

Решение неравенств

Разработал Рыжих С.А.



Виды неравенств

- **Линейные**

$$kx > b, \quad k \neq 0$$

$$x > \frac{b}{k} \quad \text{если } k > 0$$

$$x < \frac{b}{k} \quad \text{если } k < 0$$

- **Квадратные**

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad (a > 0, a < 0)$$

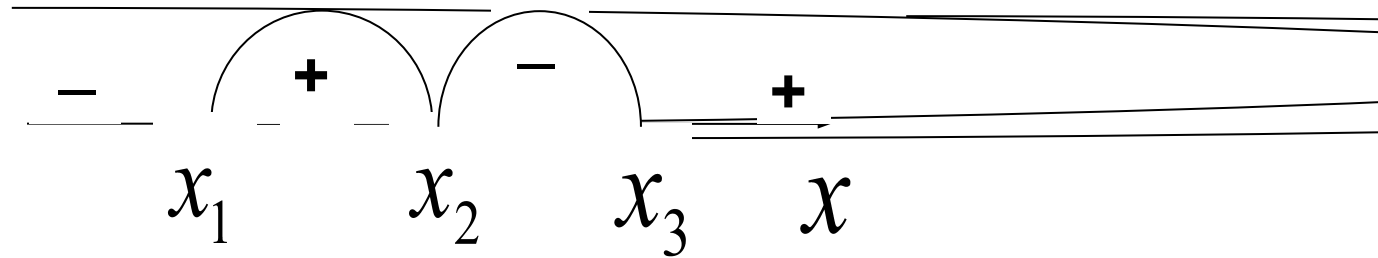
$$\frac{-}{x_1} \quad \frac{-}{x_2} \quad \frac{+}{x}$$



Виды неравенств

- Рациональные

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0$$



Виды неравенств

- Содержащие чётную степень $x^{2n} > b$

$$x < -\sqrt[2n]{b}, \quad x > \sqrt[2n]{b}, \quad \text{если } b > 0$$

$$x < 0, \quad x > 0, \quad \text{если } b = 0$$

$$x \in R, \quad \text{если } b < 0$$

- Содержащие нечётную степень $x^{2n+1} > b$

$$x > \sqrt[2n+1]{b}$$



Виды неравенств

- Иррациональные (корень чётной степени)

$$\sqrt[2n]{x} > b$$

$$x > b^{2n} \quad \text{если } b > 0$$

$$x > 0 \quad \text{если } b = 0$$

$$x \geq 0 \quad \text{если } b < 0$$

- Иррациональные (корень нечётной степени)

$$\sqrt[2n+1]{x} > b$$

$$x > b^{2n+1}$$



Виды неравенств

- Показательные

$$a^x > b \quad \text{если} \quad a > 1$$

$$x > \log_a b \quad \text{если} \quad b > 0$$

$$x \in R \quad \text{если} \quad b < 0$$

$$a^x > b \quad \text{если} \quad 0 < a < 1$$

$$x < \log_a b \quad \text{если} \quad b > 0$$

$$x \in R \quad \text{если} \quad b < 0$$



Виды неравенств

- Логарифмические

$$\log_a x > b \quad \text{если } a > 1 \quad x > a^b$$

$$\log_a x > b \quad \text{если } 0 < a < 1 \quad 0 < x < a^b$$

- Тригонометрические

Решаем неравенства, используя тригонометрическую окружность, либо с помощью графика соответствующей функции



Равносильность неравенств

1. Перенос члена неравенства (с противоположным знаком) из одной части неравенства в другую;
2. Умножение (деление) обеих частей неравенства на положительное число;
3. Применение правил умножения многочленов и формул сокращённого умножения;
4. Приведение подобных членов многочлена;
5. Возведение неравенства в нечётную степень;
6. Логарифмирование неравенства $a^{f(x)} > a^{g(x)}$
т.е замена этого неравенства неравенством



$$f(x) > g(x) \text{ при } a > 1 \quad \text{или} \quad f(x) < g(x) \text{ при } 0 < a < 1$$

Равносильность неравенств на некотором множестве чисел

1. Возведение неравенства в чётную степень;
2. Потенцирование неравенства;
3. Применение некоторых формул (логарифмических, тригонометрических и др.)



Равносильны ли неравенства?

$$x^2 \geq 9 \quad \text{и} \quad (x-3)(x+3) > 0$$

$$\log_3(2-x) > \log_3 x \quad \text{и} \quad 2-x > x$$

$$x^2 > x \quad \text{и} \quad x > 1$$

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} \geq 0 \quad \text{и} \quad x \geq -1$$



Методы решения неравенств

алгебраический

функциональны
й

графический

геометрический



Алгебраические методы решения неравенств

- 1) Сведение неравенства к равносильной системе или совокупности систем
- 2) Метод рационализации
- 3) Метод интервалов



Сведение неравенства к равносильной совокупности систем неравенств

$$\log_{\varphi(x)} f(x) \geq \log_{\varphi(x)} g(x)$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} f(x) \geq g(x) > 0 \\ \varphi(x) > 1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} g(x) \geq f(x) > 0 \\ 0 < \varphi(x) < 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$



Решите неравенство

$$\log_{3x}(42x^2 - 13x + 1) > 0$$

Решение

$$\log_{3x}(42x^2 - 13x + 1) > 0$$

$$\begin{cases} 3x > 1 \\ 42x^2 - 13x + 1 > 0 \\ 42x^2 - 13x + 1 > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < 3x < 1 \\ 42x^2 - 13x + 1 > 0 \\ 42x^2 - 13x + 1 < 1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ 42 \left(x - \frac{1}{6}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{7}\right) > 0 \\ 42x \left(x - \frac{13}{42}\right) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < x < \frac{1}{3} \\ 42 \left(x - \frac{1}{6}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{7}\right) > 0 \\ 42x \left(x - \frac{13}{42}\right) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ x < \frac{1}{7}, \quad x > \frac{1}{6} \\ x < 0, \quad x > \frac{13}{42} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < x < \frac{1}{3} \\ x < \frac{1}{7}, \quad x > \frac{1}{6} \\ 0 < x < \frac{13}{42} \end{cases}$$



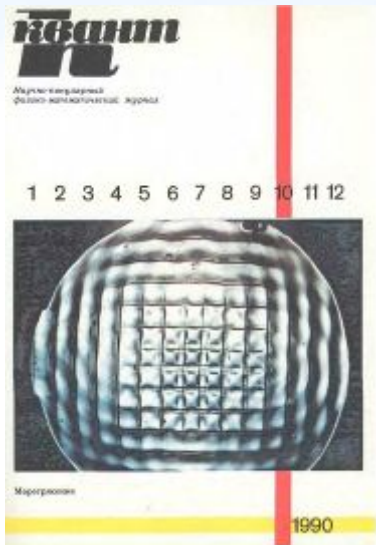
$$x > \frac{1}{3}$$

$$0 < x < \frac{1}{7};$$

$$\frac{1}{6} < x < \frac{13}{42}$$

Метод рационализации

Если



$\log_a b > 0$, то $(a-1) \cdot (b-1) > 0$, т. е. $(a-1)$ и $(b-1)$ — одного знака.

Действительно, если $\log_a b > 0$, то $\log_a b > \log_a 1$.

При $a > 1$ имеем $b > 1$, — утверждение верно.

При $0 < a < 1$ получаем, что $b < 1$, и наше утверждение опять верно, так как $(a-1) < 0$ и $(b-1) < 0$.

Аналогично можно доказать, что если

$\log_a b < 0$, то $(a-1) \cdot (b-1) < 0$



$$\log_{3x}(42x^2 - 13x + 1) > 0$$

$$\begin{cases} 3x > 0 \\ 3x \neq 1 \\ 42x^2 - 13x + 1 > 0 \\ (42x^2 - 13x) \cdot (3x - 1) > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{3} \\ x < \frac{1}{7}; \quad x > \frac{1}{6} \\ 0 < x < \frac{13}{42}; \quad x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

Ответ



$$x > \frac{1}{3}$$

$$0 < x < \frac{1}{7}; \quad \frac{1}{6} < x < \frac{13}{42}$$

Заменяемое выражение	Используемое выражение
$\log_a f(x)$	$(a - 1)(f(x) - 1)$
$\log_a f(x) - 1$	$(a - 1)(f(x) - a)$
$\log_a f(x) - \log_a g(x)$	$(a - 1)(f(x) - g(x))$
$\log_{h(x)} f(x)$	$(h(x) - 1)(f(x) - 1)$
$\log_{h(x)} f(x) - 1$	$(h(x) - 1)(f(x) - h(x))$
$\log_{h(x)} f(x) - \log_{h(x)} g(x)$	$(h(x) - 1)(f(x) - g(x))$

Решите неравенство $\log_{2x+3} x^2 < 1$



Решите неравенство

$$\log_{2x+3} x^2 < 1$$



$$\log_{2x+3} x^2 < 1$$

Решение.

$$\log_{2x+3} x^2 - 1 < 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (2x + 3 - 1)(x^2 - 2x - 3) < 0 \\ 2x + 3 > 0 \\ 2x + 3 \neq 1 \\ x^2 > 0 \end{array} \right.$$



$$\begin{cases} (2x + 2)(x^2 - 2x - 3) < 0 \\ 2x + 3 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x + 1)(x + 1)(x - 3) < 0 \\ x > -1,5 \\ x \neq 0 \end{cases}$$



Ответ: $(-1,5; -1) \sqcup (-1; 0) \sqcup (0; 3)$

$\log_h f \vee \log_h g$	$(h-1)(f-g) \vee 0$
$\log_h f \vee 1$	$(h-1)(f-h) \vee 0$
$\log_h f \vee 0$	$(h-1)(f-1) \vee 0$
$\log_h f \cdot \log_p g \vee 0$	$(h-1)(f-1)(p-1)(g-1) \vee 0$
$\log_h f + \log_h g \vee 0$	$(h-1)(fg-1) \vee 0$
$h^f \vee h^g$	$(h-1)(f-g) \vee 0$
$h^f \vee 1$	$(h-1) \cdot f \vee 0$
$f^h \vee g^h$	$(f-g) \cdot h \vee 0$
$\sqrt{f} \vee \sqrt{g}$	$f \vee g$
$ f \vee g $	$(f-g)(f+g) \vee 0$



Метод интервалов

Алгоритм решения:

- 1) Преобразовать неравенство так, чтобы в правой части неравенства был ноль
- 2) Левую часть неравенства рассмотреть как функцию, найти область определения и нули функции
- 3) Расположить нули функции в порядке возрастания на числовой прямой, учитывая область определения
- 4) Определить знаки функции на каждом интервале
- 5) Рассматривая рисунок записать ответ



Решим методом интервалов

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{(x - 7)(x + 5)} \geq 0$$



Решение

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

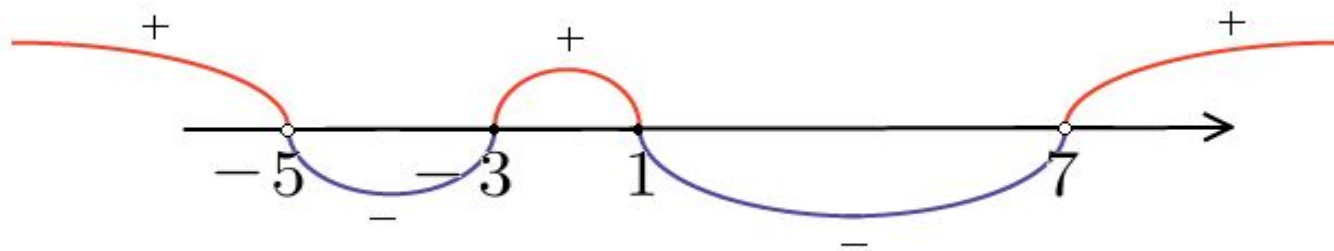
x_1 и x_2 - корни квадратного уравнение

$$\frac{(x - 1)(x + 3)}{(x - 7)(x + 5)} \geq 0$$



Рисуем ось X и расставляем точки, в которых числитель и знаменатель обращаются в нуль





Ответ: $(-\infty; -5) \cup [-3; 1] \cup (7; +\infty)$

