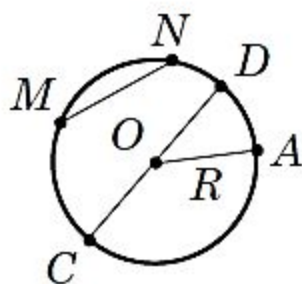


## Окружность и круг



**Окружность** — множество точек плоскости, расстояние от которых до данной точки (центра окружности) одинаково.  
 $O$  — центр окружности.

**Радиус окружности** — расстояние от центра до точки на окружности.

$OA, OC, OD$  — радиусы.

Обозначается  $R$  или  $r$ .

**Хорда** — отрезок, соединяющий две точки на окружности.

$MN, CD$  — хорды.

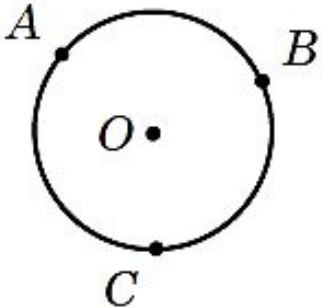
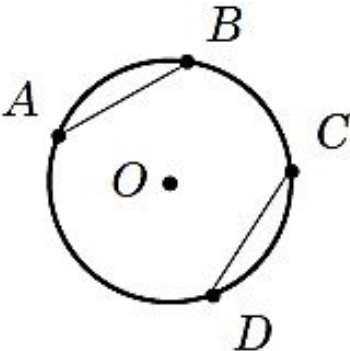
**Диаметр** — хорда, проходящая через центр (обозначается  $D$  или  $d$ ).

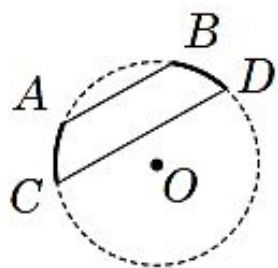
$D = 2R, CD = 2OA$



**Круг** — множество точек плоскости, расстояние до которых от данной точки (центра круга) не превышает данного расстояния (радиуса круга)

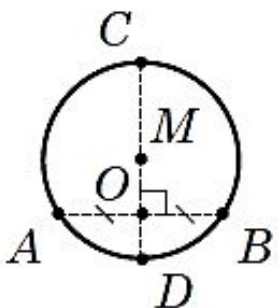
## Окружность, хорды и дуги

	<p>Дуга окружности — часть окружности, ограниченная двумя её точками. <math>\cup AB</math>, <math>\cup BC</math>, <math>\cup AC</math></p>
<b>Свойства</b>	
	<p>Равные дуги стягивают равные хорды. Если <math>\cup AB = \cup CD</math>, то <math>AB = CD</math>. Равные хорды стягивают равные дуги. Если <math>AB = CD</math>, то <math>\cup AB = \cup CD</math></p>



Параллельные хорды отсекают от окружности равные дуги.

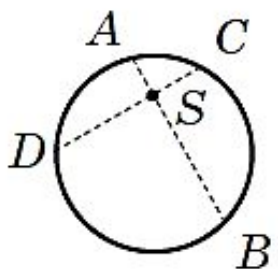
Если  $AB \parallel CD$ , то  $\cup AC = \cup BD$



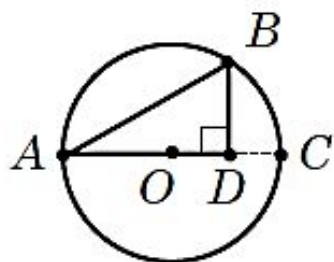
$CD$  — диаметр,  $AB$  — хорда.

Если  $CD \perp AB$ , то  $AM = MB$ ;

если  $AM = MB$ , то  $CD \perp AB$



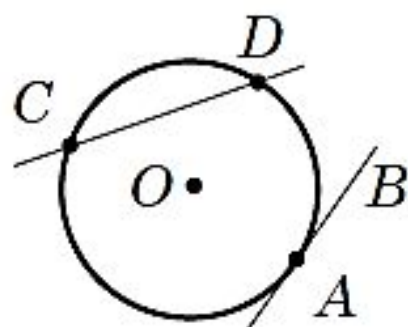
Если хорды  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $S$ , то  $AS \cdot SB = CS \cdot SD$



Если  $AB$  — хорда,  $AC$  — диаметр,  
 $BD \perp AC$ ,

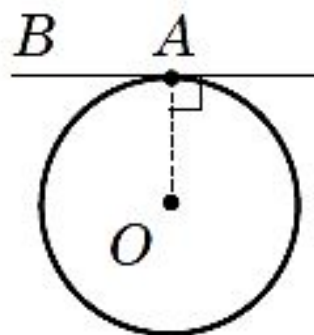
то  $AB^2 = AD \cdot AC$ ;  $BD^2 = AD \cdot DC$

## Окружность, касательные и секущие

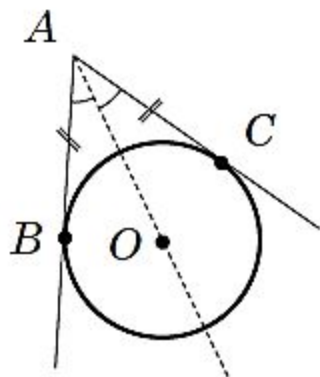


**Касательная** — прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку.  
 $AB$  — касательная.  
**Секущая** — прямая, имеющая с окружностью две общие точки.  
 $CD$  — секущая

### Свойства



$OA \perp AB$   
Касательная перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания

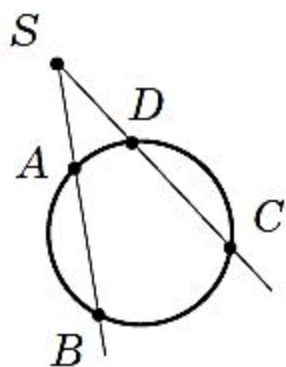


$$AB = AC$$

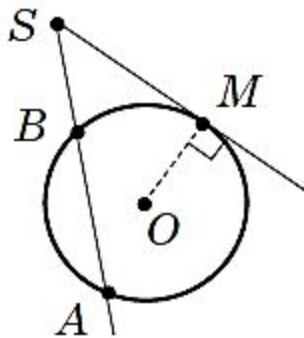
$OA$  — биссектриса  $\angle BAC$ .

Если из одной точки к окружности проведены две касательные, то:

- а) отрезки касательных равны;
- б) биссектриса угла между касательными проходит через центр окружности



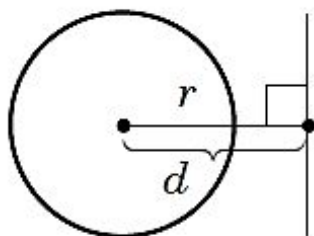
Если  $SB$  и  $SC$  — секущие,  
то  $SA \cdot SB = SD \cdot SC$



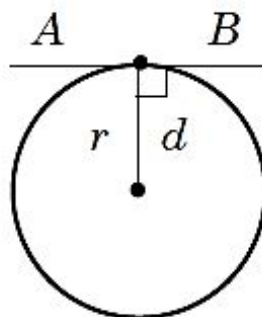
Если  $SM$  — касательная,  $SA$  — секущая,  
то  $SM^2 = SB \cdot SA$

# Взаимное расположение прямой и окружности

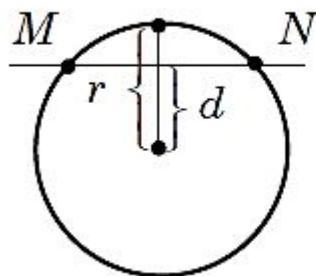
$d$  — расстояние от центра окружности до прямой,  
 $r$  — радиус окружности



$d > r$   
Общих точек нет



$d = r$   
Одна общая точка  
 $AB$  — касательная

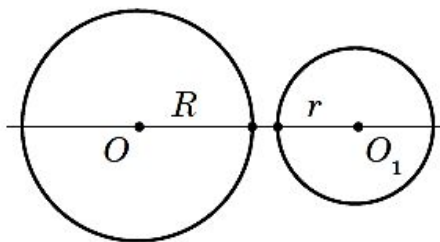


$d < r$   
Две общие точки  
 $MN$  — секущая

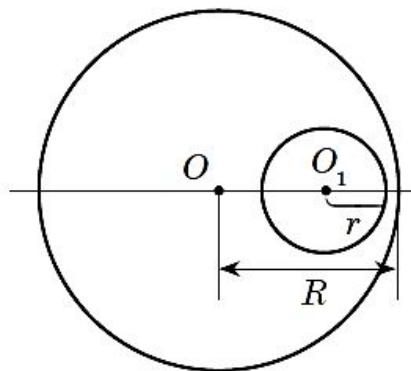
# Взаимное расположение двух окружностей

$OO_1$  — расстояние между центрами,  $R$  и  $r$  — радиусы окружностей ( $R > r$ )

## Окружности не имеют общих точек

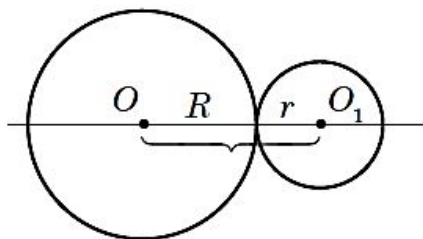


Окружности лежат одна вне другой  
 $R+r < OO_1$

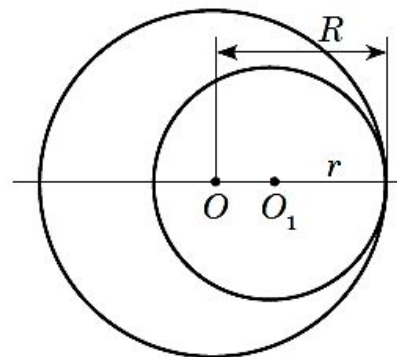


Одна окружность лежит внутри другой  
 $OO_1 < R-r$

## Окружности касаются (одна общая точка)



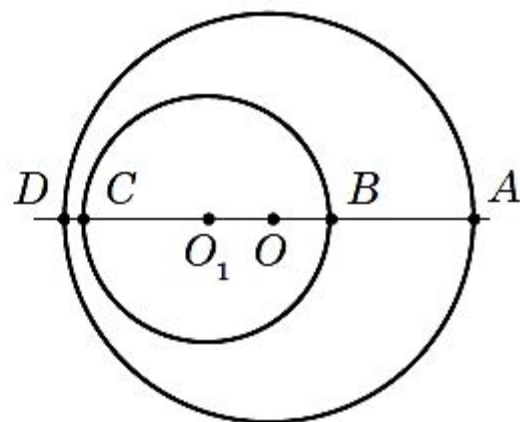
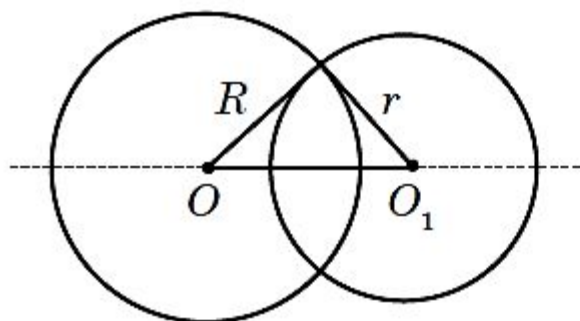
Касаются внешне  
 $OO_1 = R+r$



Касаются внутренне  
 $OO_1 = R-r$

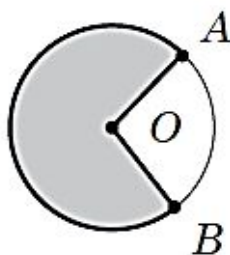
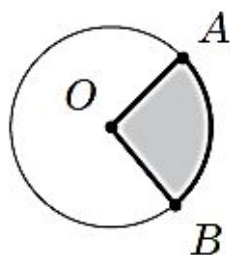
Окружности пересекаются (две общие точки)

$$R-r < OO_1 < R+r$$



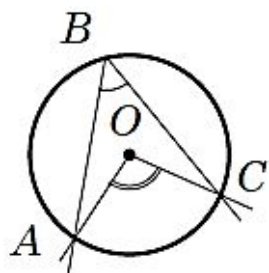


## Углы в окружности



**Центральный угол** —  
плоский угол с вершиной  
в центре окружности.  
 $\angle AOB$  — центральный угол.  
 $\angle AOB = \cup AB$ .

Центральный угол измеряется ду-  
гой, на которую он опирается



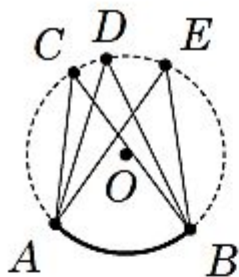
**Вписанный угол** — угол, верши-  
на которого лежит на окружности,  
а стороны пересекают её.

$\angle ABC$  — вписанный.

Вписанный угол равен половине  
дуги, на которую он опирается,  
и половине центрального угла, опи-  
рающегося на ту же дугу:

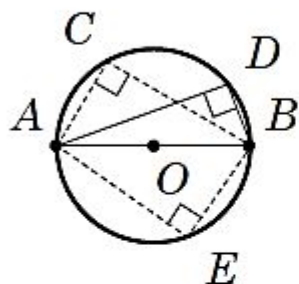
$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$$

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC$$



Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны между собой.

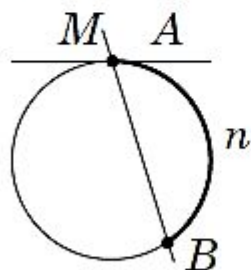
$$\angle ACB = \angle ADB = \angle AEB$$



Вписанные углы, которые опираются на диаметр, прямые.

$$\angle ACB = \angle ADB = \angle AEB = 90^\circ$$

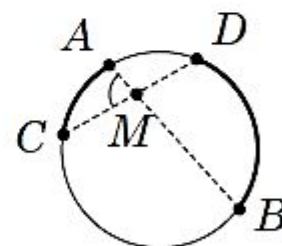
Угол между касательной и секущей



MA — касательная;  
MB — секущая

$$\angle AMB = \frac{1}{2} \cup MnB$$

Угол между хордами

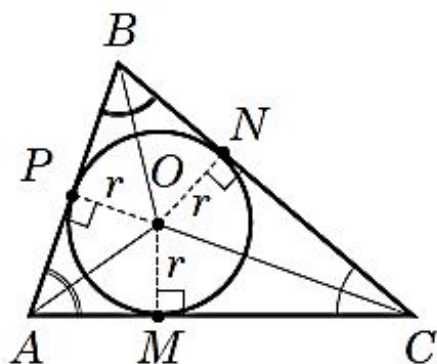


AB и CD — хорды

$$\angle AMC = \frac{1}{2} (\cup AC + \cup BD)$$

Окружность, вписанная в треугольник,  
и окружность, описанная около треугольника

### Вписанная окружность



Окружность называется вписанной в треугольник, если она касается всех его сторон.

Центр этой окружности — точка пересечения биссектрис углов треугольника.

$$r = \frac{2S}{a+b+c} \text{ или } r = \frac{S}{p},$$

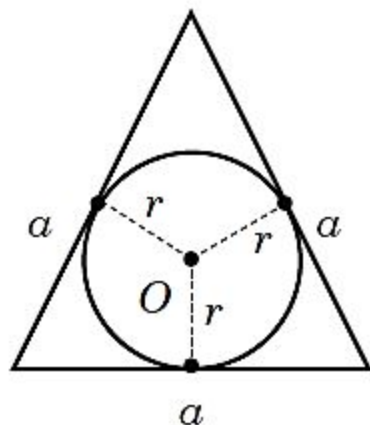
$$\text{где } p = \frac{a+b+c}{2},$$

$S$  — площадь треугольника,

$p$  — полупериметр,

$a, b, c$  — длины сторон

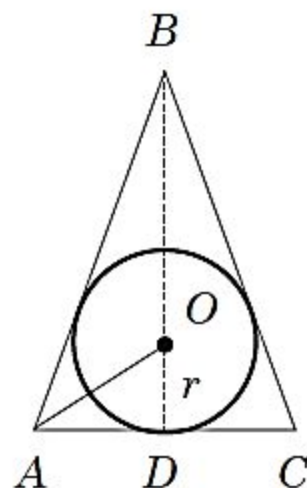
Равно-  
сторонний  
треугольник



$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

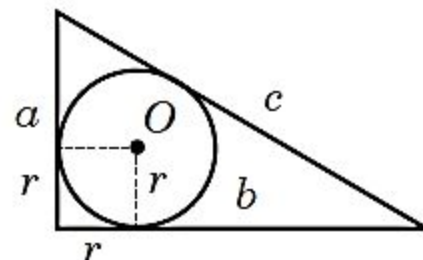
Точка  $O$  — центр вписанной и описанной окружности, точка пересечения биссектрис, медиан, высот

Равно-  
бедренный  
треугольник



$AB = BC$   
 $BD$  — высота,  
медиана, биссек-  
триса, высота.  
 $OD = r$

Прямо-  
угольный  
треугольник

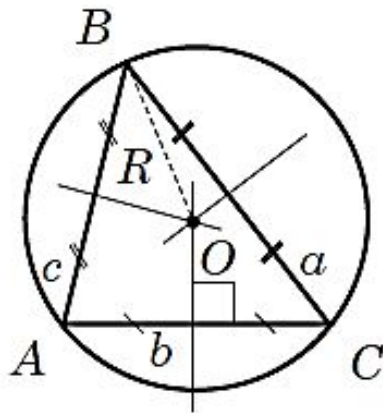


$a$  и  $b$  — катеты,  
 $c$  — гипотенуза

$$r = \frac{a + b - c}{2}$$

$a + b = 2R + 2r$ ,  
 $R$  — радиус  
описанной  
окружности

## Описанная окружность



Окружность называется описанной около треугольника, если она проходит через все его вершины.

Центр этой окружности — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

$$OA = OB = OC = R$$

В произвольном треугольнике:  $R = \frac{abc}{4S}$ ;  $R = \frac{a}{2\sin A}$ .

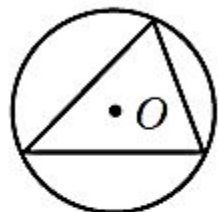
В равностороннем треугольнике:  $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

В прямоугольном треугольнике:  $R = \frac{c}{2}$ ,

где  $c$  — гипотенуза треугольника

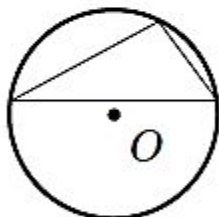
**Положение точек описанной окружности  
в зависимости от вида треугольника**

**Остроугольный**



Центр — во внутренней области  
треугольника

**Тупоугольный**



Центр — вне области треугольника

**Прямоугольный**



$$R = \frac{c}{2} = m_c$$

Центр — совпадает  
с серединой гипотенузы