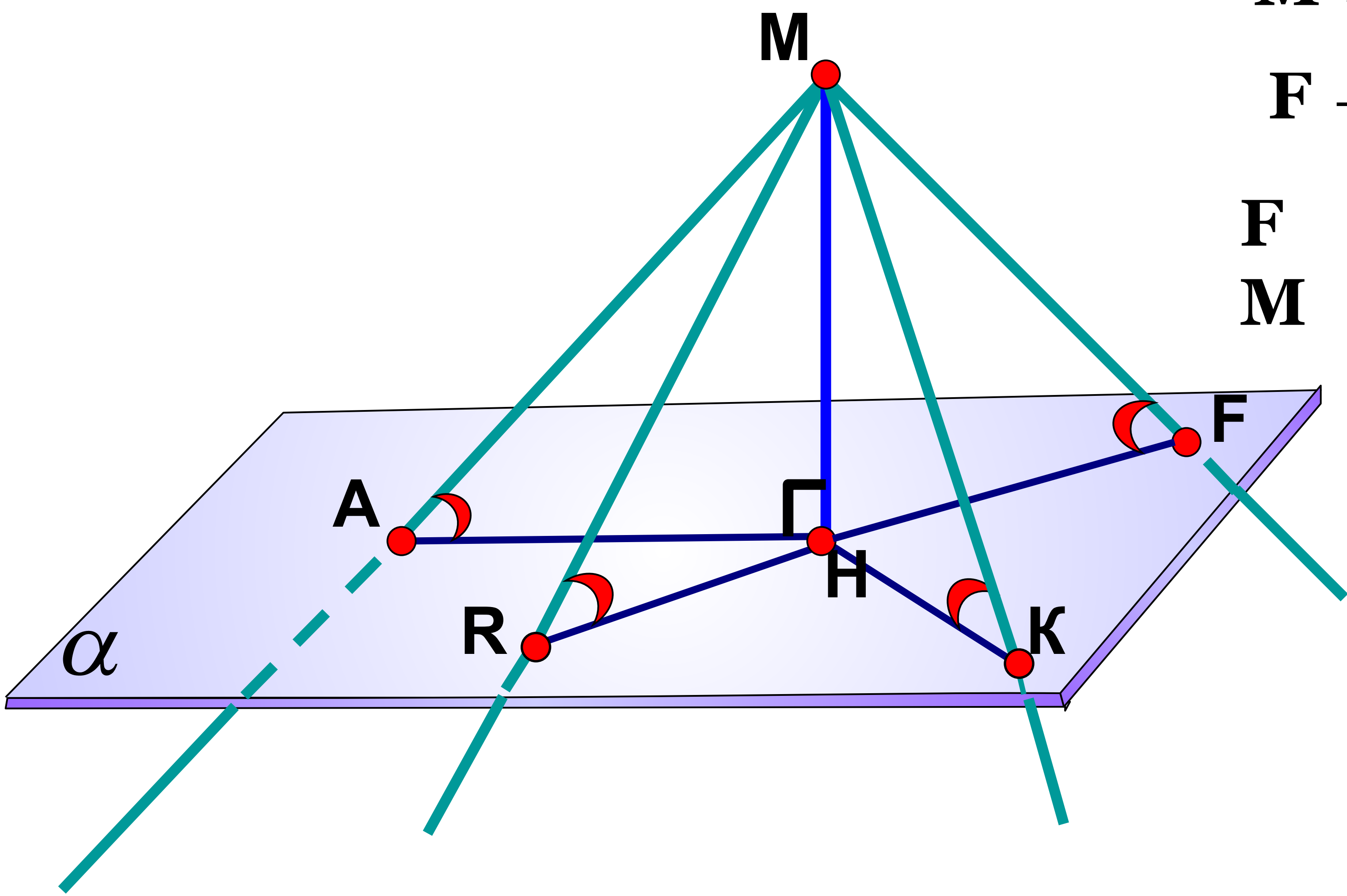
Найти угол между наклонными и плоскостью (описать алгоритм построения).

M→ H

F → F

F → FH

M



Повторение:

Угол между прямой m и плоскостью α можно вычислить:

1) Если этот угол удается включить в прямоугольный треугольник в качестве одного из острых углов;

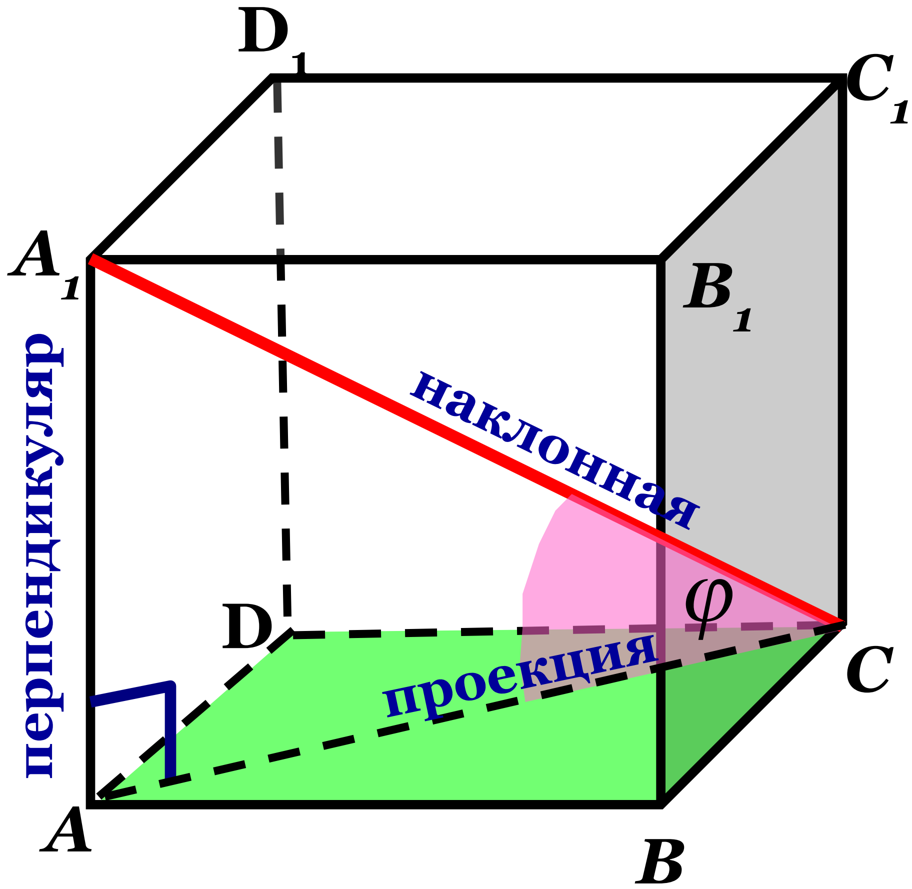
2) Используя векторный метод;

3) Используя координатно –векторный метод;

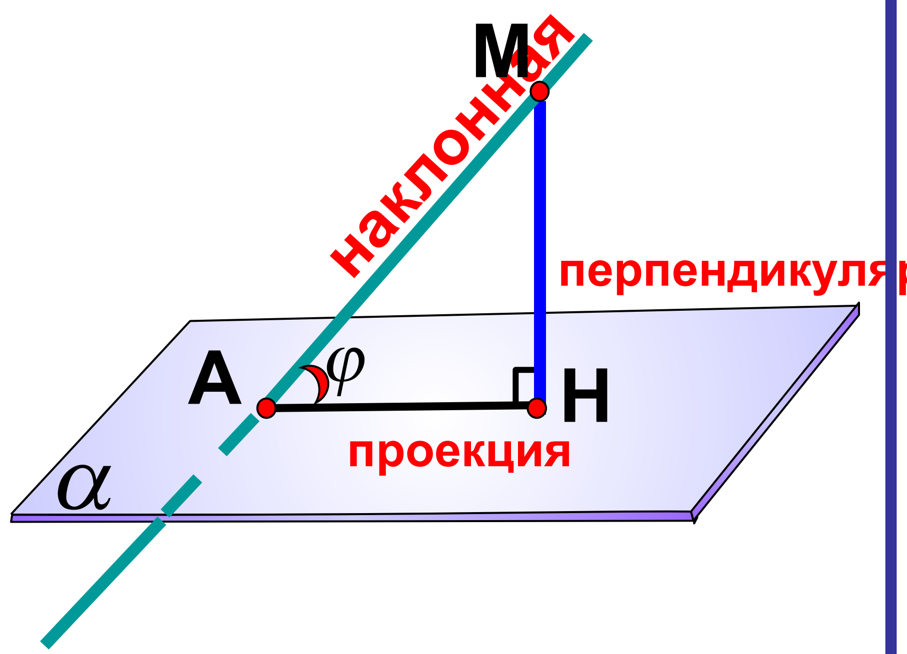
4) Используя ключевые задачи;

Устно:

Найдите тангенс угла между диагональю куба и плоскостью одной из его граней.



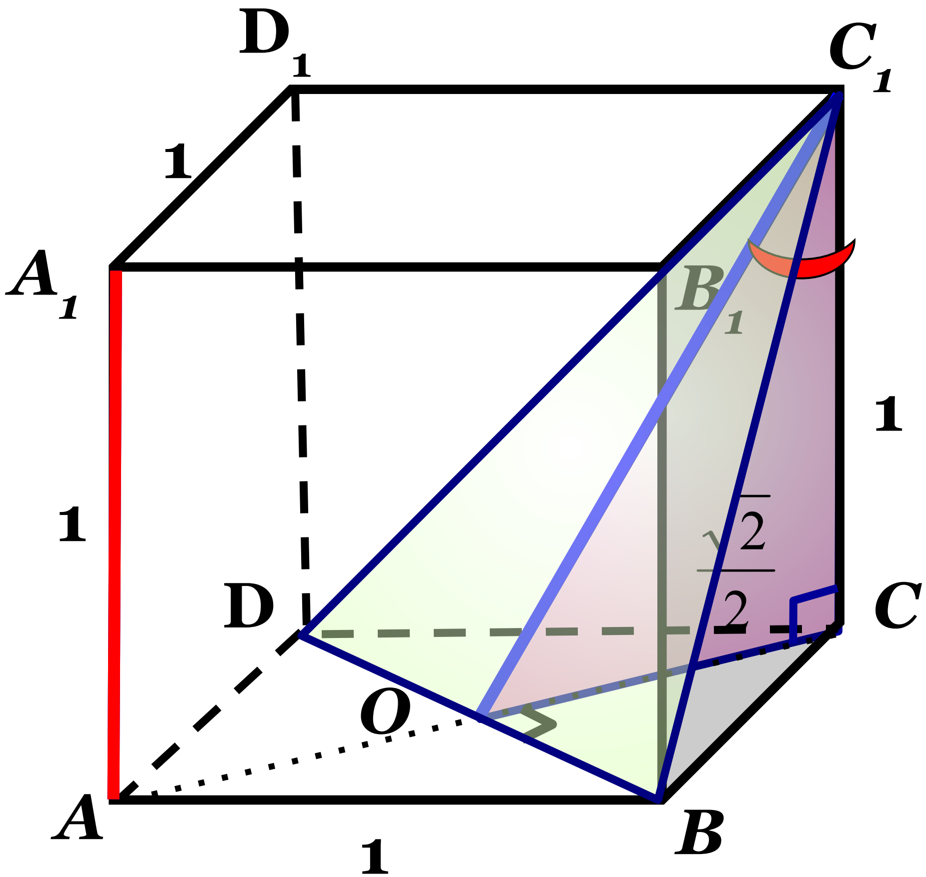
Подсказка



Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и ее проекцией на

№ 1

В единичном кубе АВСДА$_1$В$_1$С$_1$Д$_1$ найдите тангенс угла между прямой АА$_1$ и плоскостью ВС$_1$Д .



1) Прямая АА$_1$ параллельна прямой СС$_1$, ⇒Угол между прямой АА$_1$ и плоскостью ВС$_1$Д . равен углу между СС$_1$ и плоскостью ВС$_1$Д.

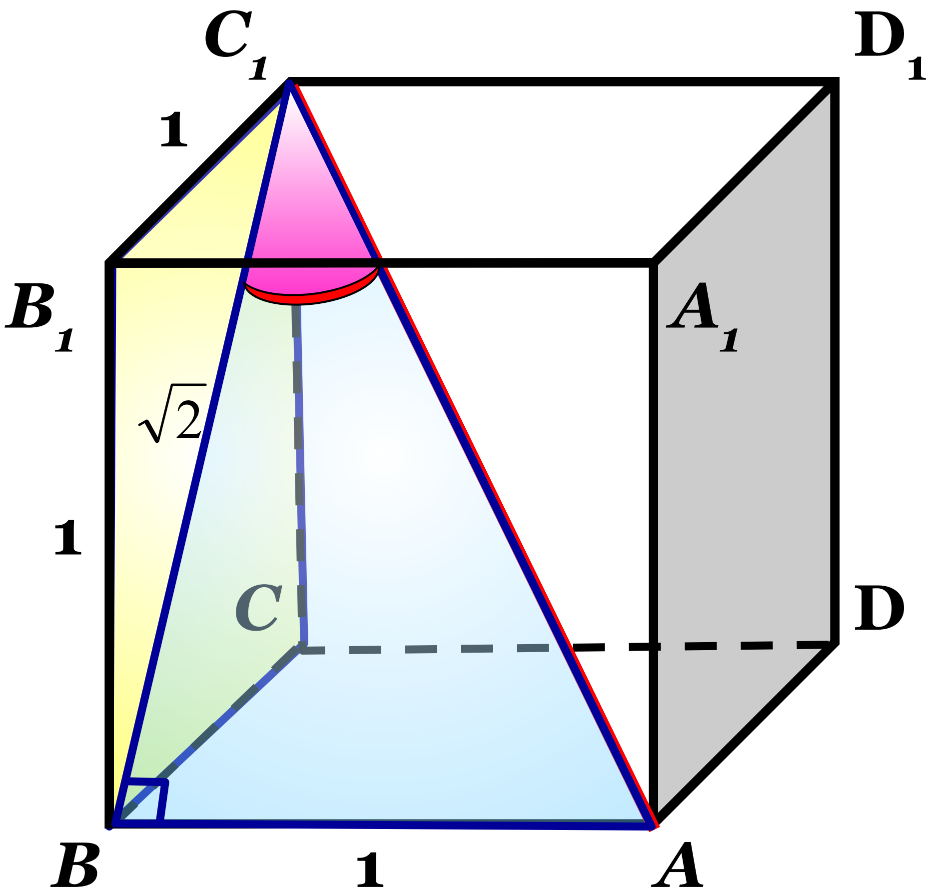
$$\left.\begin{aligned} ВД &\in (ДВС_1) \\ ВД &\perp АС \\ ВД &\perp СС_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (ДВС_1) \perp (ОС_1С)$$

2. Прямая СС$_1$ проецируется на плоскость ВС$_1$Д в прямую ОС$_1$. Поэтому проекция точки С лежит на отрезке ОС$_1$. Значит, прямая ОС$_1$ является проекцией прямой СС$_1$, следовательно, угол ОС$_1$С искомый.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

№ 2

В единичном кубе АВСДА$_1$В$_1$С$_1$Д$_1$ найдите тангенс угла между прямой АС$_1$ и плоскостью ВСС$_1$.



1) Построим плоскость АВС1,

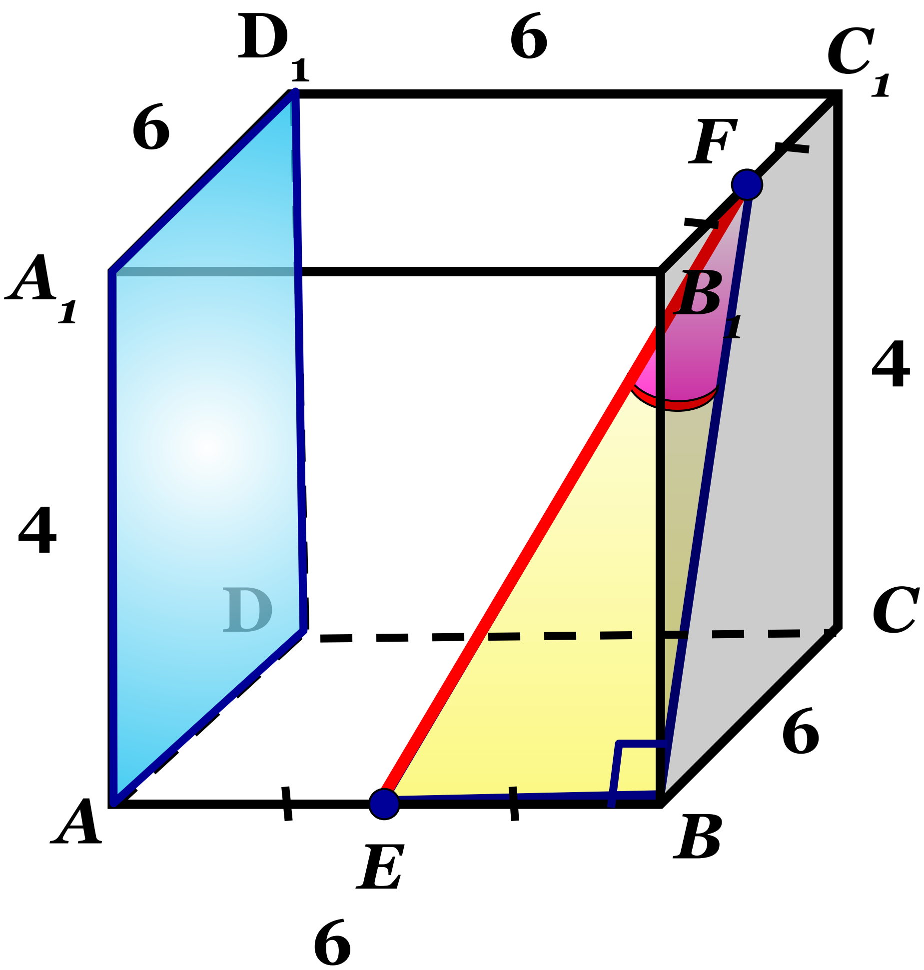
$$\left.\begin{array}{c} AB \in (ABC_1) \\ AB \perp BC \\ AB \perp BB_1 \end{array}\right\} \Rightarrow (ABC_1) \perp (BB_1C_1C)$$

2. Прямая АС$_1$ проецируется на плоскость ВСС$_1$ в прямую ВС$_1$. следовательно, угол АС$_1$В искомый.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

№ 3

В прямоугольном параллелепипеде АВСДА$_1$В$_1$С$_1$Д$_1$, у которого АА$_1$ = 4, А$_1$Д$_1$ = 6, С$_1$Д$_1$ = 6, найдите тангенс угла между плоскостью АДД$_1$ и прямой EF, проходящей через середины ребер АВ и В$_1$С$_1$.



1) Угол между прямой EF и плоскостью ADD$_1$ равен углу между EF и плоскостью BCC$_1$, т.к. эти плоскости параллельны.

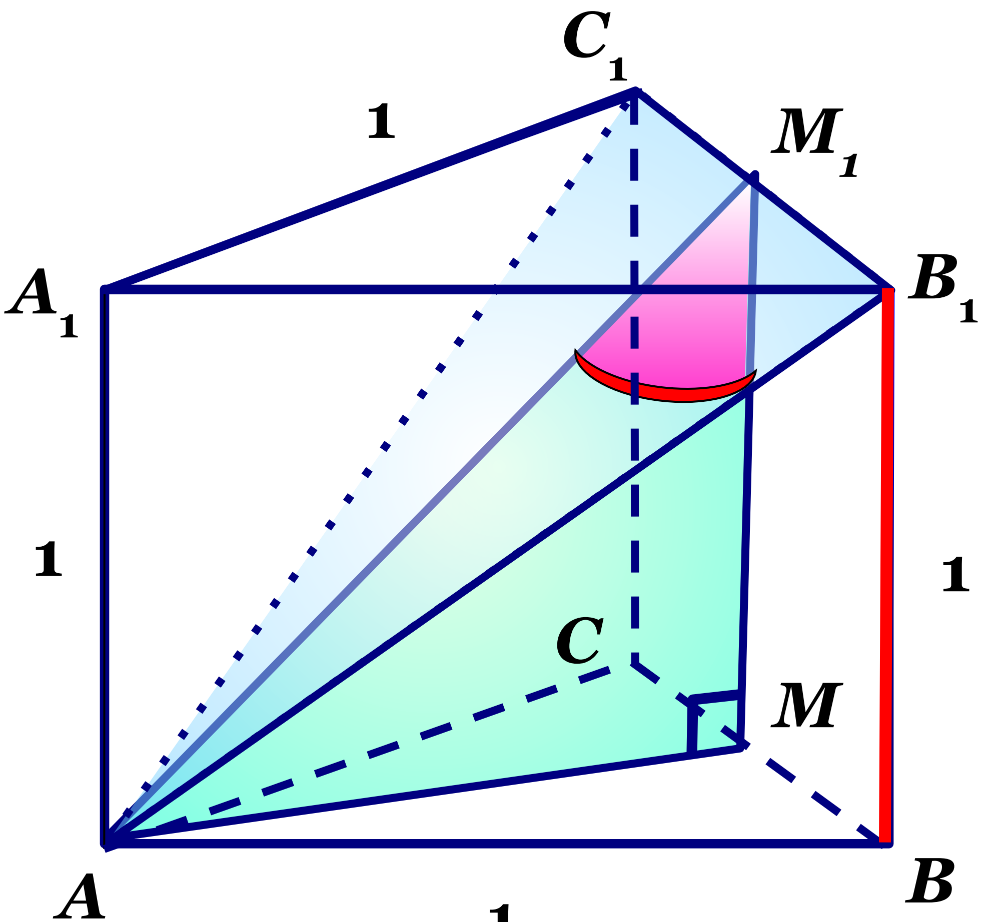
F→F, E→B, EF→BF

угол EFB – искомый.

Ответ: 0,6

№ 4

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между прямой BB_1 и плоскостью AB_1C_1.



1) Прямая MM_1 параллельна прямой BB_1, ⇒Угол между прямой BB_1 и плоскостью AB_1C_1 равен углу между MM_1 и плоскостью AB_1C_1.

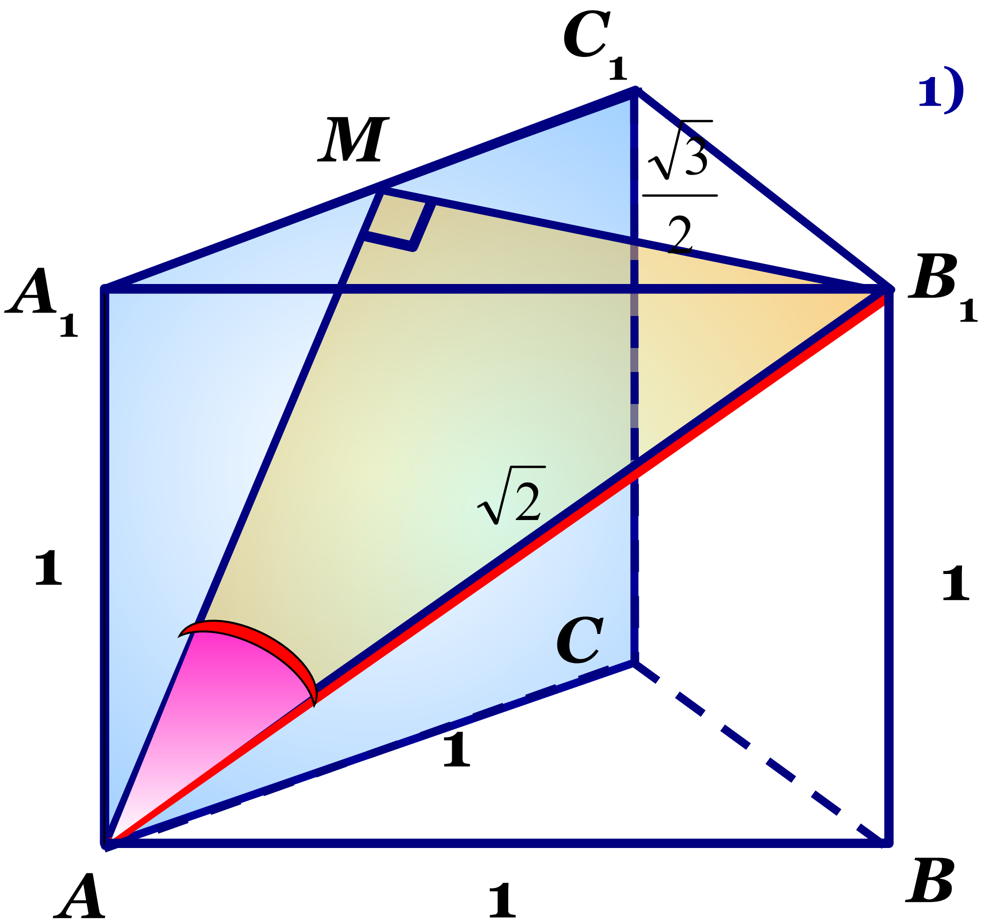
$$\left.\begin{array}{l} B_1C_1 \in (AB_1C_1) \\ B_1C_1 \perp MM_1 \\ B_1C_1 \perp AM_1 \end{array}\right\} \Rightarrow (AB_1C_1) \perp (AM_1M)$$

угол AM_1M – искомый.

Ответ: $\frac{\sqrt{}}{3}$ 2

№ 5

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью AA_1C_1C.



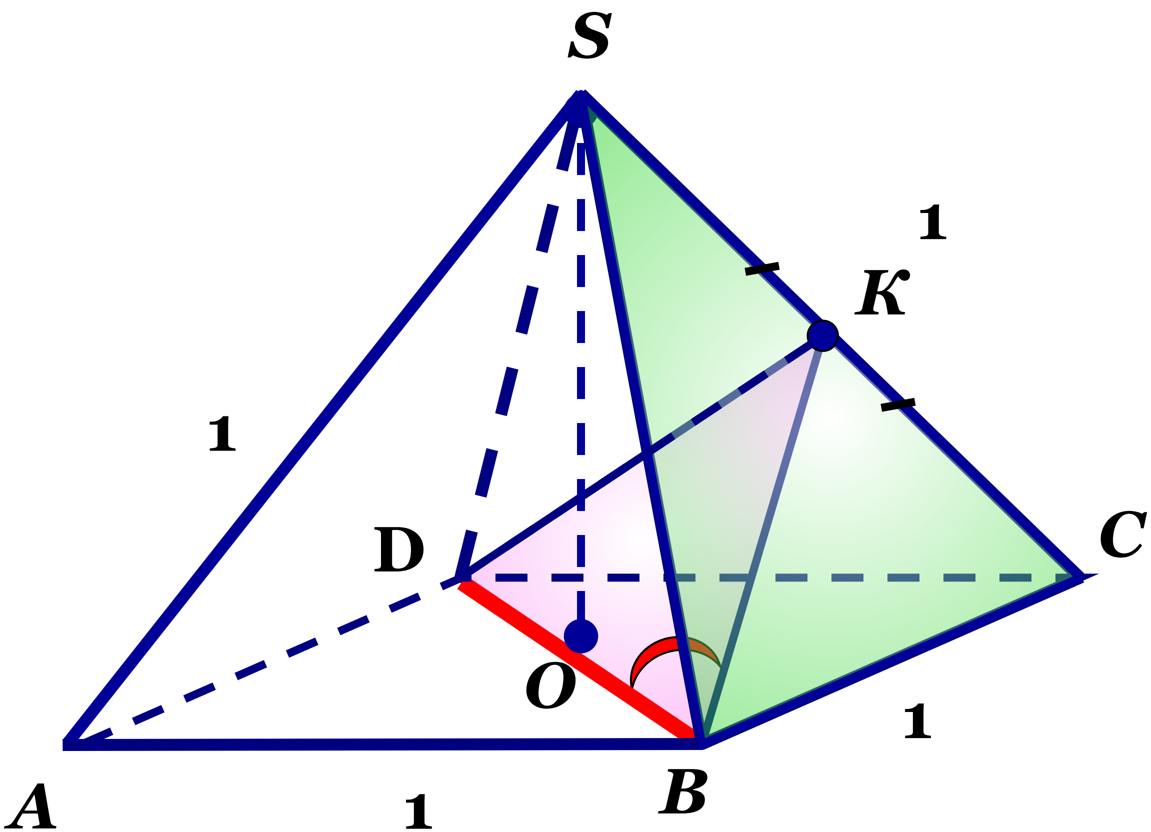
1) Пусть M – середина A_1C_1, тогда B_1M – перпендикуляр к плоскости AA_1C_1C, а M – проекция точки B_1 на эту плоскость,

угол MAB_1 – искомый.

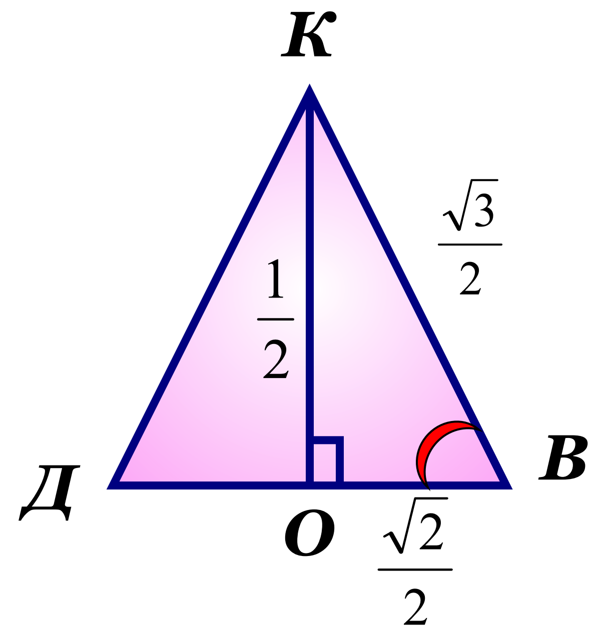
Ответ: $\alpha = \arcsin \frac{\sqrt{6}}{4}$

№ 6

В правильной четырехугольной пирамиде SABCД, все ребра которой равны 1. Найдите синус угла между прямой ВД и плоскостью SBC.



Подсказка:



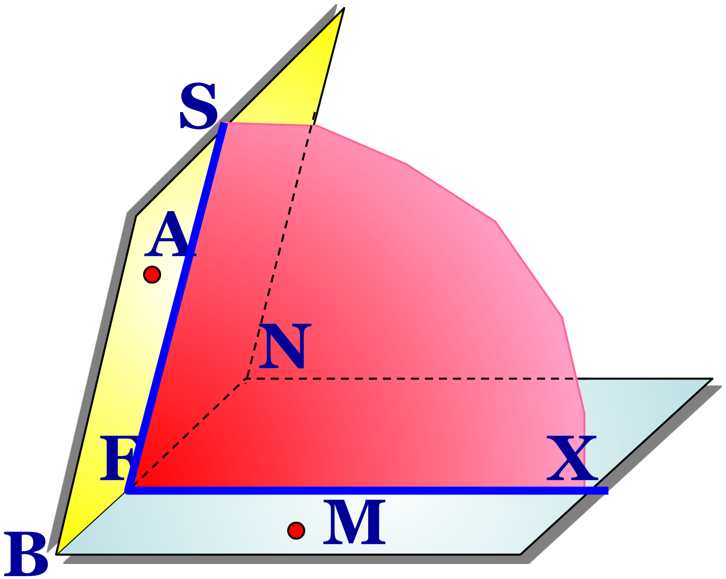
Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$

С2

Угол между плоскостями

Повторение:

Двугранный угол, образованный полуплоскостями измеряется величиной его линейного угла, получаемого при пересечении двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру.

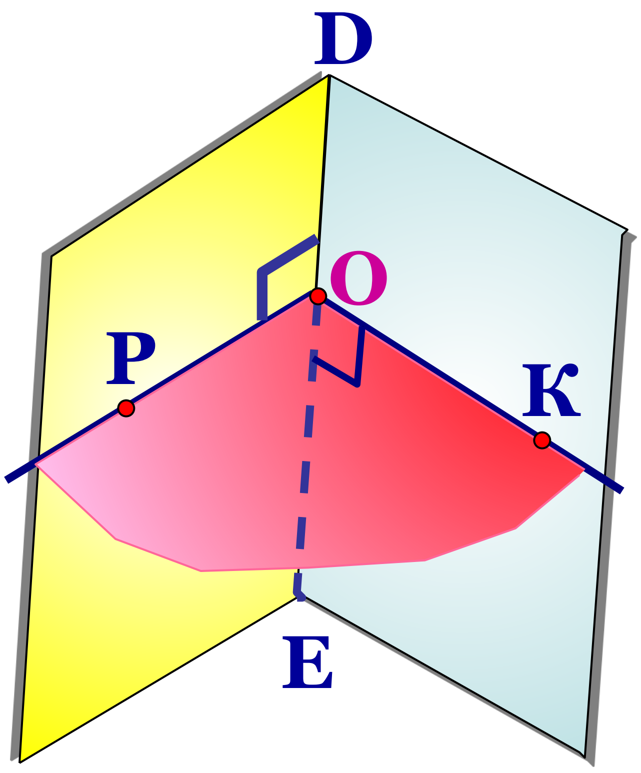


Двугранный угол ABNM, где BN – ребро, точки A и M лежат в гранях двугранного угла

Угол SFX – линейный угол двугранного угла

Повторение:

Алгоритм построения линейного угла.



Угол РОК – линейный угол двугранного угла PDEK.

Плоскость линейного угла (РОК) ⊥ DE.

Повторение:

Угол между пересекающимися плоскостями можно вычислить:

1) Как угол между прямыми, лежащими в этих плоскостях и перпендикулярными к линии их пересечения;

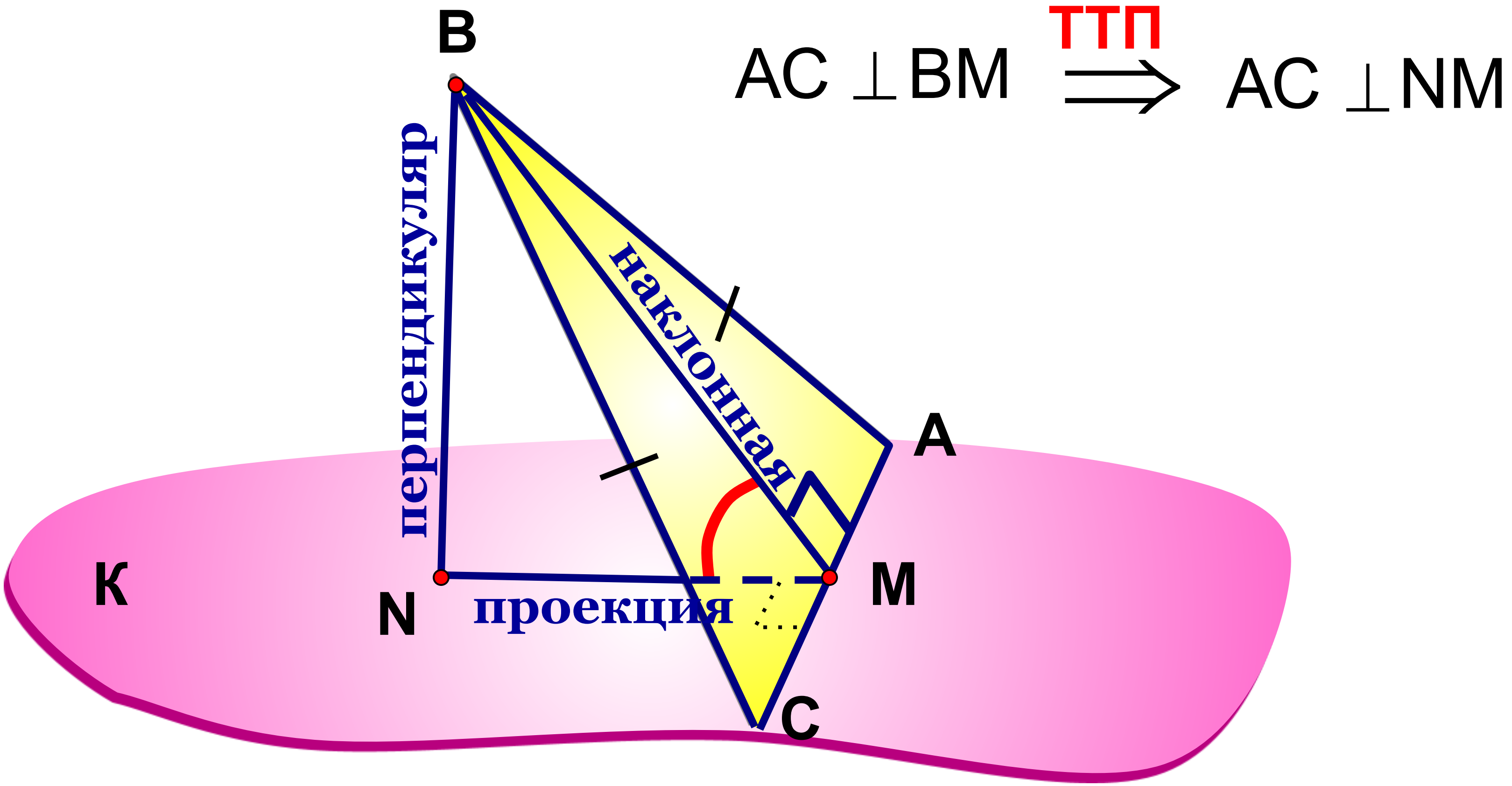
2) Как угол треугольника, если удается включить линейный угол в некоторый треугольник;

3) Используя координатно –векторный метод;

4) Используя ключевые задачи;

Устно:

Построить линейный угол двугранного угла ВАСК.
Треугольник АВС – равнобедренный.

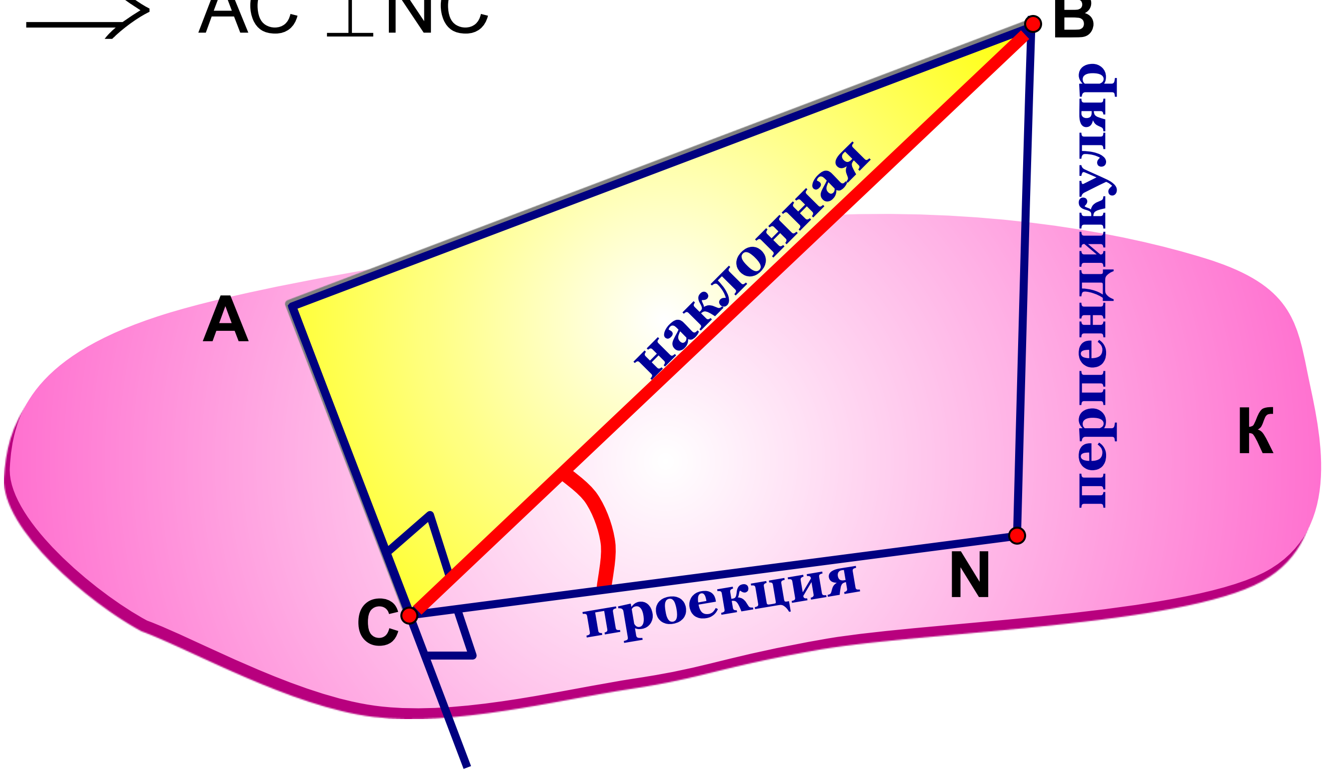


Угол BMN – линейный угол двугранного угла ВАСК

Устно:

Построить линейный угол двугранного угла ВАСК.
Треугольник АВС – прямоугольный.

$AC \perp BC \overset{\text{ТТП}}{\Longrightarrow} AC \perp NC$

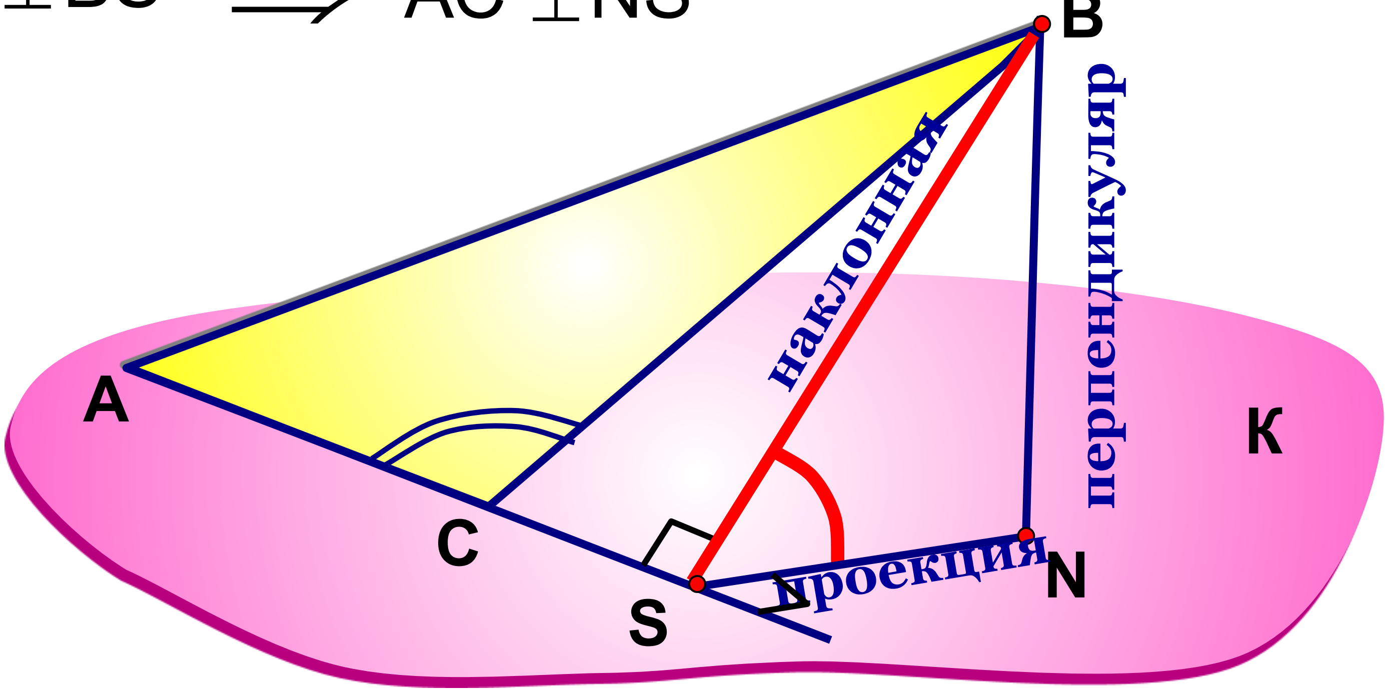


Угол BCN – линейный угол двугранного угла ВАСК

Устно:

Построить линейный угол двугранного угла ВАСК.
Треугольник АВС – тупоугольный.

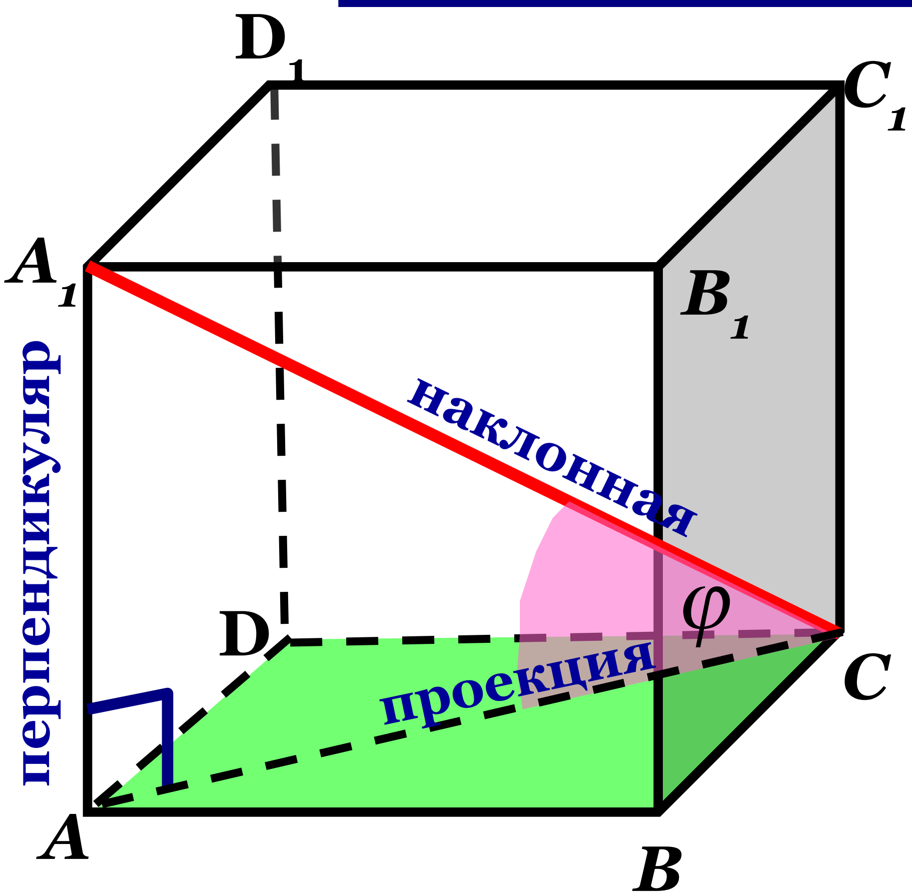
$$AC \perp BS \xRightarrow{\text{ТТП}} AC \perp NS$$



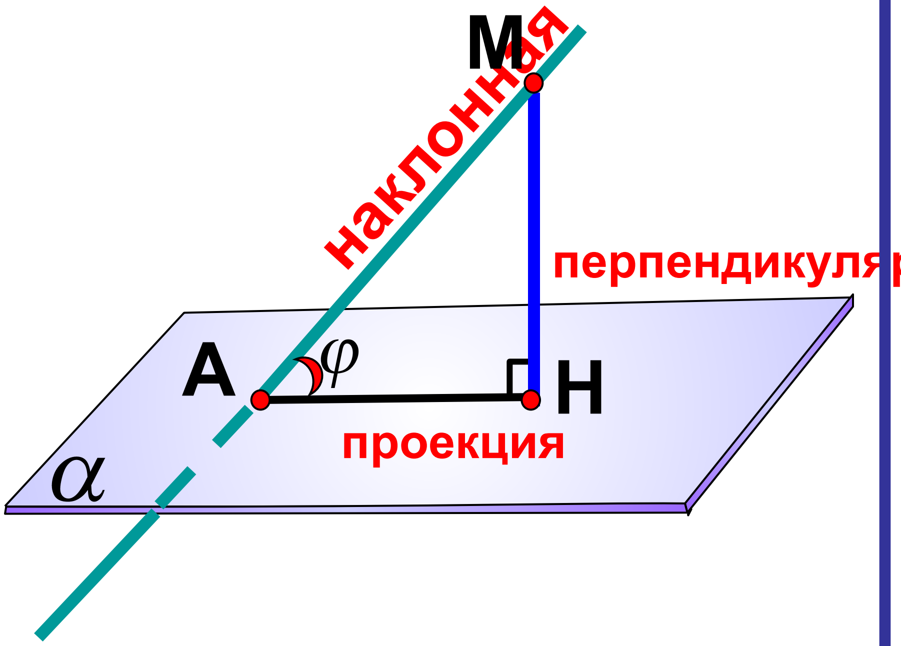
Угол BSN – линейный угол двугранного угла ВАСК

Устно:

Найдите тангенс угла между диагональю куба и плоскостью одной из его граней.



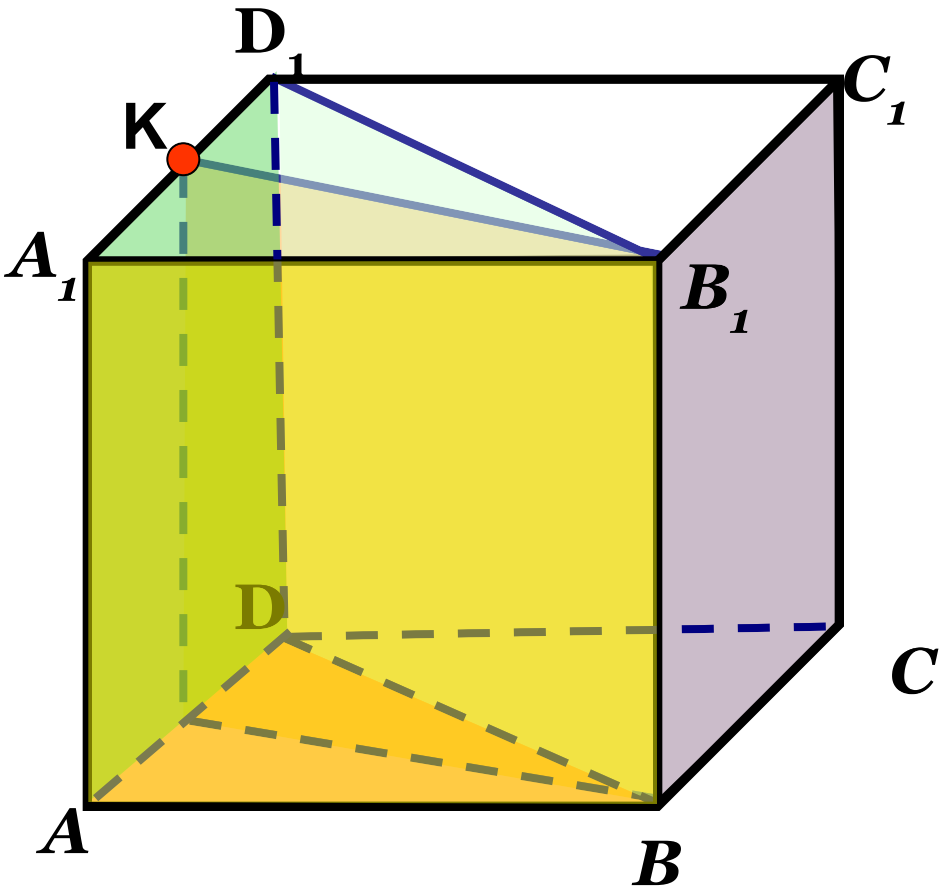
Подсказка



Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и ее проекцией на

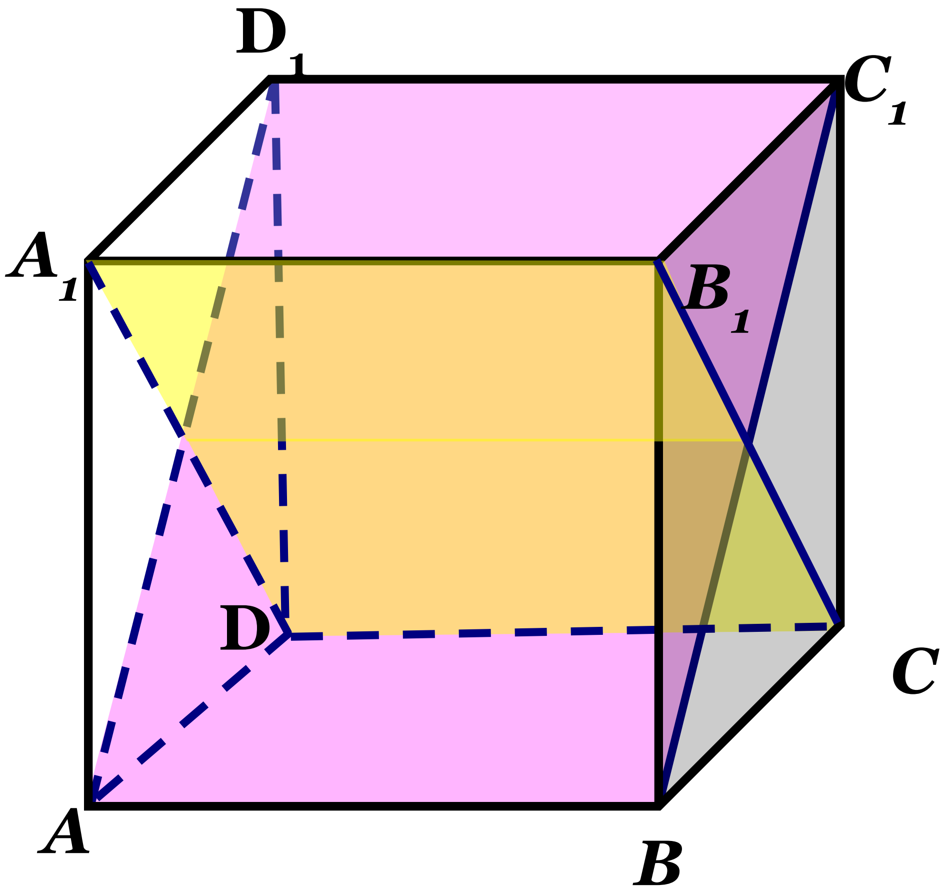
Устно:

Дан куб. Найдите следующие двугранные углы: ABB_1C; б) ADD_1B; в) A_1BB_1K, где К середина ребра $A_1Д_1$



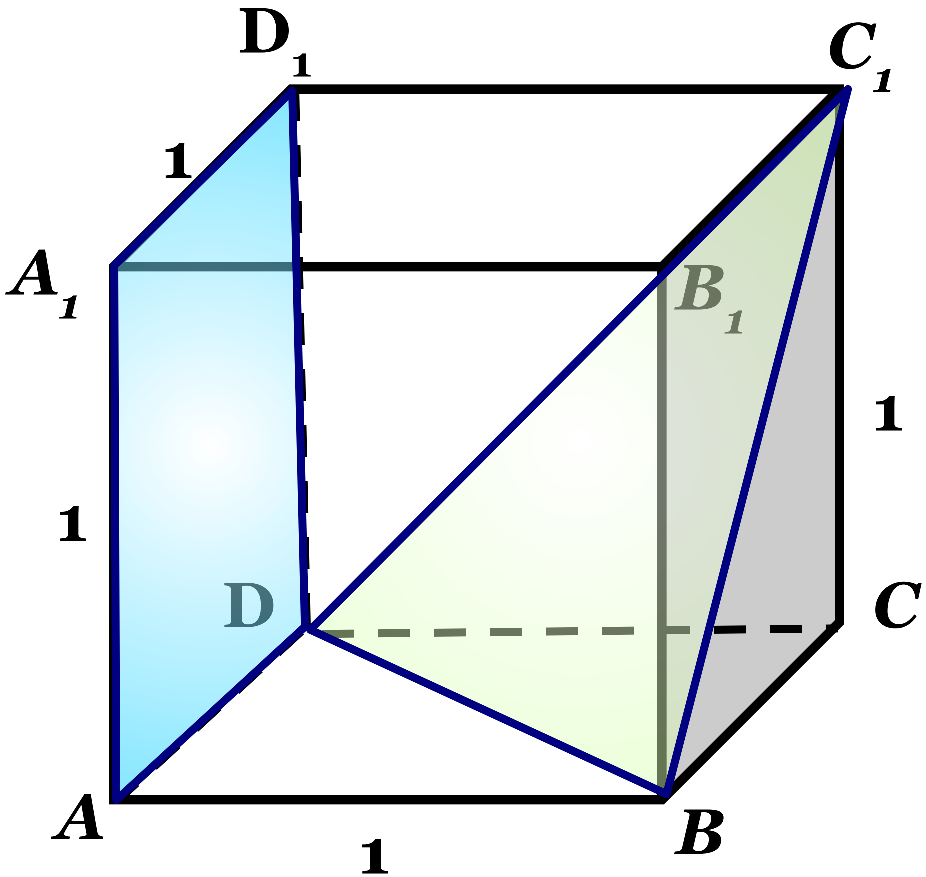
Устно:

В кубе АВСДА$_1$В$_1$С$_1$Д$_1$, Докажите, что плоскости АВС$_1$ и А$_1$В$_1$D перпендикулярны .



№ 1

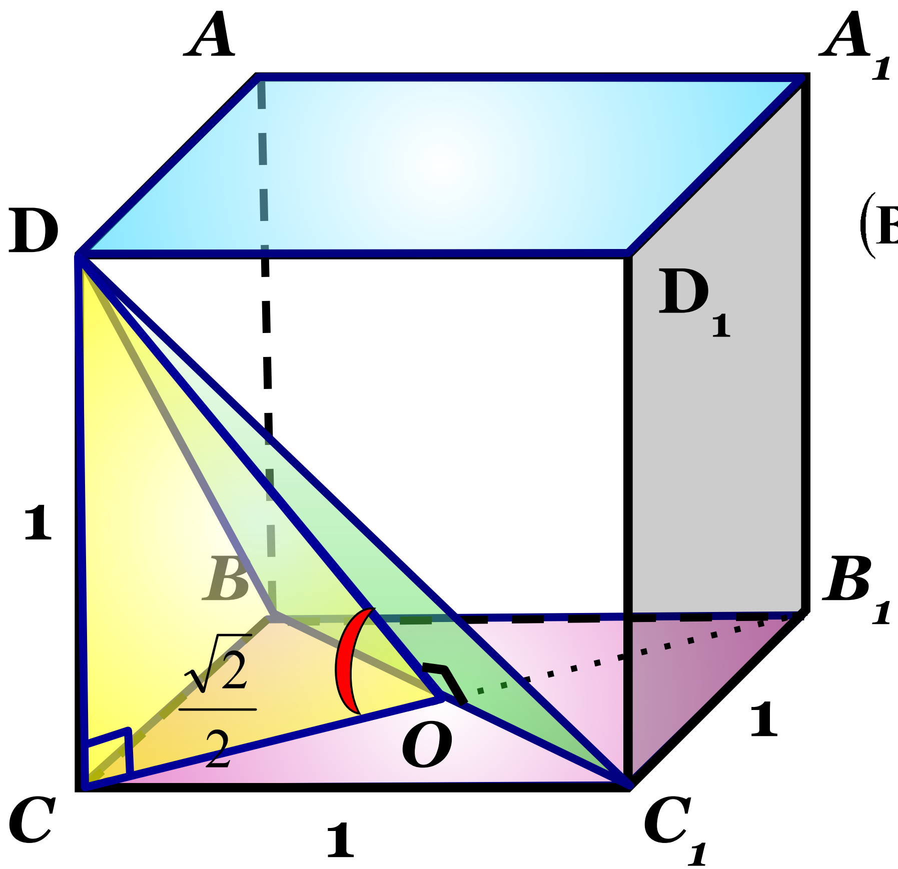
В единичном кубе АВСДА$_1$В$_1$С$_1$Д$_1$ найдите тангенс угла между плоскостями АДД$_1$ и ВДС$_1$.



Задача окажется значительно проще, если расположить куб иначе!!!

№ 1

В единичном кубе $АВСДА_1В_1С_1Д_1$ найдите тангенс угла между плоскостями $АДД_1$ и $ВДС_1$.



1) Плоскость $АДД_1$ параллельна плоскости $ВСС_1$, ⇒ искомый угол равен углом между плоскостями ВСС1 и ВДС1 .

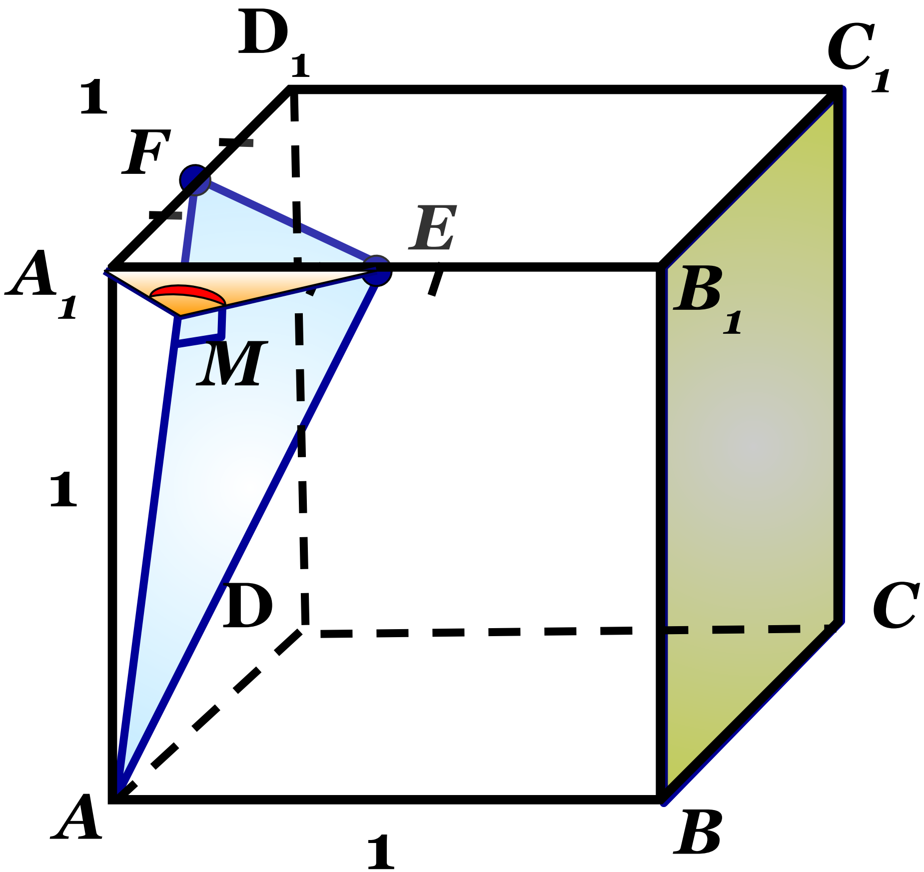
$$\left.\begin{array}{c}(ВСС_1)\cap(ВДС_1)=ВС\\ ОС\perp ВС\\ ОД\perp ВС\end{array}\right\}\Rightarrow \angle ДОС -$$

линейный угол

Ответ: $\frac{\sqrt{}}{2}$

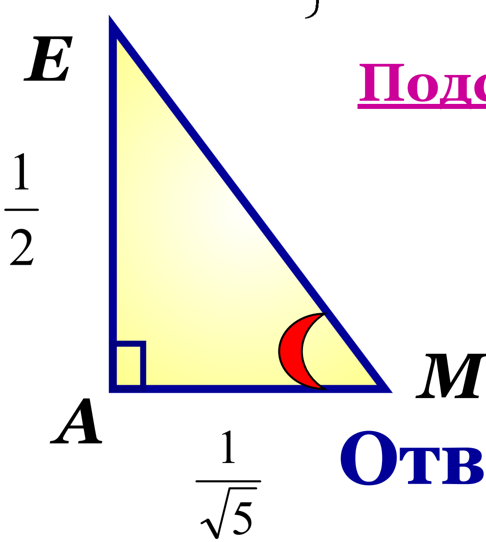
№ 2

В единичном кубе АВСДА$_1$В$_1$С$_1$Д$_1$ точки Е, F – середины ребер соответственно А$_1$В$_1$ и А$_1$Д$_1$. Найдите тангенс угла между плоскостями AEF и ВСС$_1$.



1) Плоскость АДД$_1$ параллельна плоскости ВСС$_1$, ⇒ искомый угол равен углом между плоскостями АДД1 и AEF .

$$\left.\begin{array}{l} (АДД_1)\cap(AEF)=AF \\ EM\perp AF \\ AM\perp AF \end{array}\right\}\Rightarrow\angle AME-\text{линейный угол}$$

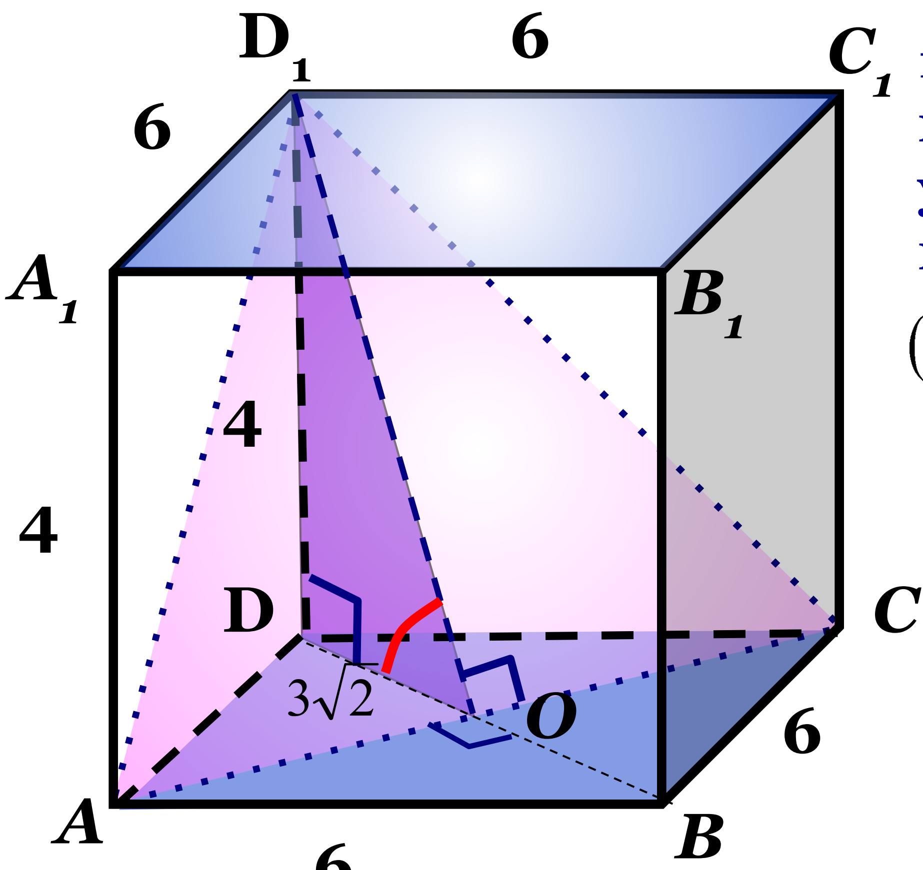


Подсказка:

Ответ: $\frac{\sqrt{\ }}{5\,2}$

№ 3

В прямоугольном параллелепипеде $АВСДА_1В_1С_1Д_1$, у которого АВ = 6, ВС = 6, $СС_1$ = 4, найдите тангенс угла между плоскостями $АСД_1$ и $А_1В_1С_1$.



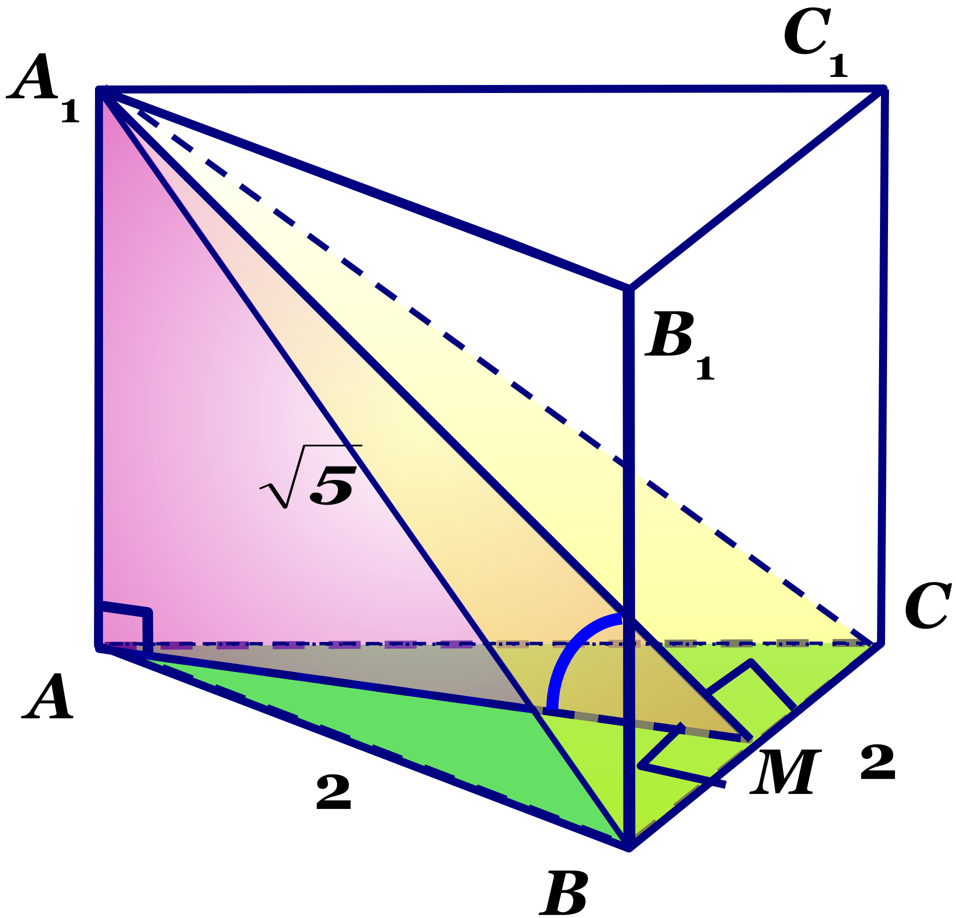
1) Плоскость АВС параллельна плоскости $А_1В_1С_1$, ⇒ искомый угол равен углом между плоскостями $АСД_1$ и $А_1В_1С_1$.

$$\left.\begin{array}{c} (АВС)\cap(АД_1С) = АС \\ Д_1О \perp АС \\ ДО \perp АС \end{array}\right\} \Rightarrow \angle ДОД_1 \text{ – линейный угол}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{\ }}{8 3}$

№ 4

Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 2, а диагональ боковой грани равна $\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостью A_1BC и плоскостью основания призмы.



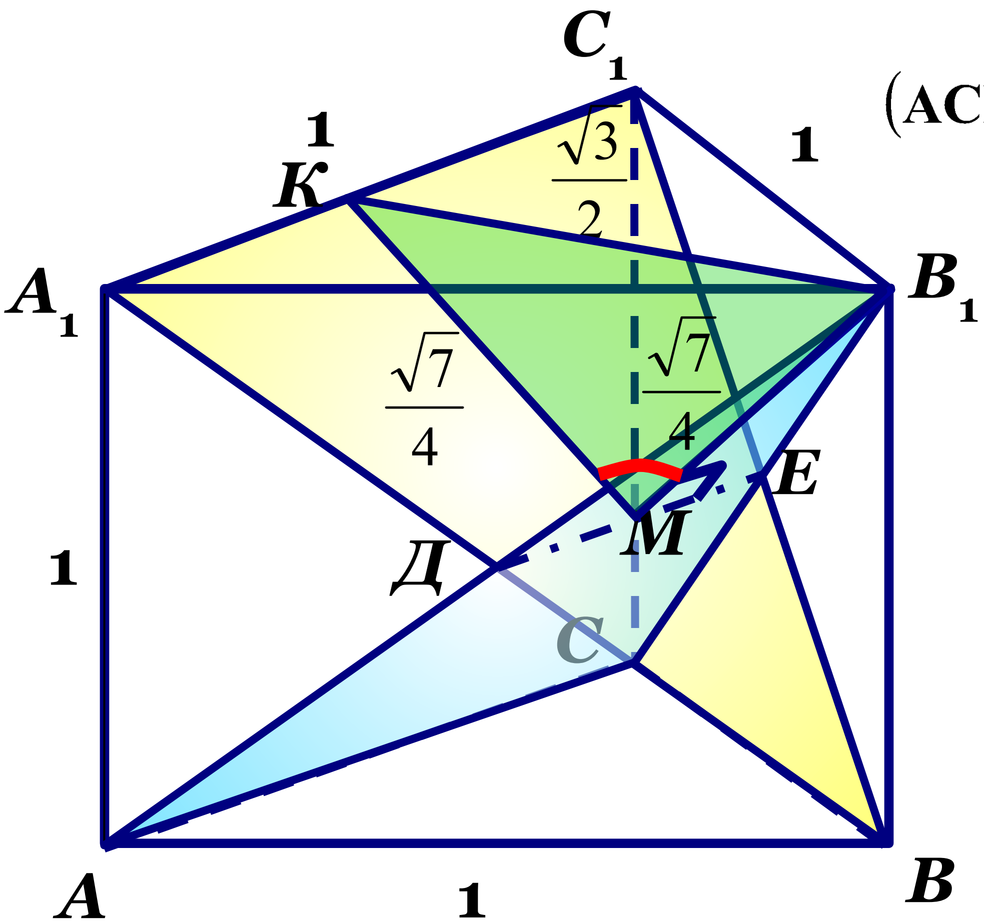
(ДЕМО 2011)

самостоятельно

Ответ: 30°

№ 5

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями ACB_1 и BA_1C_1.



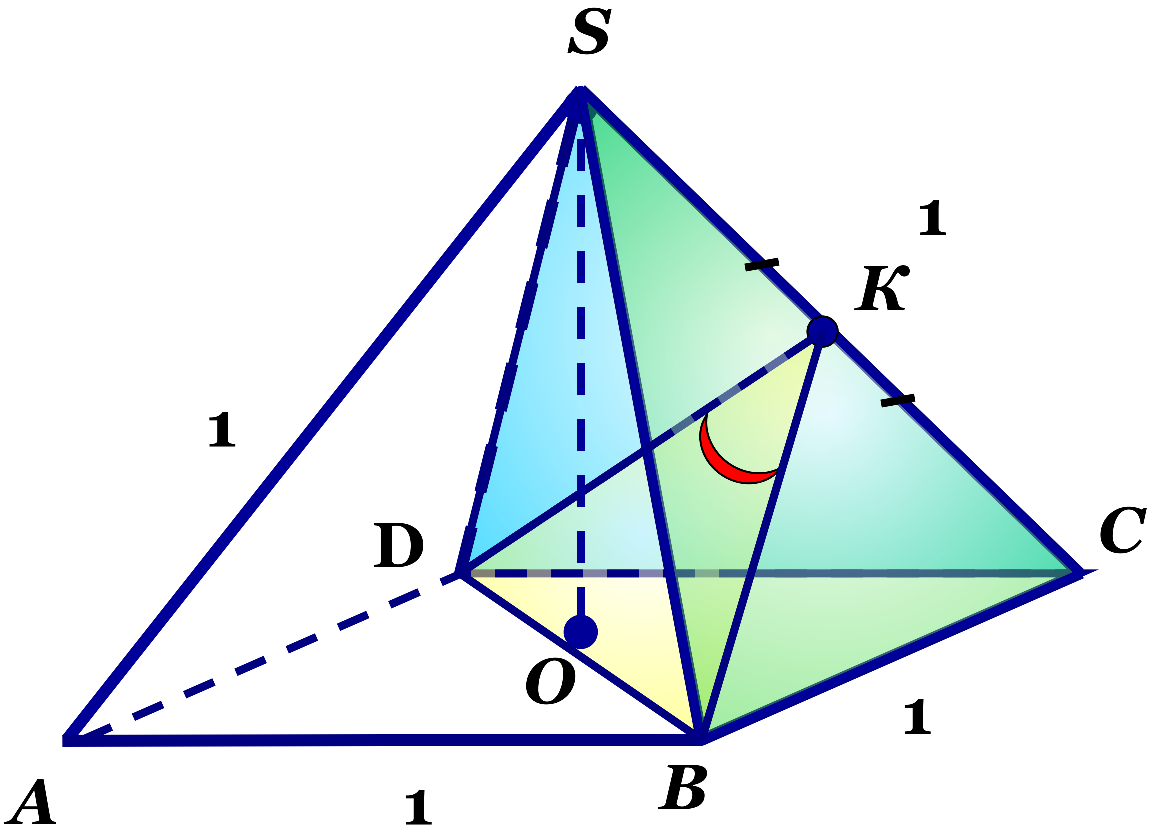
$$\left.\begin{array}{c}(ACB_1)\cap(AB_1C) = ДЕ \\ B_1M \perp ДЕ \\ МК \perp ДЕ\end{array}\right\} \Rightarrow \angle KMB_1 -$$

линейный угол

Ответ: $\frac{1}{7}$

№ 6

В правильной четырехугольной пирамиде SABCД, все ребра которой равны 1. Найдите косинус двугранного угла, образованного гранями SBC и SCD.

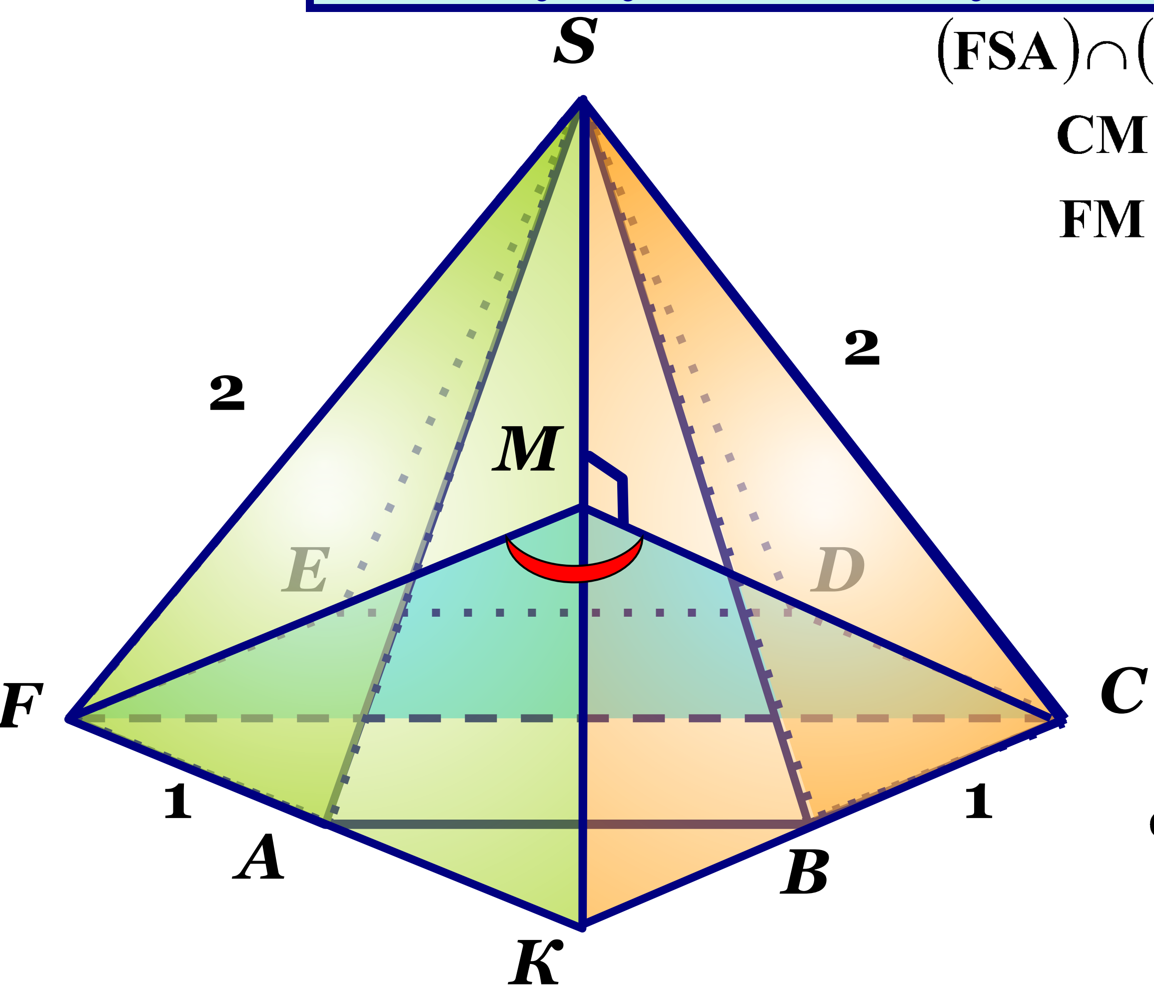


Самостоятельно:

Ответ: $\frac{-1}{3}$

№ 7

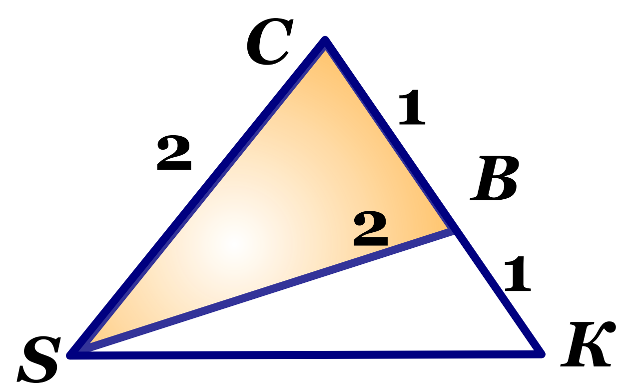
В правильной шестиугольной пирамиде SABCDEF, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между плоскостями SAF и SBC.



$$\left.\begin{array}{r}(FSA)\cap(SBC)=SK\\ CM\perp SK\\ FM\perp SK\end{array}\right\}\Rightarrow \angle CMF -$$

линейный угол

Подсказка:

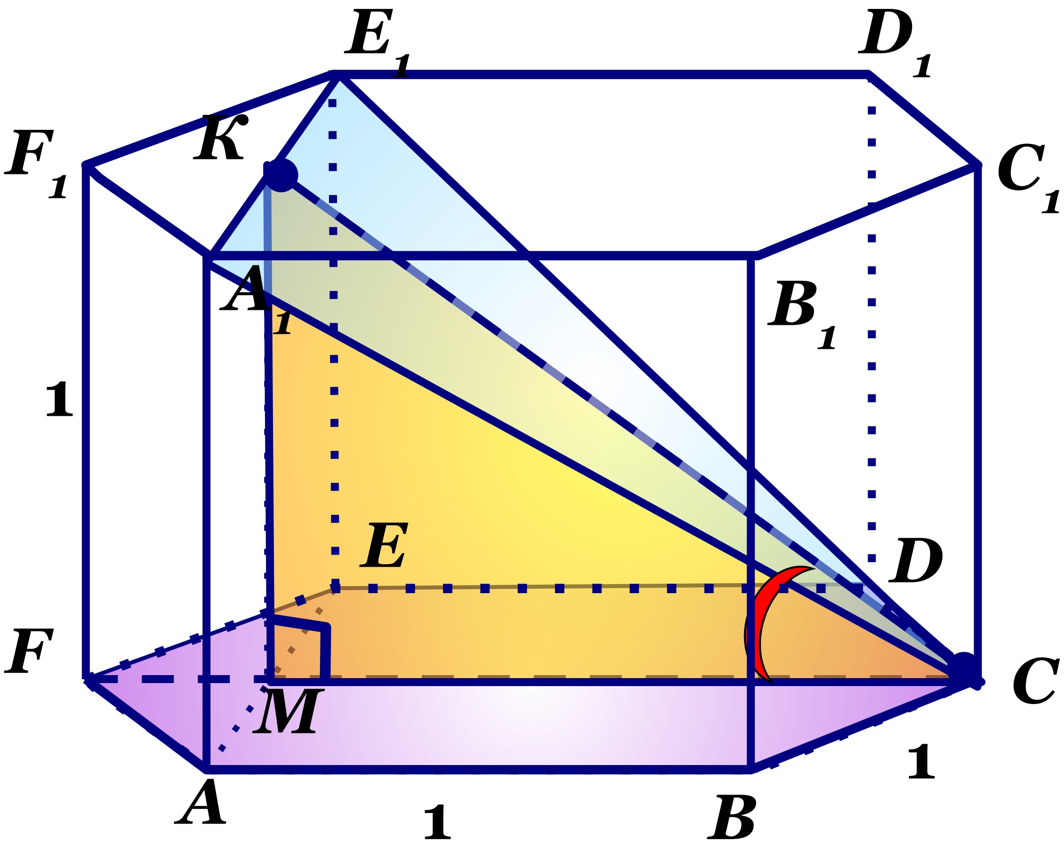


$$\cos\angle C=\frac{1}{4}\ \Rightarrow SK=\sqrt{6}$$

Ответ: 0,2

№ 8

В правильной шестиугольной призме A … F1,
все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и CA_1E_1



Самостоятельно:

Ответ: $\frac{2}{3}$

Литература

1. В.А. Смирнов ЕГЭ 2011. Математика. Задача С2. Геометрия. Стереометрия. / Под. редакцией А.Л. Семенова и И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2011.

2. http://le-savchen.ucoz.ru/