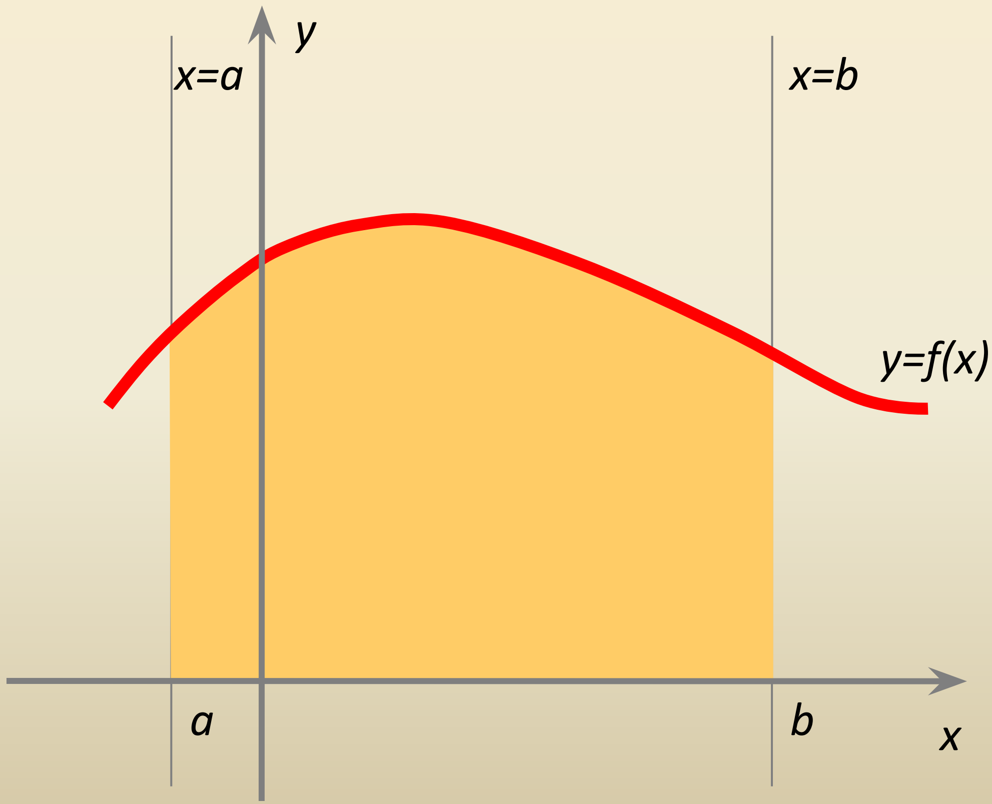
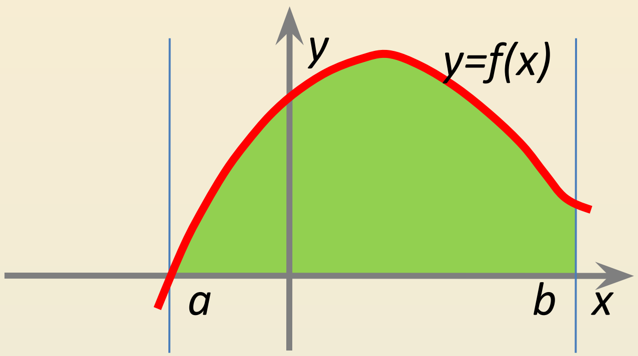
Определённый интеграл

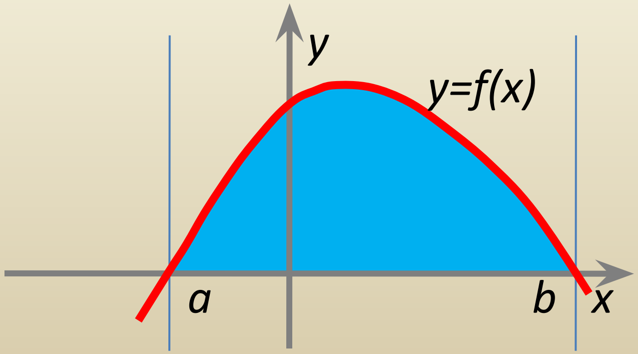
Алгебра

Понятие о криволинейной трапеции

Фигура, ограниченная неотрицательной на отрезке *[a; b]* функцией *y=f(x)* и прямыми *y=0, x=a, x=b* называется *криволинейной трапецией*







Задачи, приводящие к понятию определённого интеграла

Решение различных задач привело к одной и той же математической модели:

Для функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$:

1. ***Разбить отрезок $[a;b]$ на n равных частей***

2. ***Составить сумму $S_n = f(x_0)\cdot\Delta x_0 + \ldots + f(x_n)\cdot\Delta x_n$***

3. ***Вычислить предел этой суммы при $n \to \infty$***

Понятие определённого интеграла

Предел такой суммы называют
определённым интегралом **по отрезку *[a;b]*:**

Стилизованная буква *S* (сумма)

$$\int_a^b f(x)dx$$

Напоминание о слагаемых вида $f(x_n)\Delta x_n$

Геометрический и физический смысл определённого интеграла

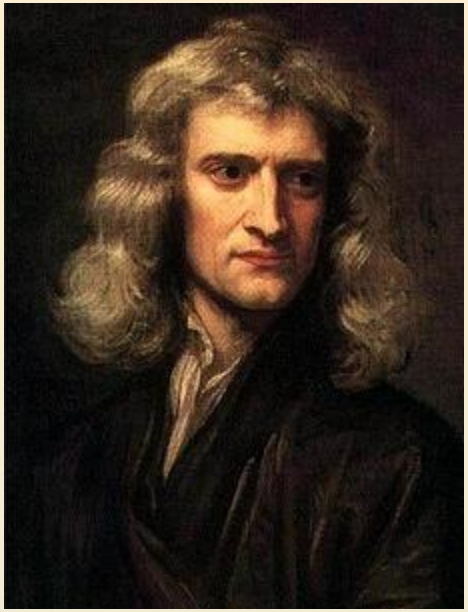
Геометрический смысл интеграла: $S = \int_a^b f(x)dx$

Физический смысл интеграла:

$$s = \int_a^b v(t)dt$$

$$m = \int_a^b p(x)dx$$

Формула Ньютона-Лейбница



Исаак Ньютон
1642-1727

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где F(x) – первообразная для функции f(x)

Или $$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$$

Готфрид Лейбниц
1646-1716

Вычисление определённого интеграла

Формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Примеры вычисления определённых интегралов

21.4б $\displaystyle\int_{-2}^{\frac{1}{3}} \frac{2dx}{\sqrt{10-3x}}$

21.8в $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2\sin\frac{x}{3}\,dx$

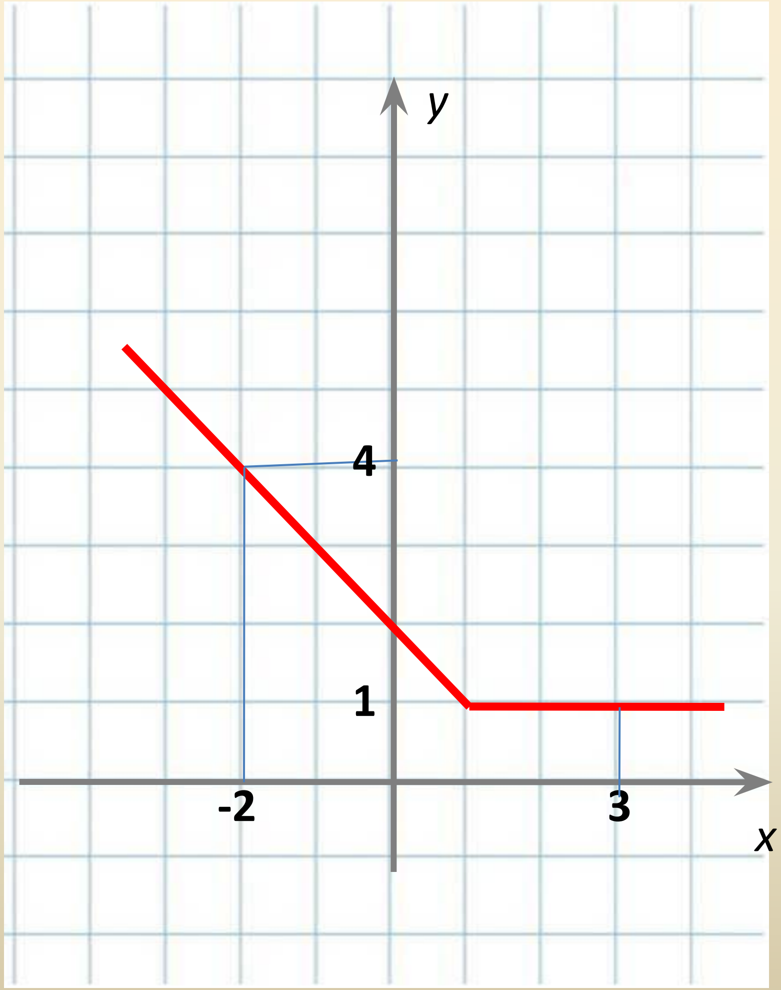
21.16а $\displaystyle\int_{0}^{4} e^{0,5x-1}\,dx$

Геометрический смысл определённого интеграла

21.24а

Вычислить интеграл $\int_{-2}^{3} f(x)dx,$

если график функции ***y=f(x)*** **изображён на рисунке**

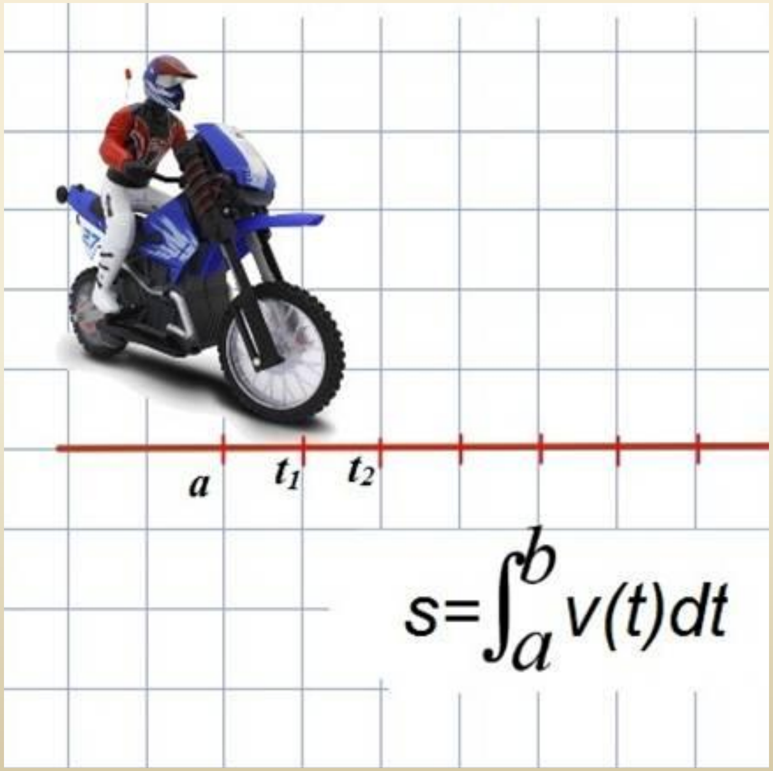


Ответ: ***9,5***

Физический смысл определённого интеграла

21.40а **Материальная точка движется по прямой со скоростью, определяемой формулой** $v = 3t^2-4t+1$, ***(время измеряется в секундах, скорость – в сантиметрах в секунду).***

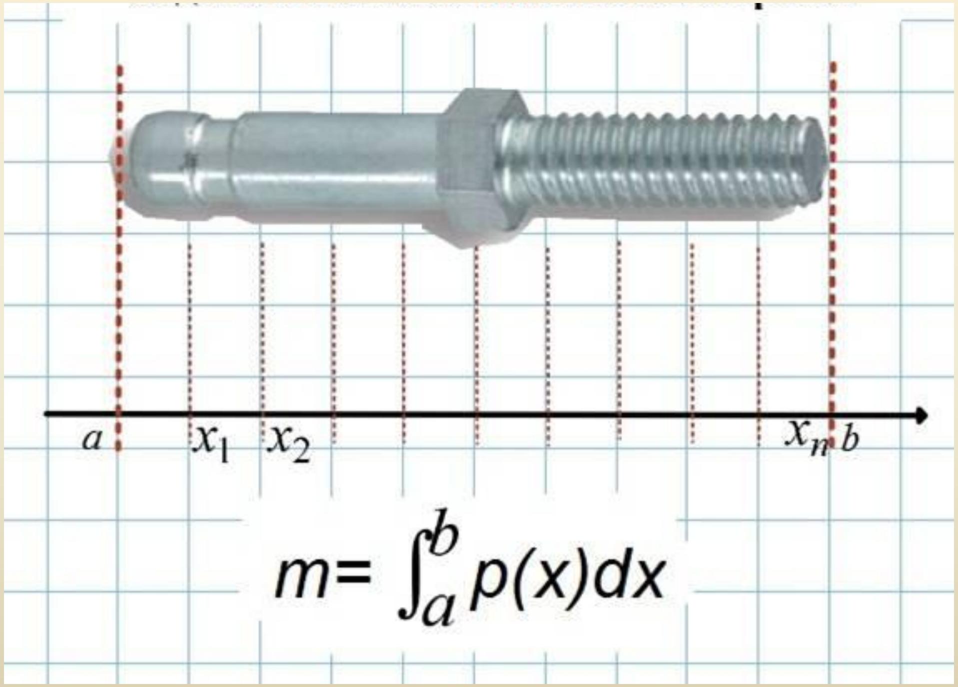
Какой путь пройдёт точка за 3 секунды, считая от начала движения (t=0)?



Ответ: *12см*

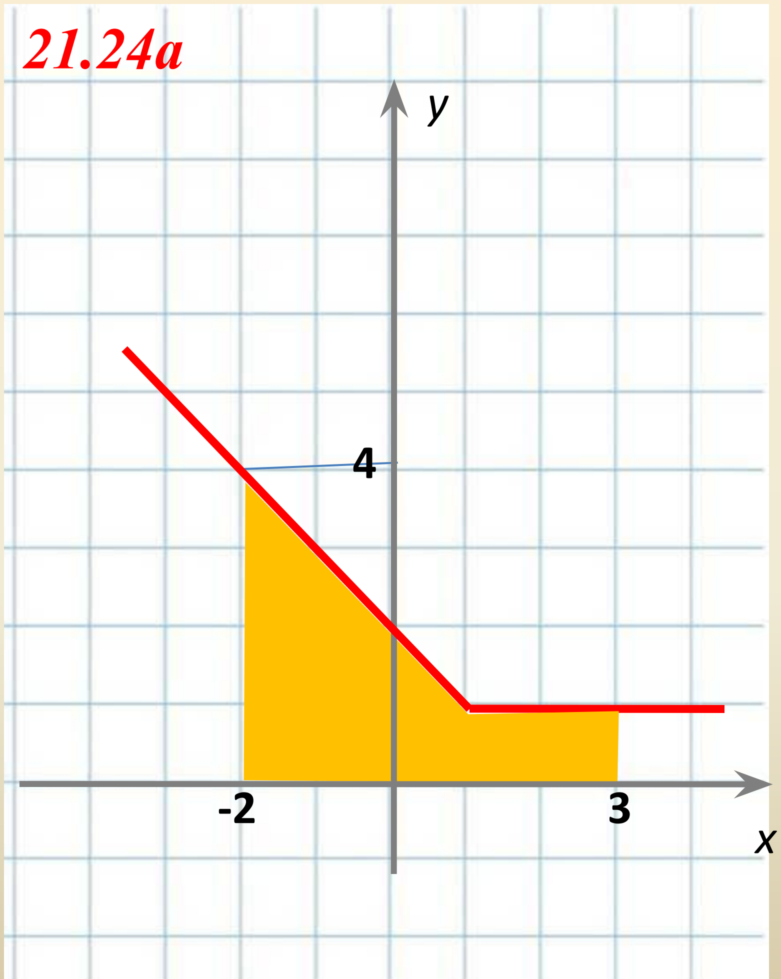
Физический смысл определённого интеграл

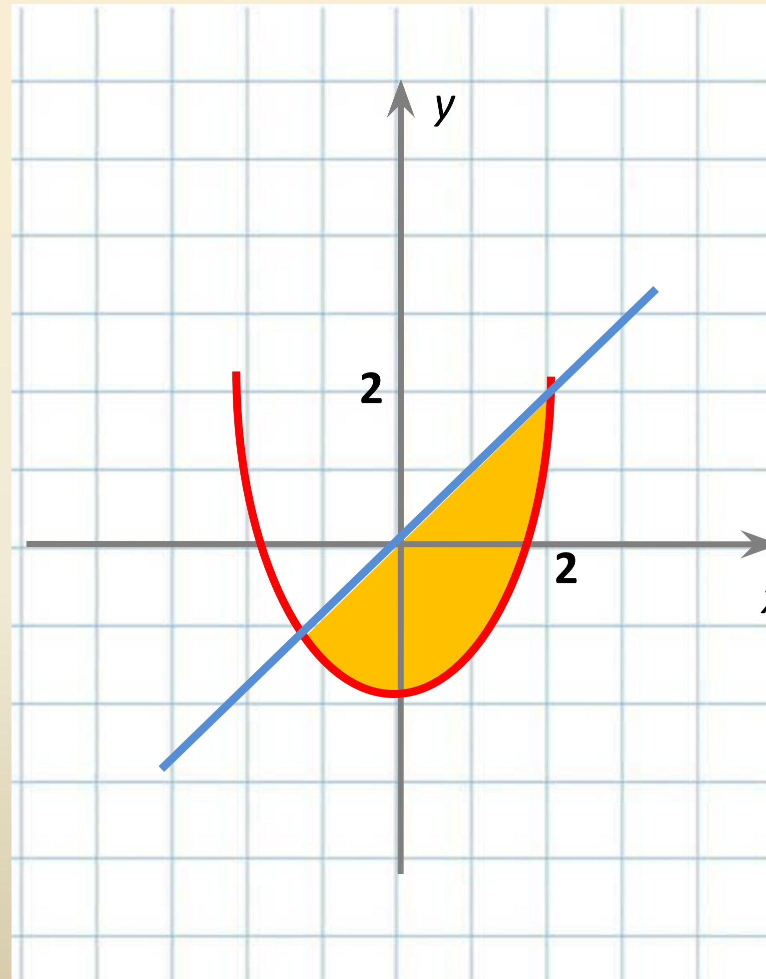
***21.42а* Дан прямолинейный неоднородный стержень *[0;6]*, его плотность в точке *x* определяется по формуле p(x) = x^2+x+1. Найдите массу стержня.**



Ответ: *96*

Вычисление площадей фигур с помощью определённого интеграла



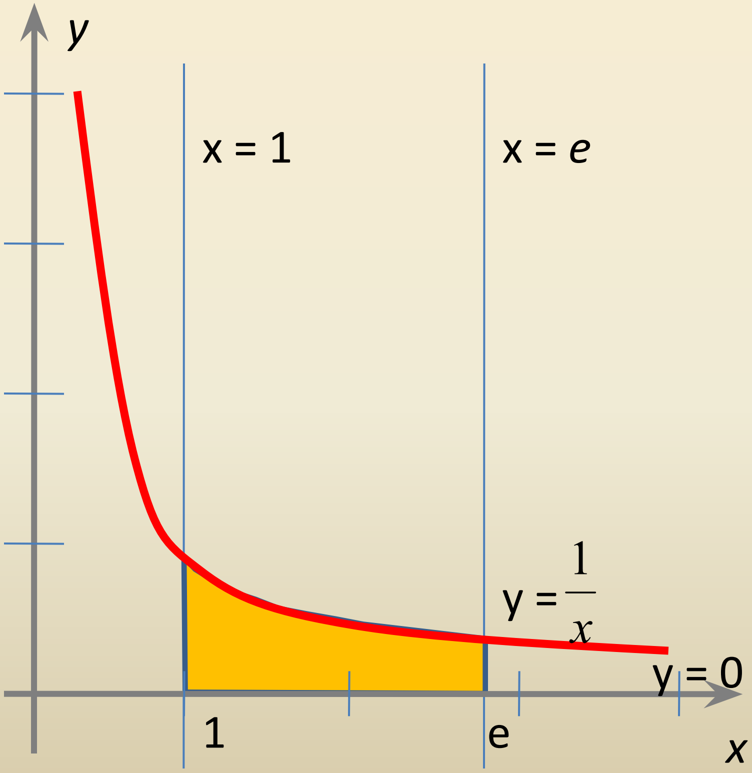


Вычисление площади криволинейной трапеции

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = 0,\ y = \frac{1}{x},\ x = 1,\ x = e.$

$$S = \int_1^e \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$$

Ответ: ***S = 1***



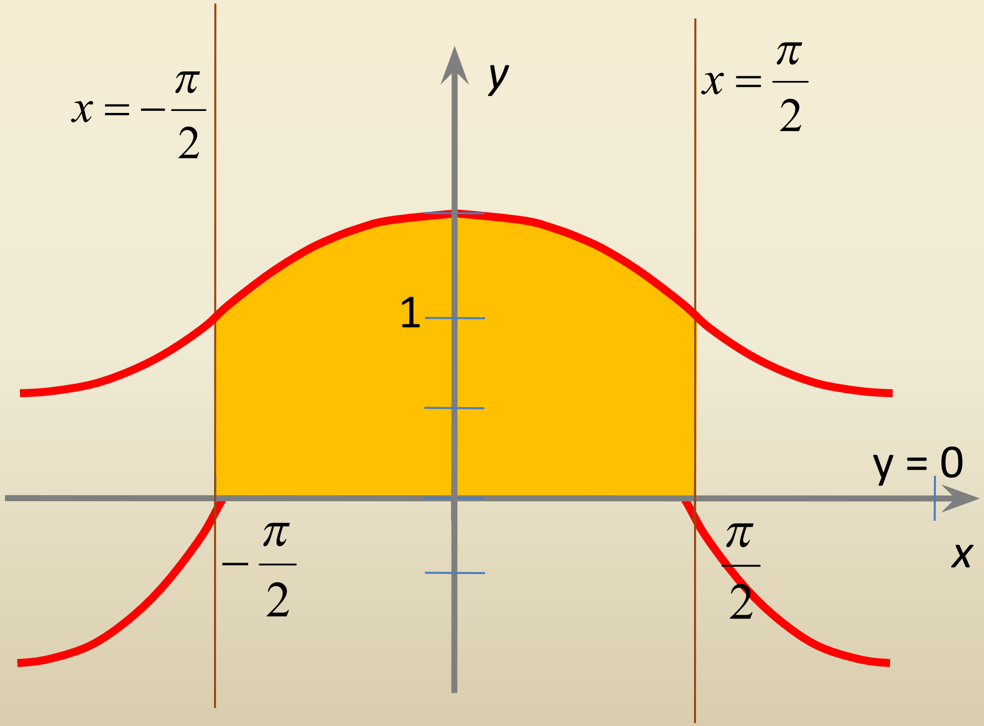
Вычисление площади криволинейной трапеции

21.47a **Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:**

$$y = 1 + \frac{1}{2}\cos x, y = 0, x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2}$$

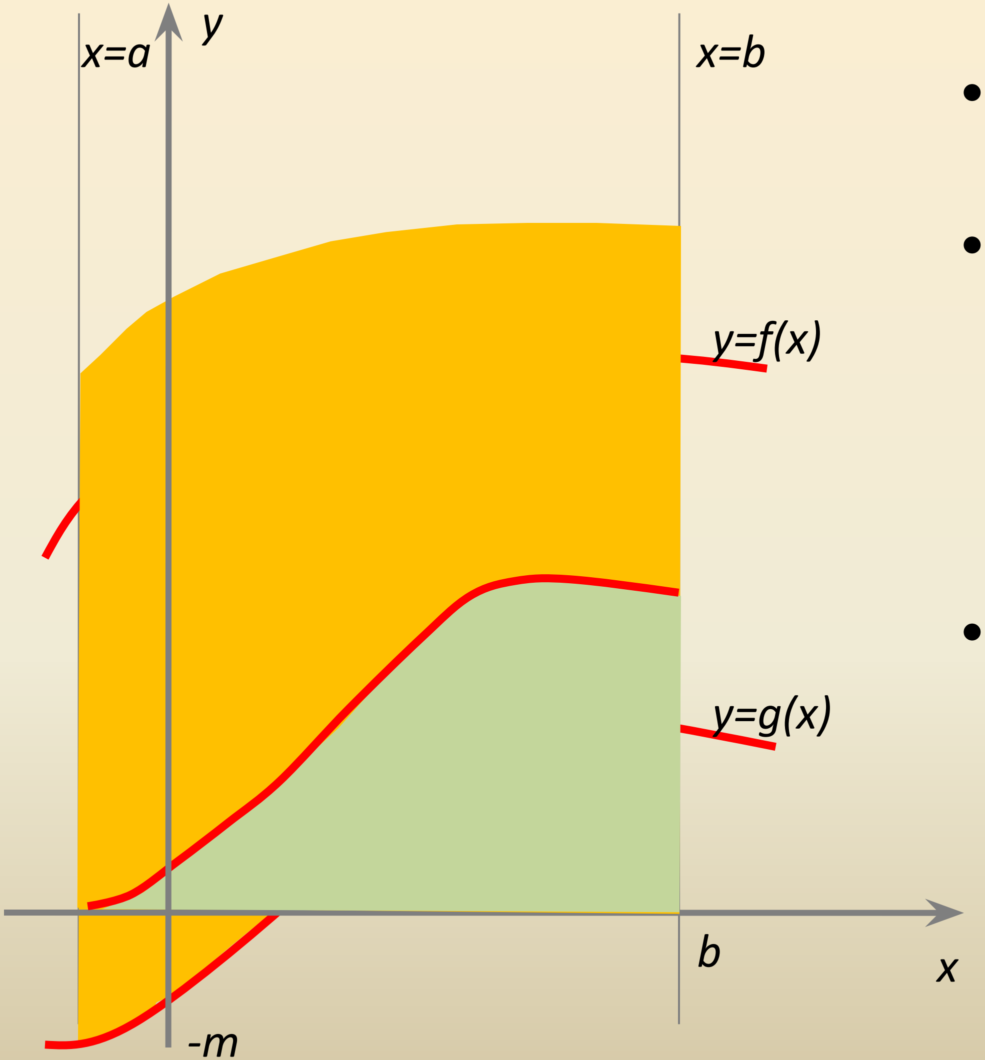
$$S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \frac{1}{2}\cos x)dx =$$

$$= (x + \frac{1}{2}\sin x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi + 1$$



Ответ: ***S = π+1***

Вычисление площадей плоских фигур



- **Перенесём фигуру выше оси абсцисс на *m* единиц**
- **Площадь фигуры равна разности площадей криволинейных трапеций**

$$S = \int_a^b (f(x) + m)dx - \int_a^b (g(x) + m)dx$$

- **Или:**

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Вычисление площадей плоских фигур

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями y=x-2 и $y=x^2-4x+2$

1. $y=x^2-4x+2$, $x_в=2$, $y_в=-2$
2. y=x-2: x=0, y=-2; x=2, y=0
3. Абсциссы точек пересечения:

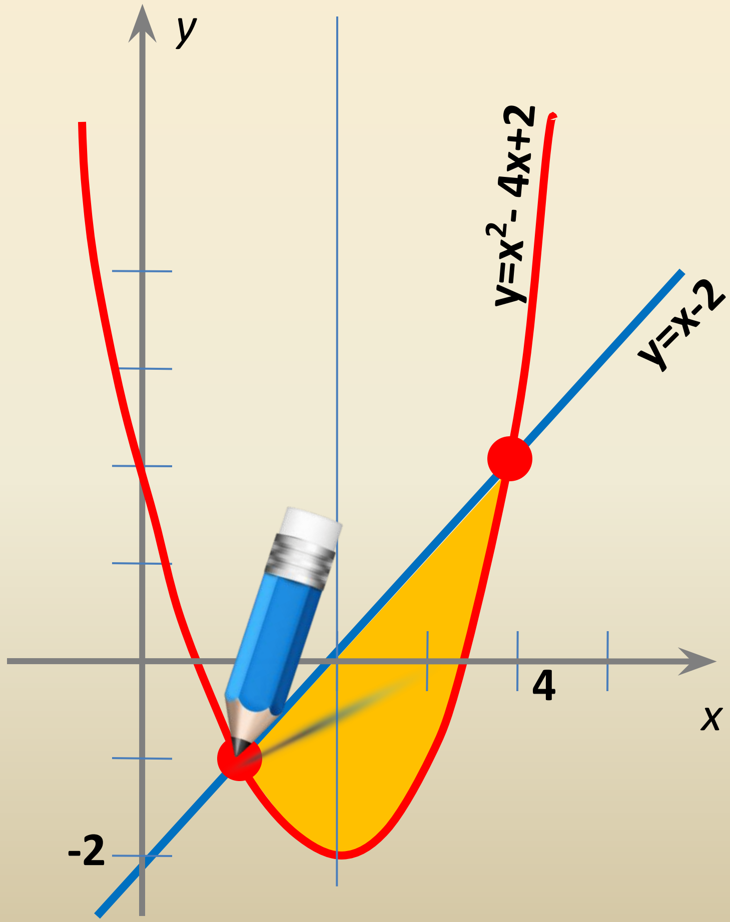
$$x^2-4x+2=x-2$$

$$x_1=1,\ x_2=4$$

4. $S=\int_1^4((x-2)-(x^2-4x+2))dx=$

$$=\int_1^4(5x-x^2-4)dx=\left(\frac{5x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-4x\right)\Big|_1^4=4{,}5$$

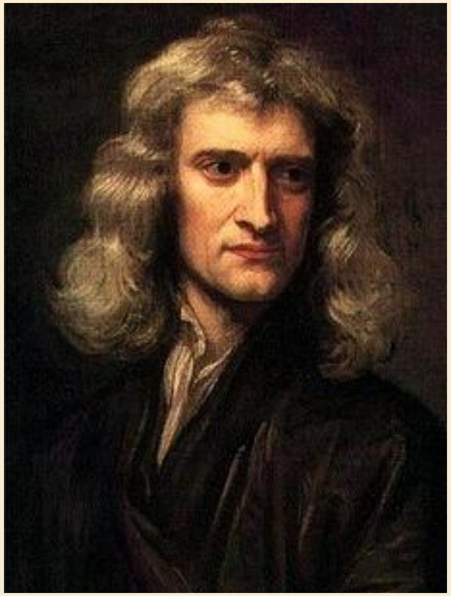
Ответ: ***S=4,5***



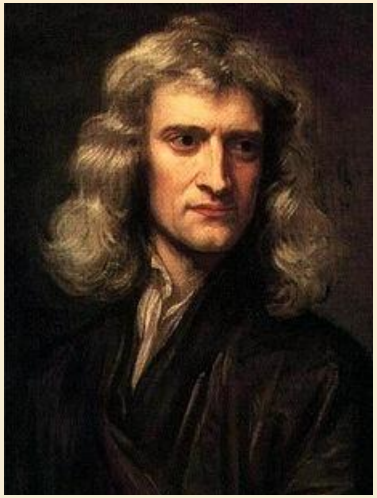
Рефлексия

- Криволинейная трапеция
- Формула Ньютона-Лейбница
- Геометрический и физический смысл определённого интеграла
- Формула для вычисления площади фигуры, ограниченной графиками $y = f(x)$ и $y = g(x)$

Формула Ньютона-Лейбница



Формула Ньютона-Лейбница



Ньютон открыл новый метод раньше, но опубликовал его позже Лейбница, написав ему: *«Надеюсь, что я при этом не написал ничего, что было бы тебе неприятно, если же это случилось, то прошу сообщить, потому что друзья мне дороже математических открытий»*

Лейбниц ответил в резкой форме. Распря двух гениев дорого обошлась науке: английская математическая школа увяла на целый век, а европейская проигнорировала многие выдающиеся идеи Ньютона.

Спор тянулся почти 40 лет, пока аббат Конти не сообщил Ньютону: *«Лейбниц умер – диспут окончен»*

Структура презентации

Титульный слайд

Задачи, приводящие к понятию определённого интеграла

Вычисление площадей фигур

Рефле
ксия

Сведе
ния об
авторе

Источ
ники

Струк
тура
презен
тации

Понятие определённого интеграла

Формула Ньютона –
- Лейбница

S
трапец
ии

S
фигур
ы

Смысл определённого интеграла

Вычис
ления
интегр
.ала

Приме
ры

Допол
нитель
ная
инфор
мация

Приме
р

Приме
р

Задача
1

Задача
2

Задача
3

Использованная литература

Использованные ресурсы

- А.Г. Мордкович, П.В. Семёнов. Алгебра и начала анализа. Учебник (профильный уровень)
- А.Г. Мордкович, Л.О. Денищева и др. Алгебра и начала анализа. Задачник (профильный уровень)
- Картинка "книги“
- Материал Википедии Лейбниц Материал Википедии Лейбниц Ньютон
- Рисунок карандаш
- Значок Информация
- Видео Величайший из учёных – Исаак Ньютон