

Геометрия

7 класс

С. Водораздел

Содержание:

- Геометрические фигуры: Геометрические фигуры: точка, прямая Геометрические фигуры: точка, прямая, отрезок.
- Полуплоскость, луч и угол. Аксиомы и теоремы.
- Треугольники. Параллельные прямые.
- Смежные и вертикальные углы.
- Перпендикулярные прямые.
- Биссектриса угла.
- 1-ый и 2-ой признаки равенства треугольников.
- Высота, медиана и биссектриса треугольника.
- Равнобедренный треугольник.
- 3-ий признак равенства треугольников.
- Признаки параллельности прямых.
- Сумма углов треугольника.
- Внешний угол Внешний угол.
- Признаки равенства прямоугольных треугольников.
- Расстояние от точки до прямой
- Соотношения между сторонами и углами треугольника
- Неравенство треугольника.
- Окружность.
- Касательная к окружности
- Построение касательной
- Касание окружностей Касание окружностей (внутреннее) Касание окружностей (внутреннее) (внешнее)
- Описанная окружность Описанная окружность. Описанная окружность. Вписанная окружность
- Построение угла, равного данному. Построение угла, равного данному. Построение биссектрисы угла
- Деление отрезка пополам. Деление отрезка пополам. Построение прямой, перпендикулярной данной
- Построение треугольника: по двум сторонам и углу Построение треугольника: по двум сторонам и углу, по трём сторонам.
- Справка

Основные свойства простейших геометрических фигур

Геометрические фигуры: точка,
прямая, отрезок.



Точка и прямая

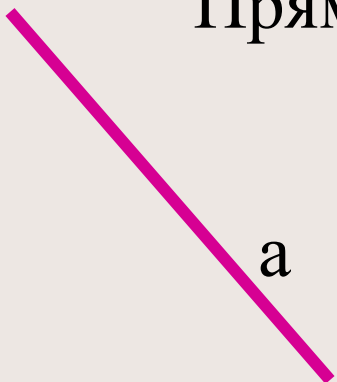
ТОЧКА



A

Точка A

Прямая a

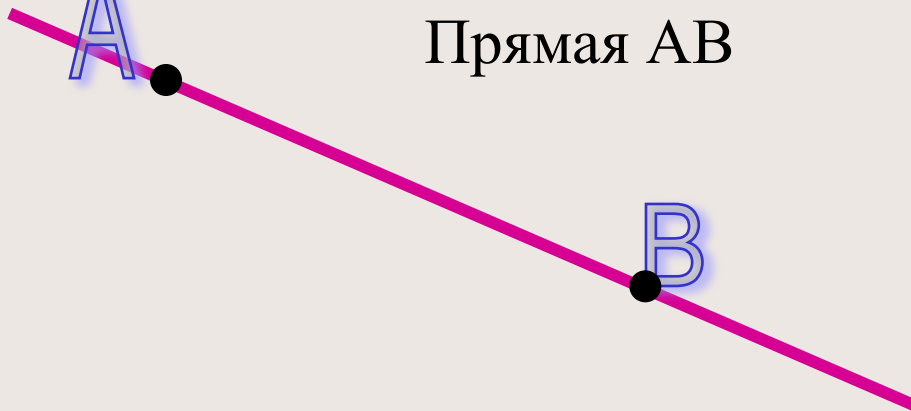


a

ПРЯМАЯ

A

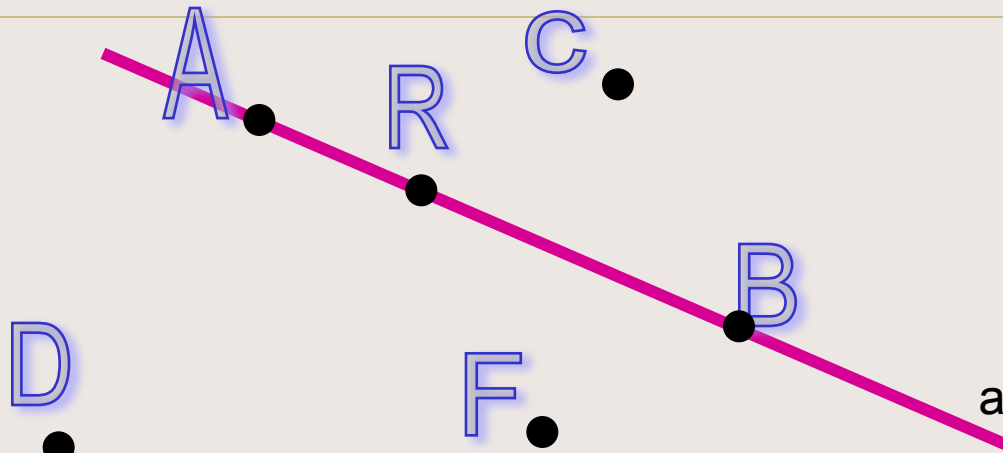
Прямая АВ



B



Точка и прямая



$A \in a$

$R \in a$

$B \in a$

$F \notin a$

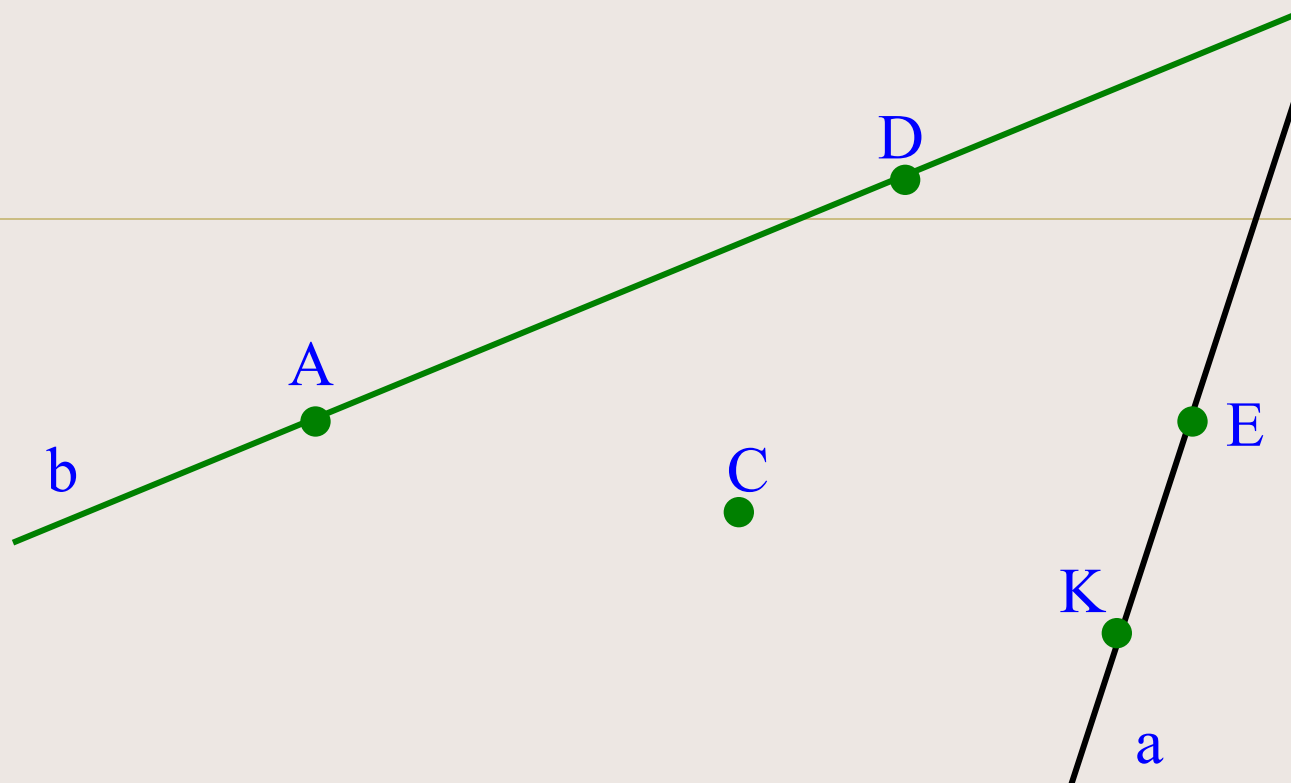
$D \notin a$

$C \notin a$

Какова бы ни была прямая,
существуют точки ей
принадлежащие, и точки, не
принадлежащие ей.

Через любые две точки
можно провести прямую и
только одну.





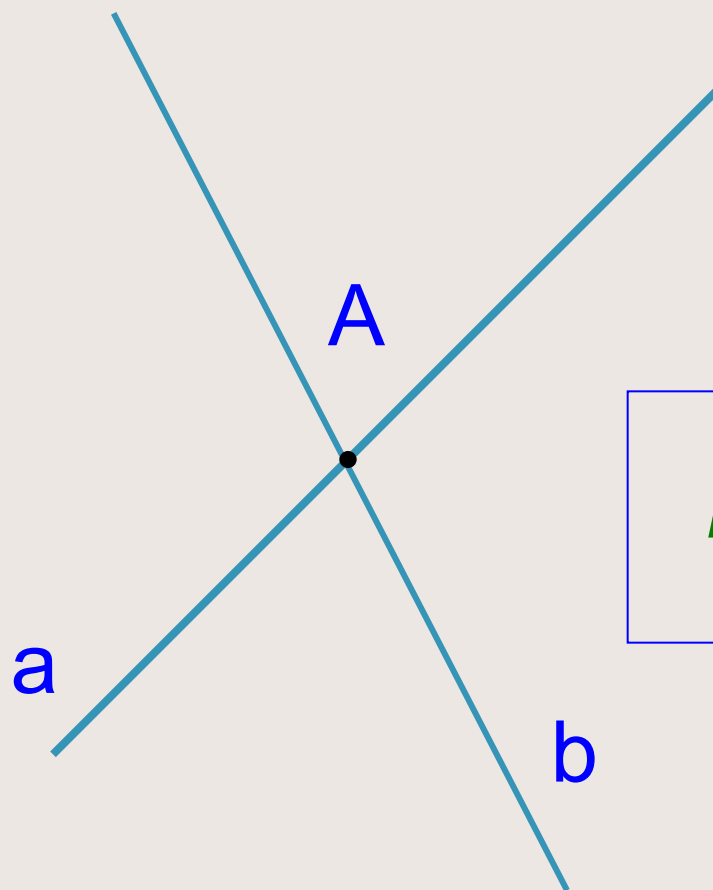
Перечерти рисунок в тетрадь и ответь на вопросы:

- 1. Какие точки принадлежат прямой а?*
- 2. Какие точки не принадлежат прямой b?*
- 3. Какие точки не принадлежат прямой а?*
- 4. Какие точки принадлежат прямой b?*



Подсказка

Пересечение прямых



$$a \cap b = A$$

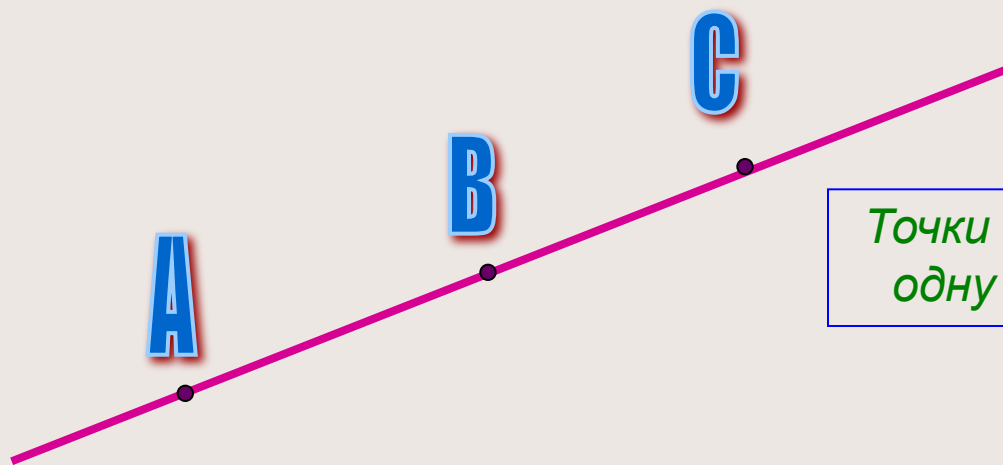
*Прямые a и b
пересекаются в
точке A*



Из трёх точек, лежащих на одной прямой,
одна и только одна лежит между двумя
другими

Точка В лежит между А и С

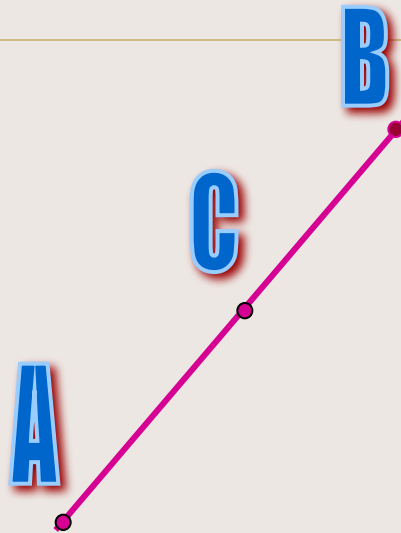
*Точки А и С лежат по
разные стороны от В*



*Точки В и С лежат по
одну сторону от А*



Отрезок



Точки A и B - концы отрезка AB.

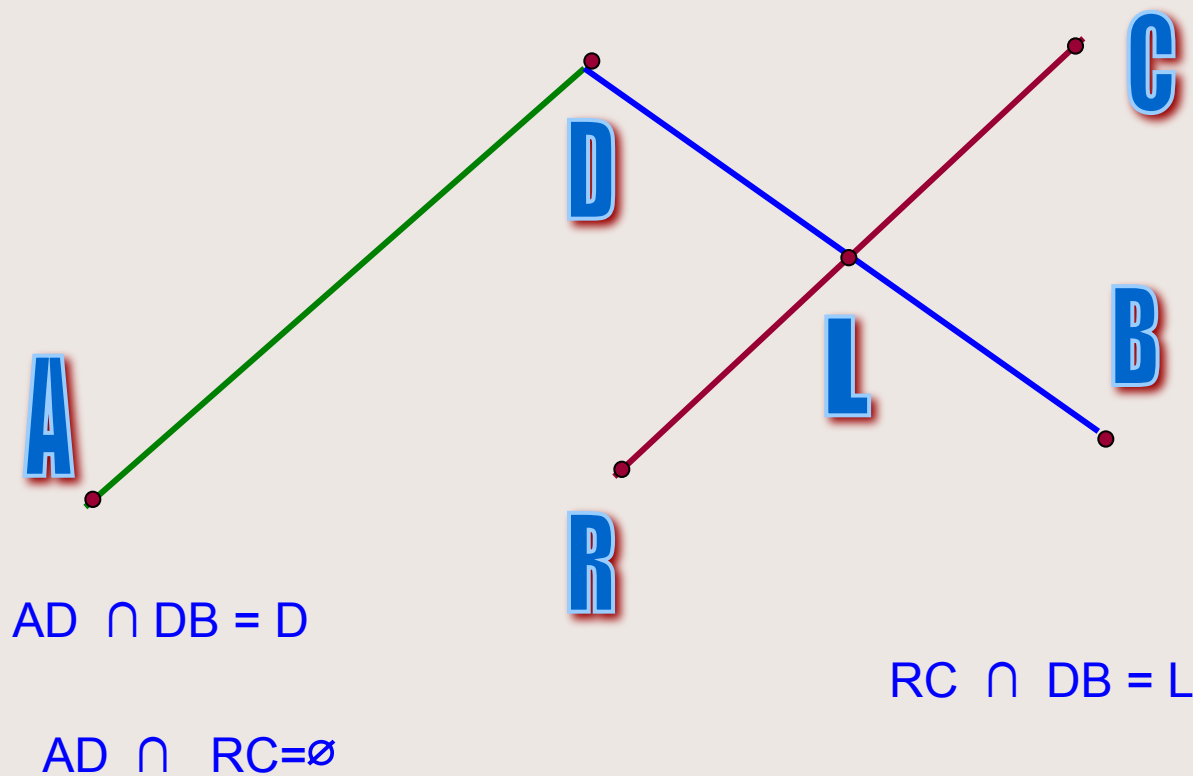
Точка C – внутренняя точка отрезка AB

$$AC + CB = AB$$

Каждый отрезок имеет определённую длину, большую нуля. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой.



Пересечение отрезков



ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Точки А, В и С лежат на одной прямой. Известно, что $AB=6\text{см}$, $AC=9\text{см}$, $BC=3\text{ см}$. Какая из этих точек лежит между двумя другими?

Дано: $A, B, C \in a$. $AB=6\text{см}$, $AC=9\text{см}$, $BC=3\text{ см}$.

Решение:

$AB+AC=BC$ (аксиома 3). $6+9 \neq 3 \Rightarrow A$ не лежит между B и C

$AC+BC=AB$ (аксиома 3). $9+3 \neq 6 \Rightarrow C$ не лежит между B и A

$AB+BC=AC$ (аксиома 3). $6+3=9 \Rightarrow B$ лежит между A и C

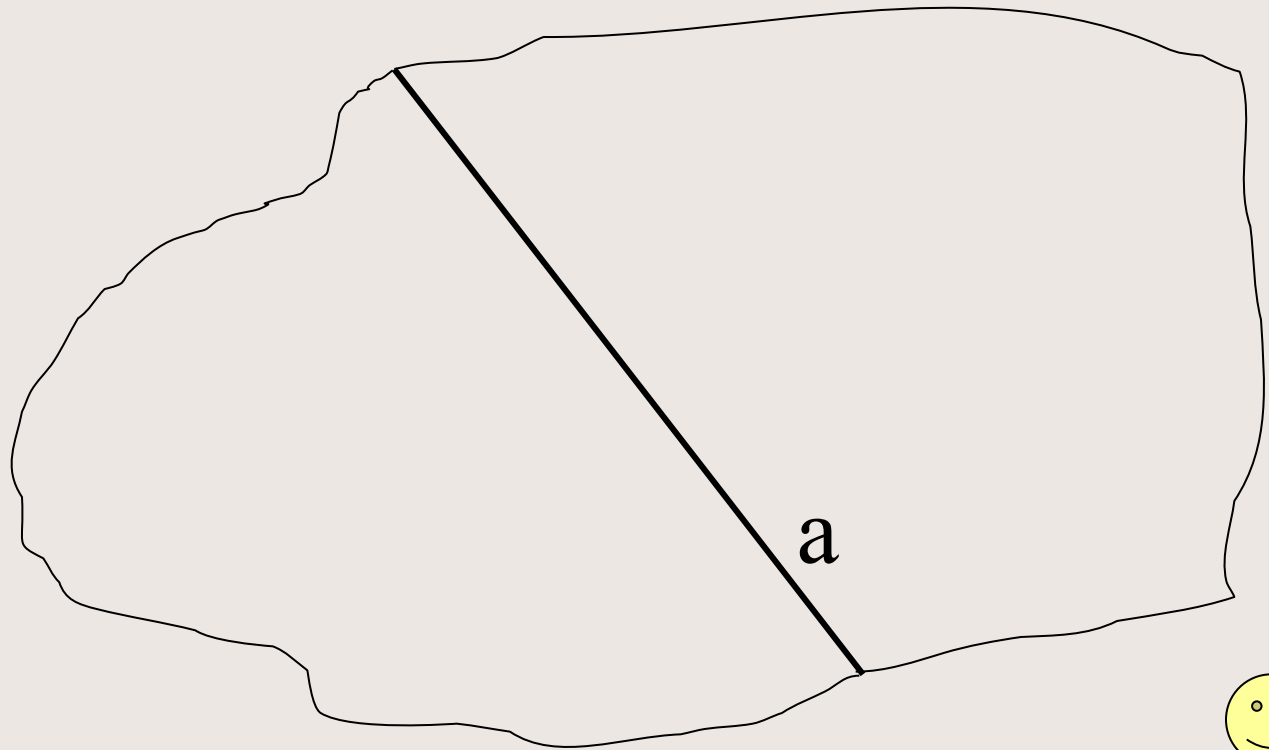
Ответ: B лежит между A и C

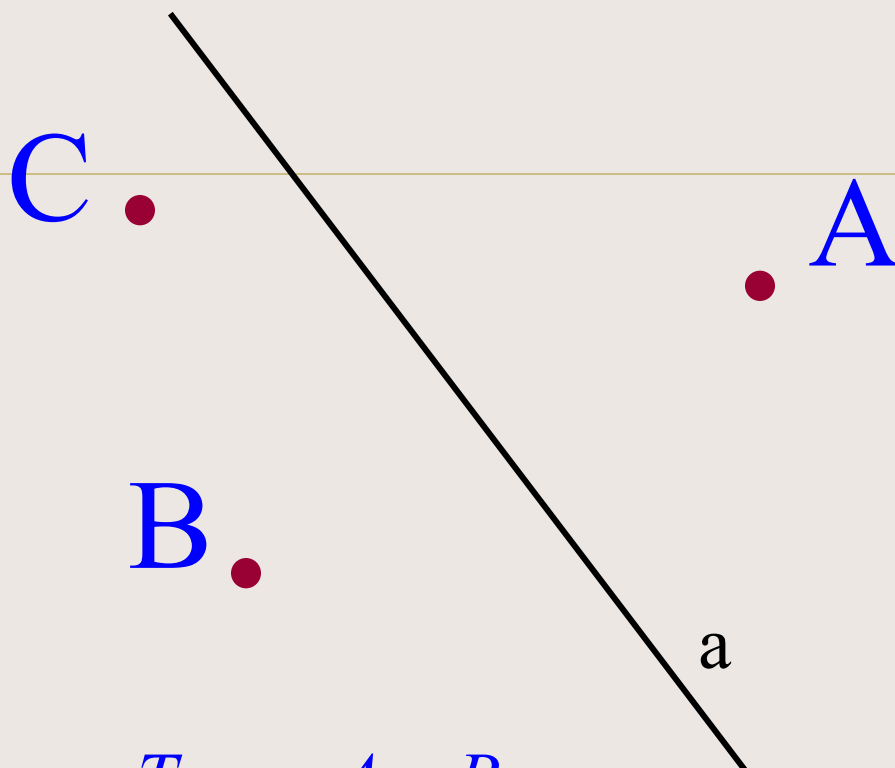


Полуплоскость, луч, угол.



*Прямая разбивает
плоскость на две
полуплоскости.*

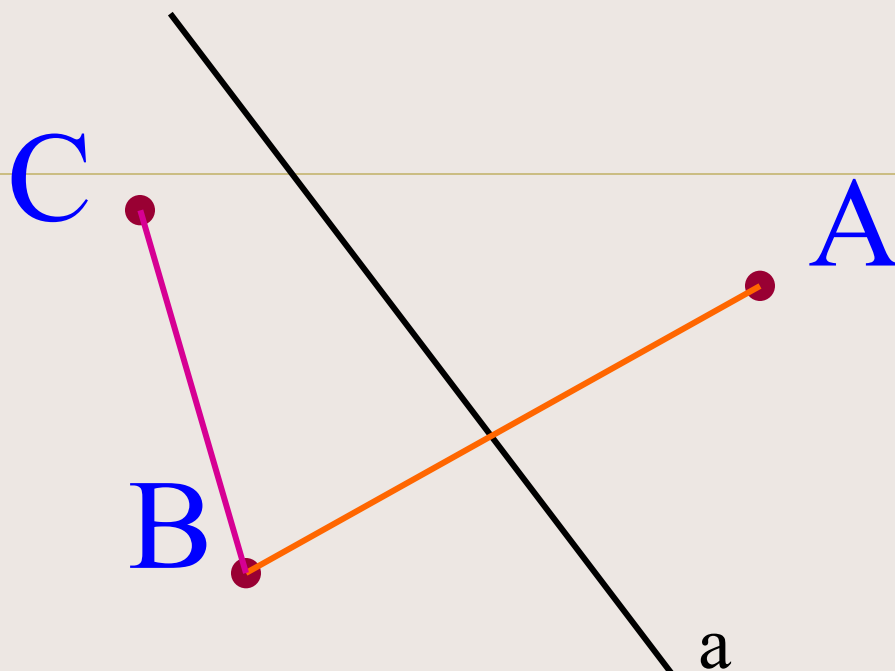




*Точки A и B лежат в разных
полуплоскостях*

Точки B и C лежат в одной полуплоскости





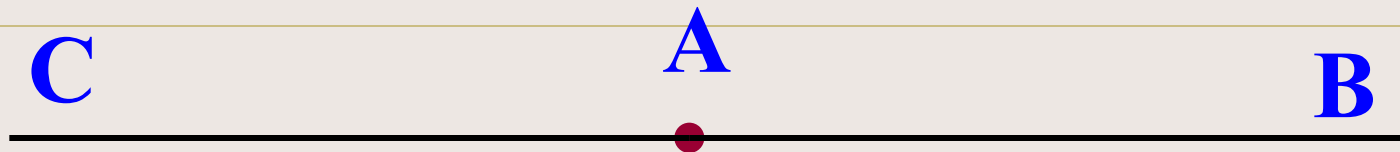
*Точки A и B лежат по разные стороны от прямой a. $\Rightarrow$
Отрезок AB пересекает прямую a.*

*Точки B и C лежат по одну сторону от прямой a. $\Rightarrow$
Отрезок BC не пересекает прямую a.*

*Пересекает ли отрезок AC прямую a. Почему? Ответ
обоснуй письменно в тетради.*



Луч



Луч АС-

Луч АВ-

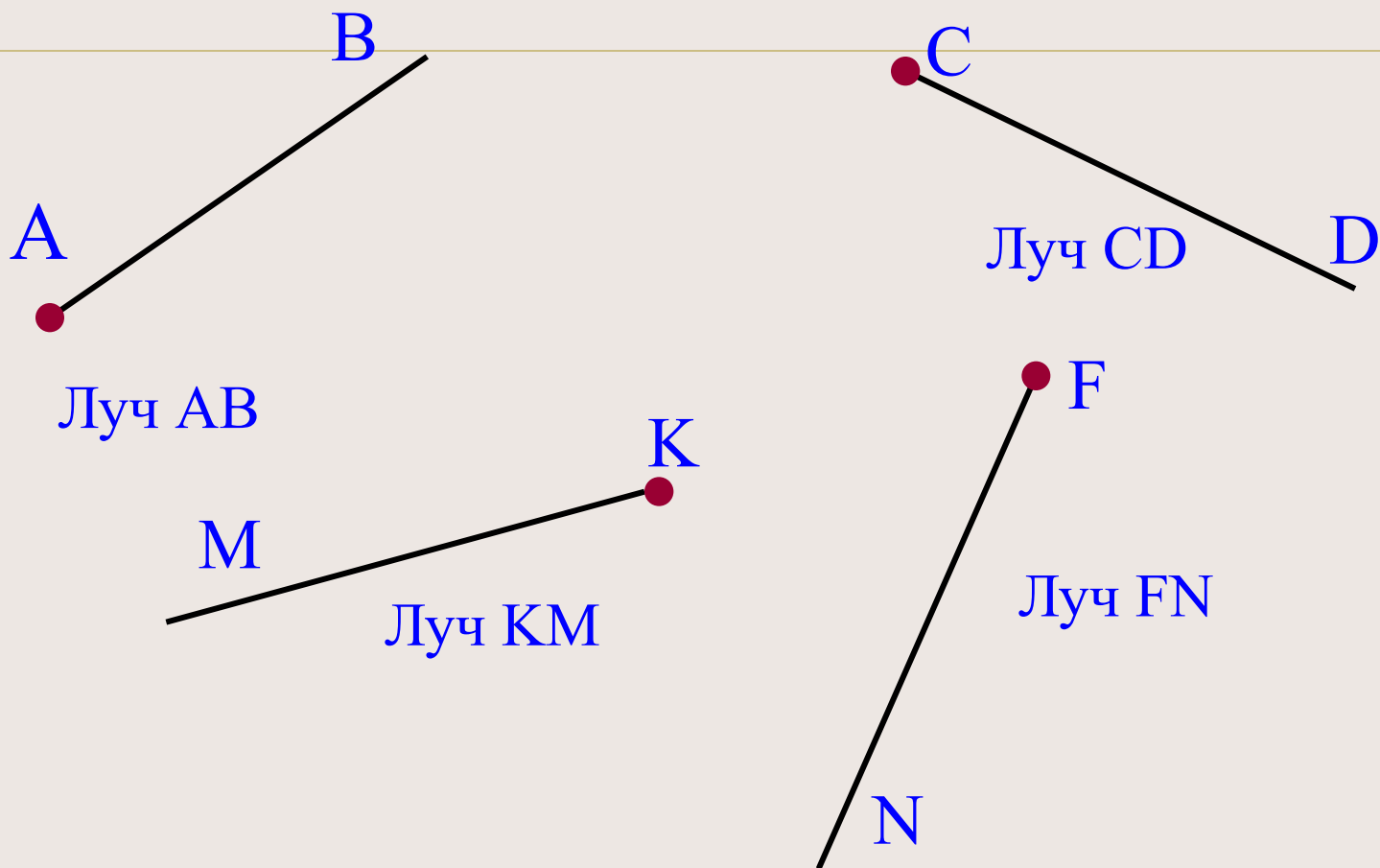
А- начало луча

А- начало луча

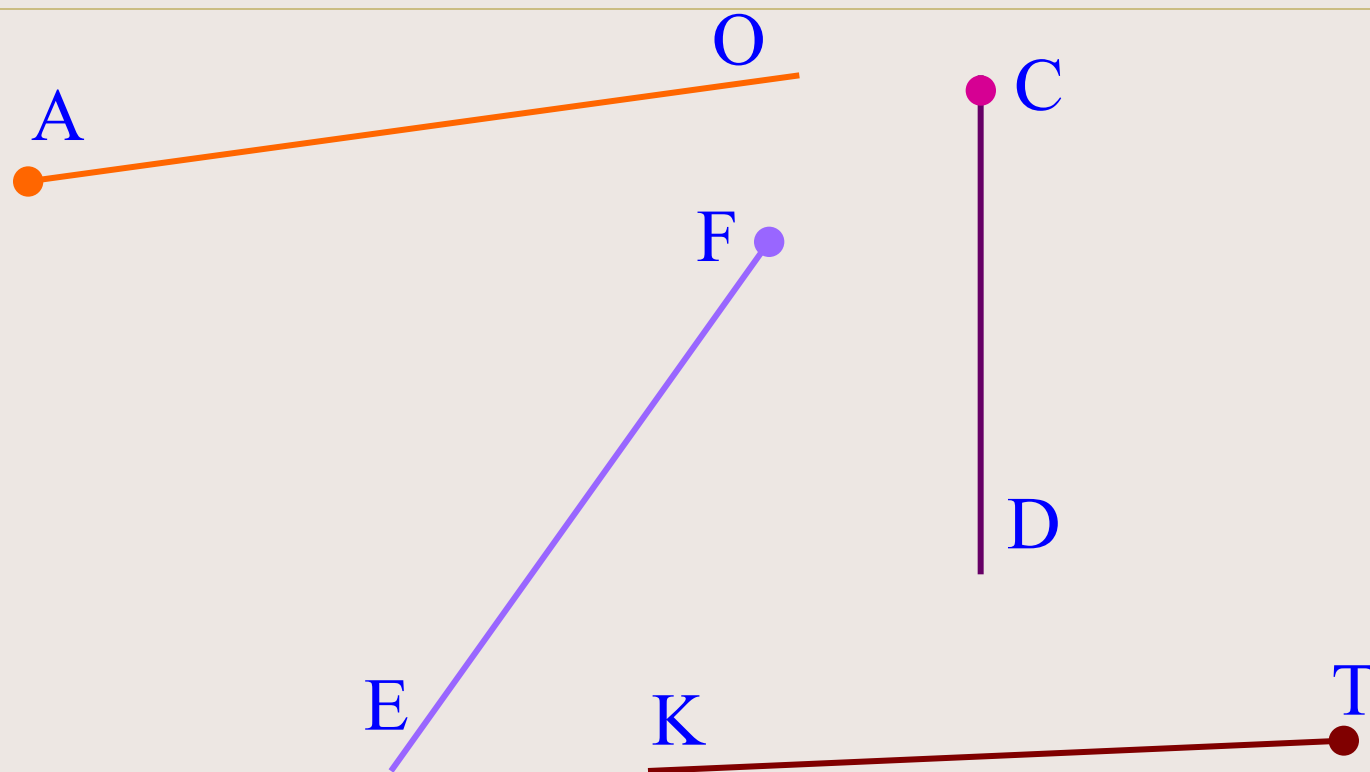
*Точка разбивает прямую на две части-
каждая из которых называется лучом.*



Лучи



Назови изображенные лучи

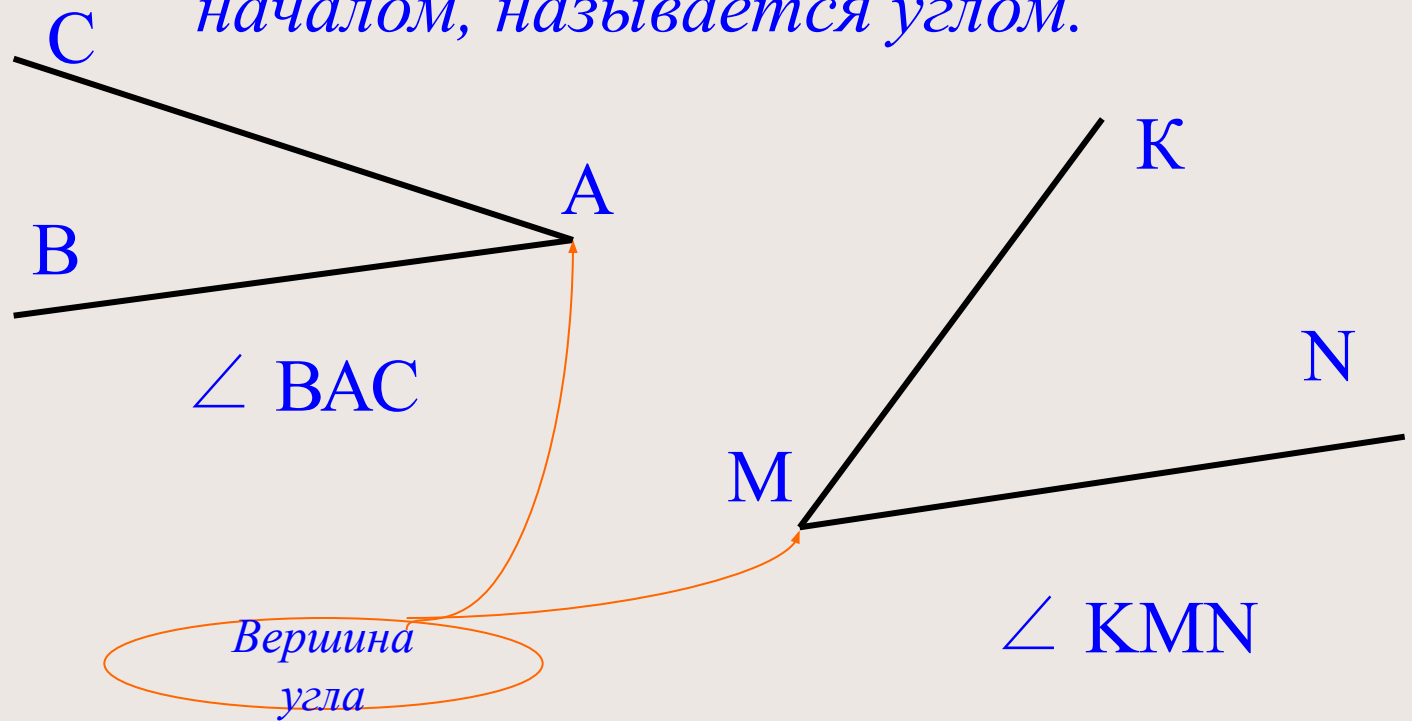


*Сделай в тетради такой же рисунок и
запиши названия лучей в тетрадь*

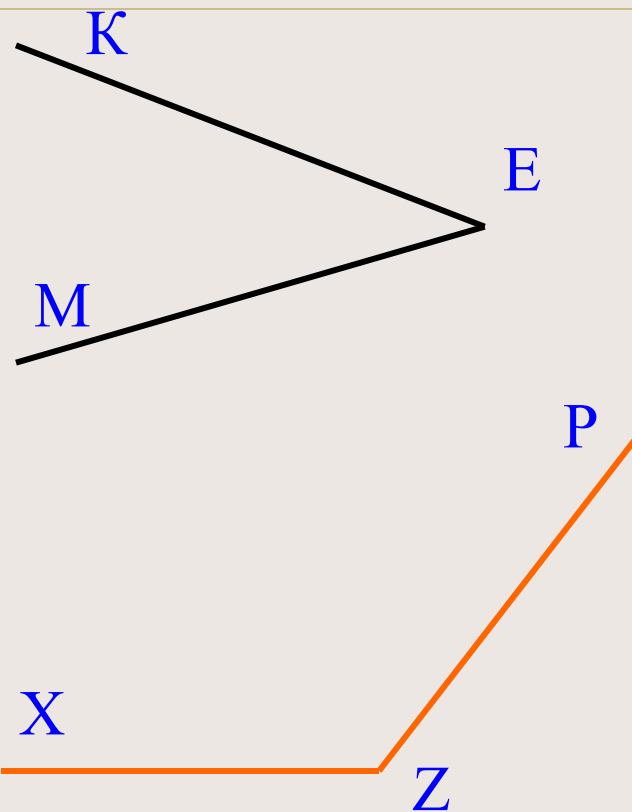
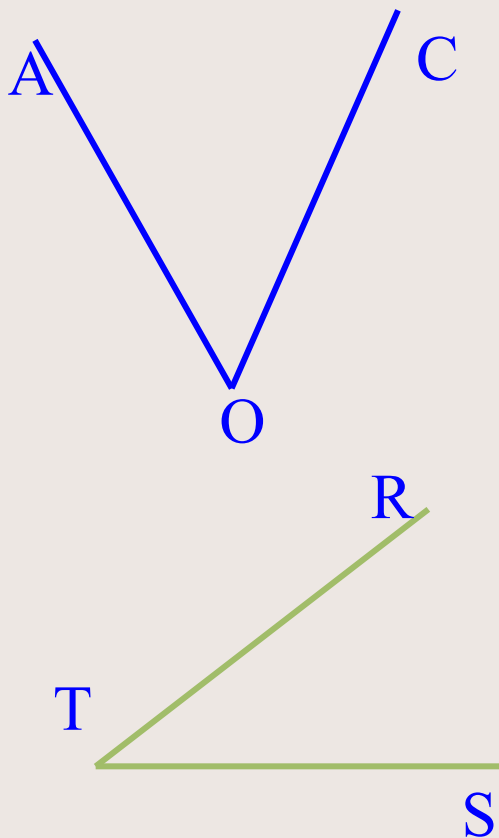


Угол

Фигура, состоящая из двух лучей с общим началом, называется углом.



Запиши в тетрадь углы, изображенные на рисунке:



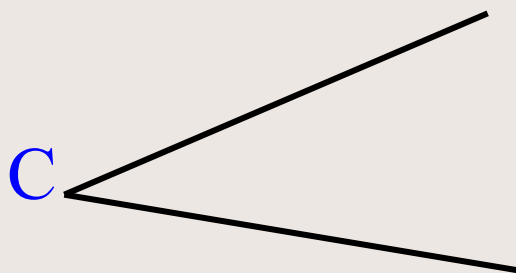
Виды углов

Развёрнутый угол



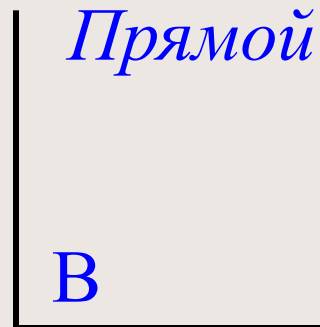
$$\angle A = 180^\circ$$

Острый угол



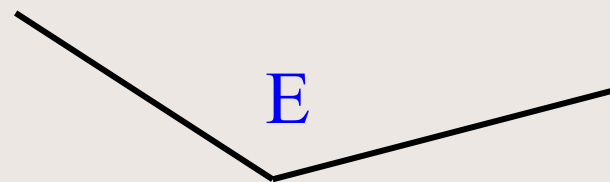
$$\angle C < 90^\circ$$

Прямой угол



$$\angle B = 90^\circ$$

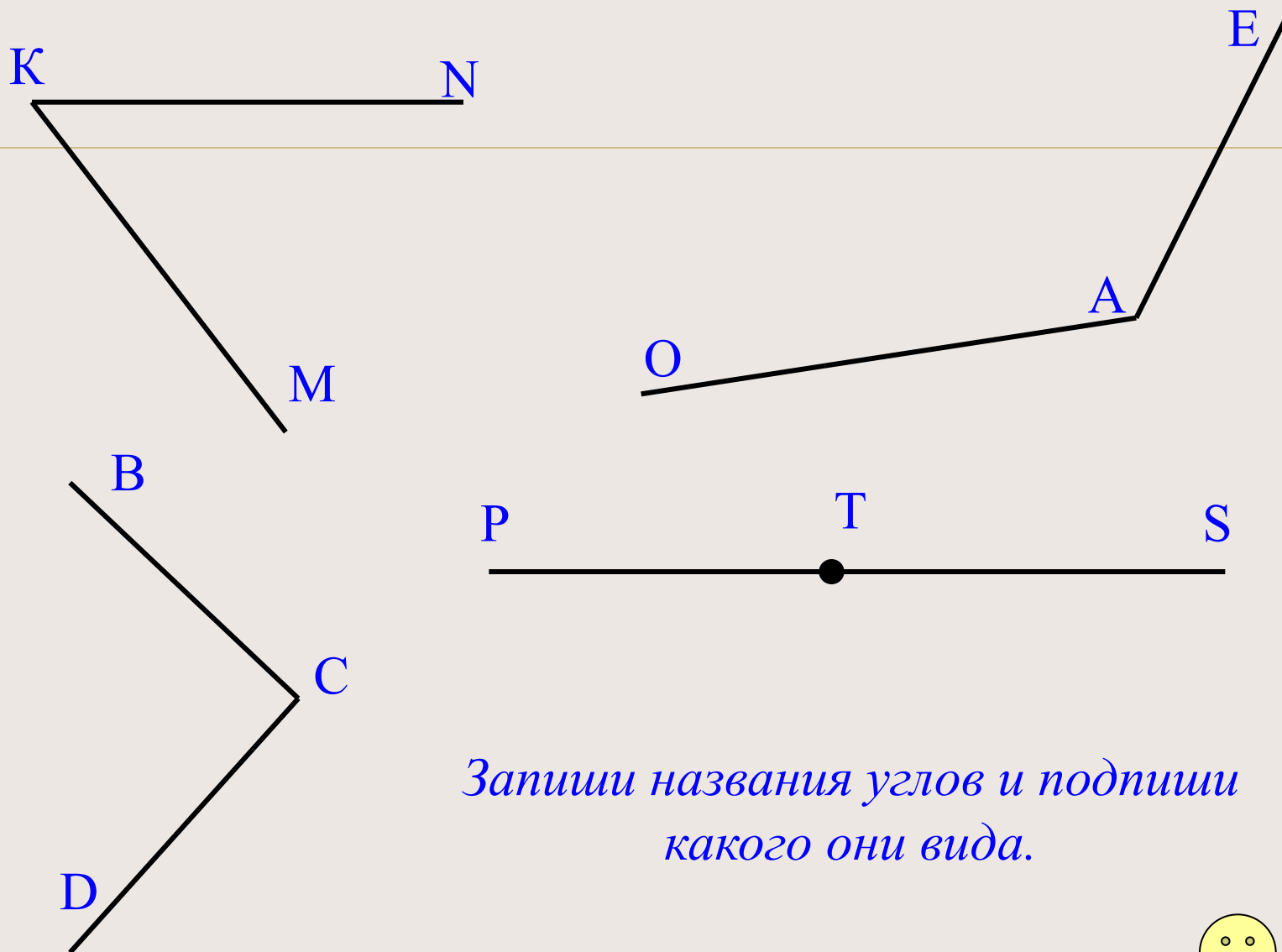
Тупой угол



$$90^\circ < \angle E < 180^\circ$$



Сделай в тетради такой же рисунок:



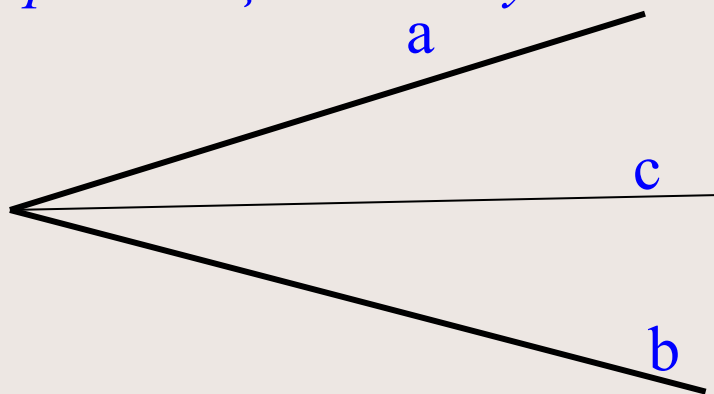
*Запиши названия углов и подпиши
какого они вида.*



Основные свойства измерения углов

Каждый угол имеет определённую градусную меру, большую нуля. Развёрнутый угол равен 180° .

Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.



Луч c проходит между сторонами угла (ab).

$$\angle (ab) = \angle (ac) + \angle (bc).$$



Теоремы и аксиомы.

*Аксиомой называется утверждение,
не требующее доказательства.*

*Теоремой называется
утверждение, которое
необходимо доказывать.*



Задача

Между сторонами угла (ab), равного 80° , проходит луч с. Найти углы (ac) и (bc), если угол (ac) в 4 раза больше угла (bc).

Дано: $\angle(ac) > \angle(bc)$ в 4
раза.

Найти: $\angle(ac)$, $\angle(bc)$.

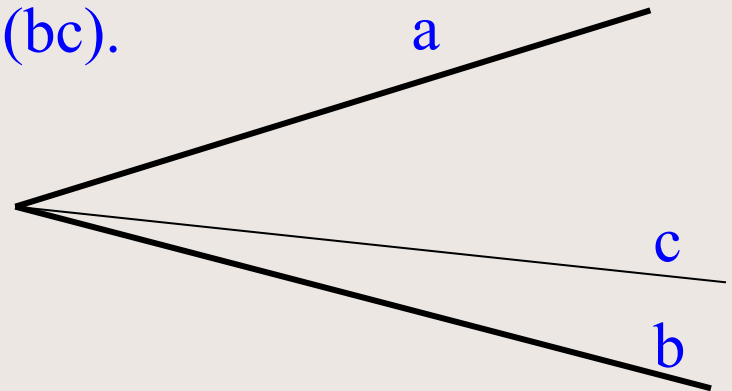
Решение: $\angle(ac) + \angle(bc) = \angle$
(ab);

$$\angle(bc) = x, \quad \angle(ac) = 4x;$$

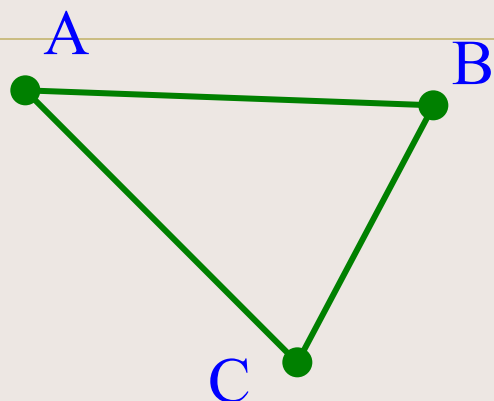
$$x + 4x = 80^\circ \Rightarrow 5x = 80^\circ \Rightarrow x = 80^\circ : 5 = 16^\circ \Rightarrow$$

$$\angle(bc) = 16^\circ; \quad \angle(ac) = 4 \cdot 16^\circ =$$

Ответ: 16° и 64° .



Треугольники



$\triangle ABC$:

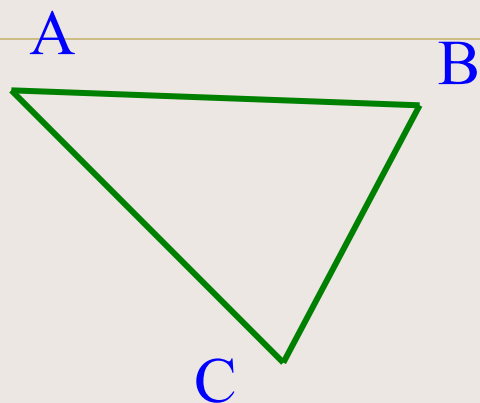
Точки A, B и C – вершины, а отрезки AB, AC и BC – стороны треугольника.

Отметим три точки, не лежащие на одной прямой.

Соединим их отрезками.

Получим фигуру, которая называется треугольником.

Периметр треугольника

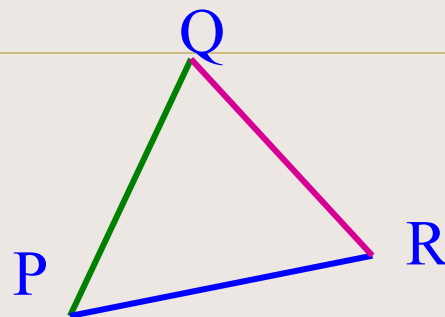
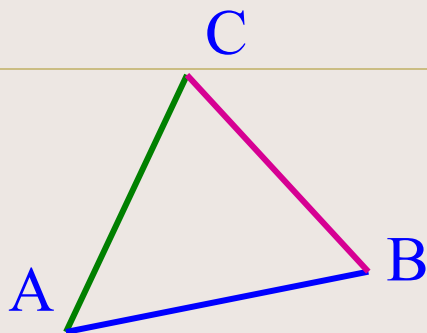


*Сумма длин трех сторон треугольника называется его **периметром**.*

$$P = AB + AC + BC$$



Равенство треугольников



Треугольники называются равными, если у них соответствующие стороны равны и соответствующие углы равны.

$$\triangle ABC = \triangle PQR \Rightarrow AB=PR, BC=RQ, AC=PQ; \\ \angle A=\angle P, \angle B=\angle R, \angle C=\angle Q.$$



1. $\triangle ABC = \triangle NMK$, $AB=3$; $BC=6$; $AC=8$.

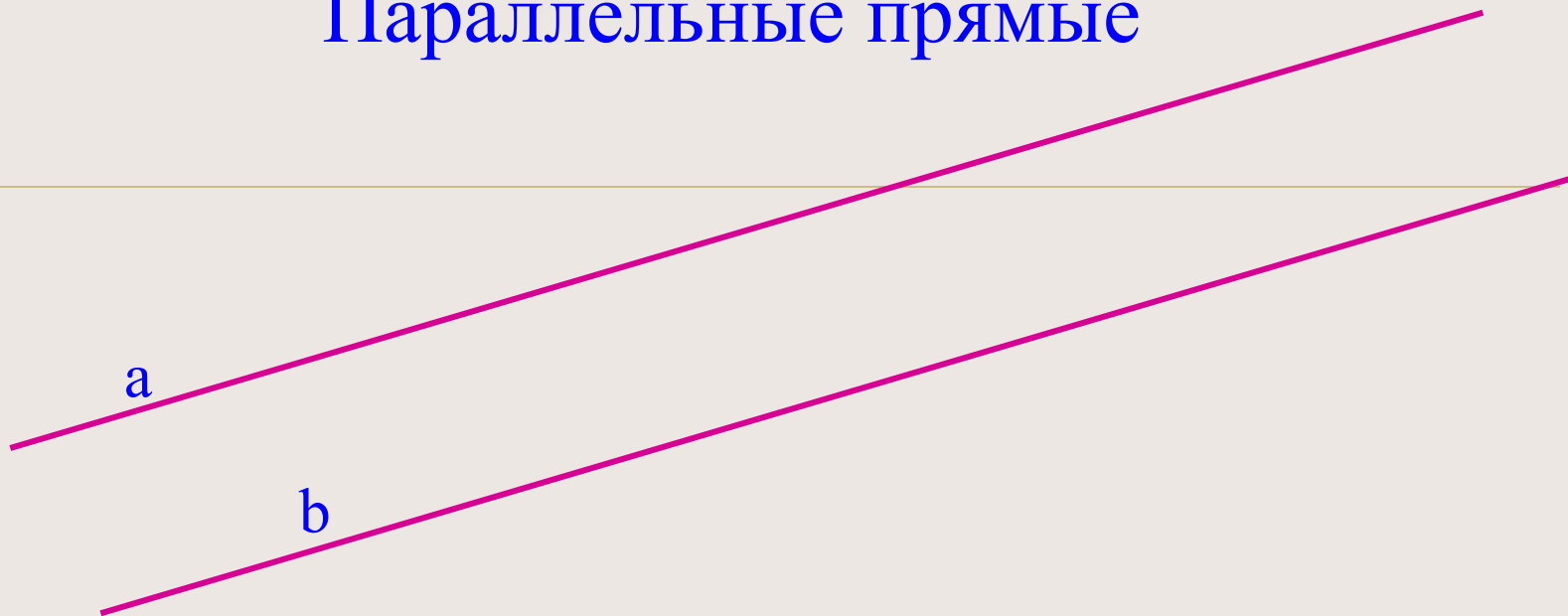
Найдите стороны $\triangle NMK$.

2. $\triangle ABC = \triangle DFE$, $\angle A=30^\circ$, $\angle F=85^\circ$, $\angle C=65^\circ$.

Найдите остальные углы.

1 $NM=3$; $MK=6$; $NK=8$

Параллельные прямые

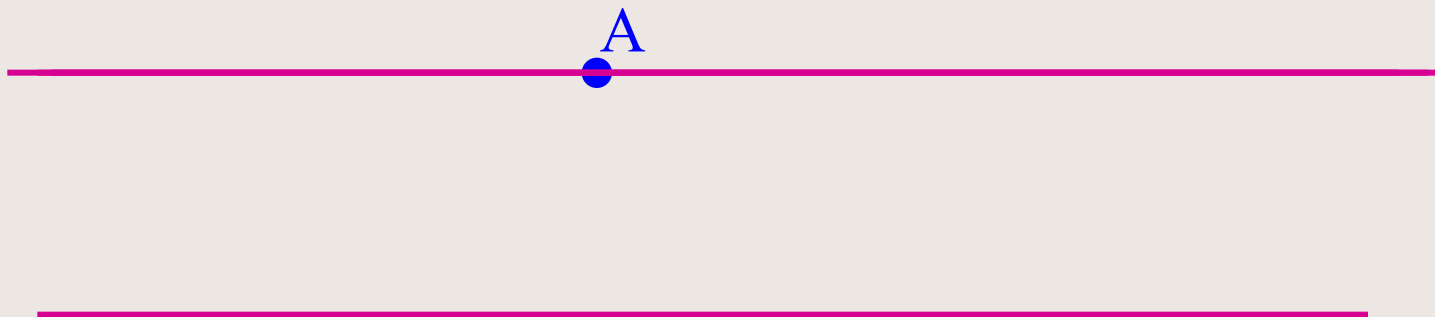


*Две прямые называются **параллельными**,
если они **не пересекаются**.*

$$a \parallel b$$



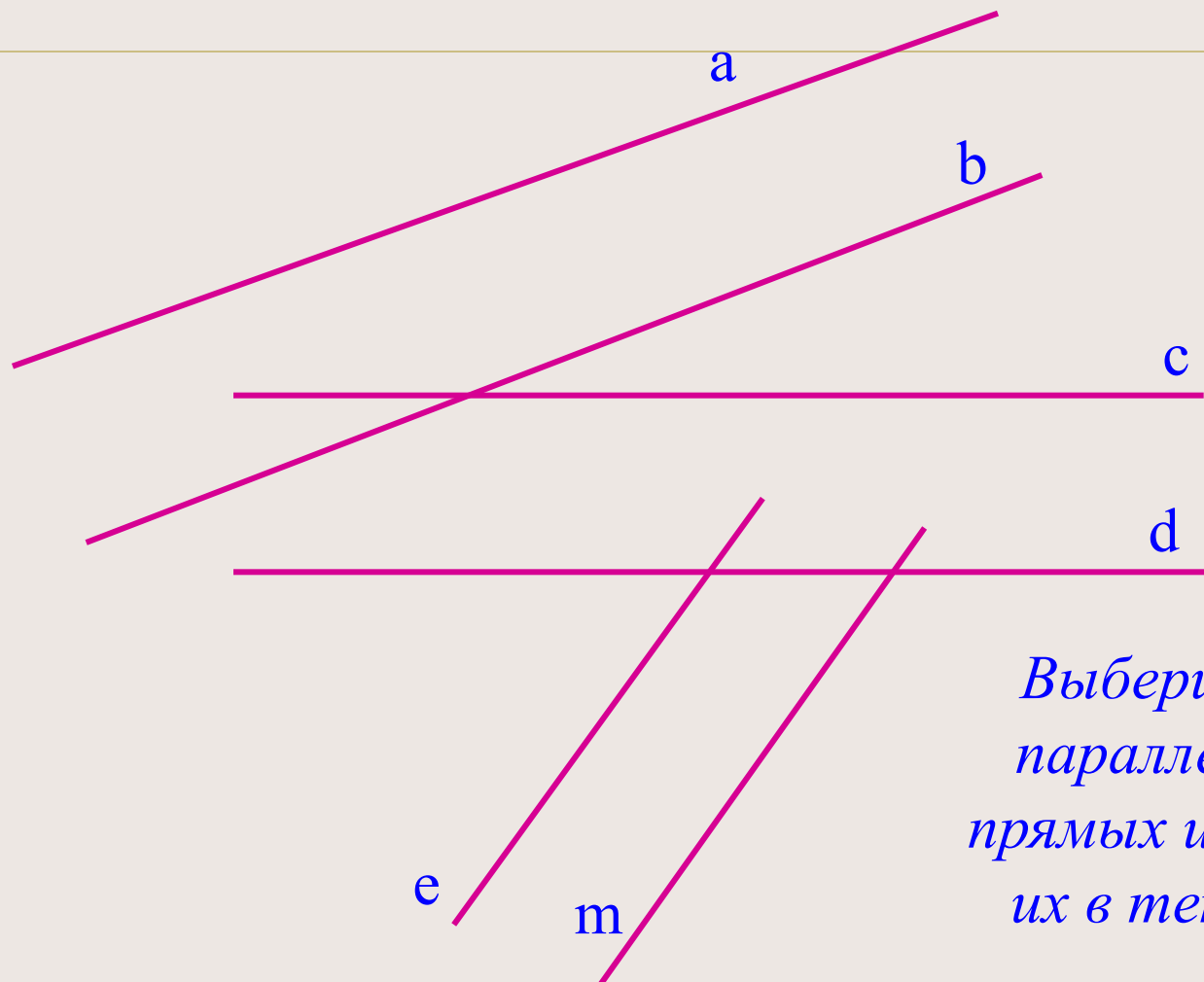
Аксиома параллельных прямых



*Через точку, не лежащую на данной прямой,
можно провести не более одной прямой,
параллельной данной.*



Задача



*Выбери пары
параллельных
прямых и запиши
их в тетрадь.*



Проверь: правильно ли записаны
пары параллельных прямых.

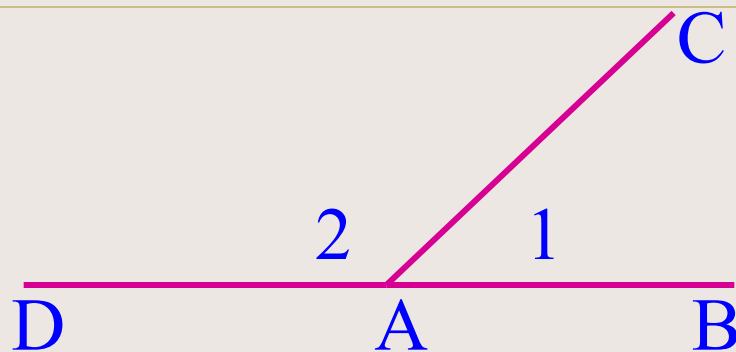
$$a \parallel b ;$$

$$c \parallel d ;$$

$$e \parallel m .$$

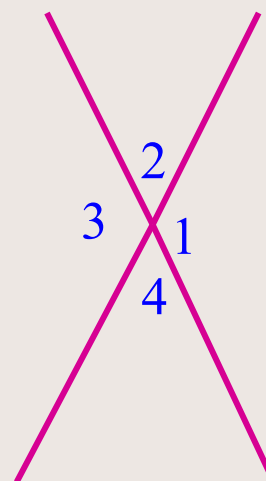


Смежные и вертикальные углы



Два угла называются **смежными**, если у них одна сторона общая, а две другие – дополнительные полупрямые.

Углы 1 и 2 – смежные.
AC – общая сторона,
AB и AD –
дополнительные лучи.

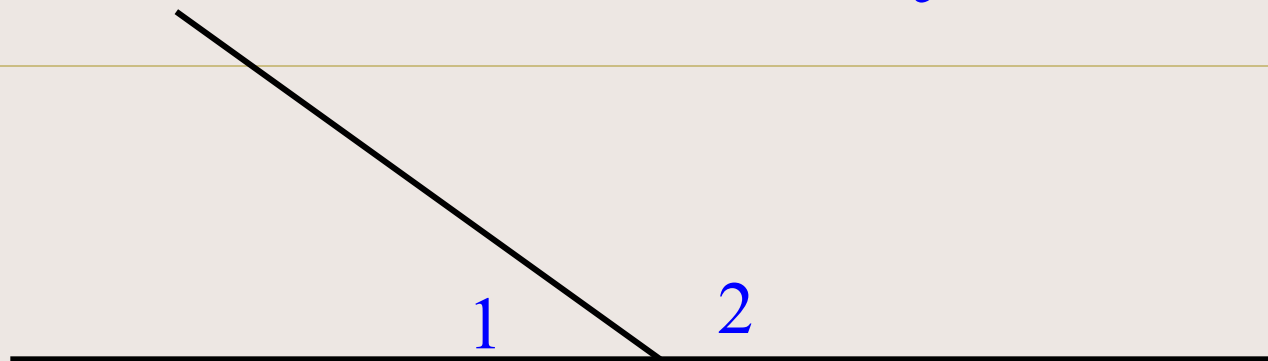


Два угла называются **вертикальными**, если их стороны – дополнительные полупрямые.

Углы 1 и 3; 2 и 4 –
вертикальные
Стороны углов –
дополнительные лучи



Свойство смежных углов



Сумма смежных углов равна 180° .

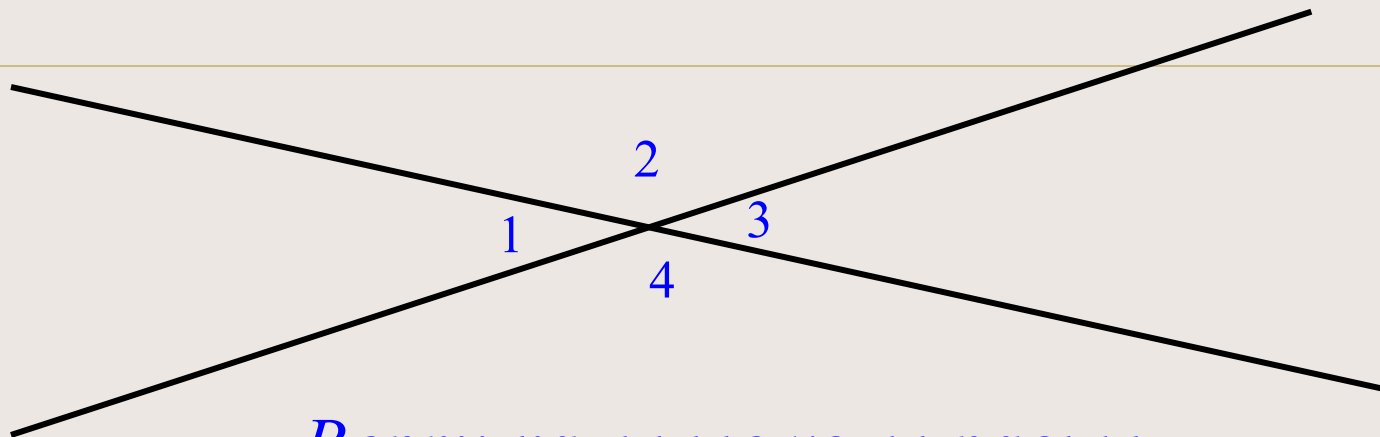
$$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ,$$

$$\angle 1 = 180^\circ - \angle 2,$$

$$\angle 2 = 180^\circ - \angle 1.$$



Свойство вертикальных углов

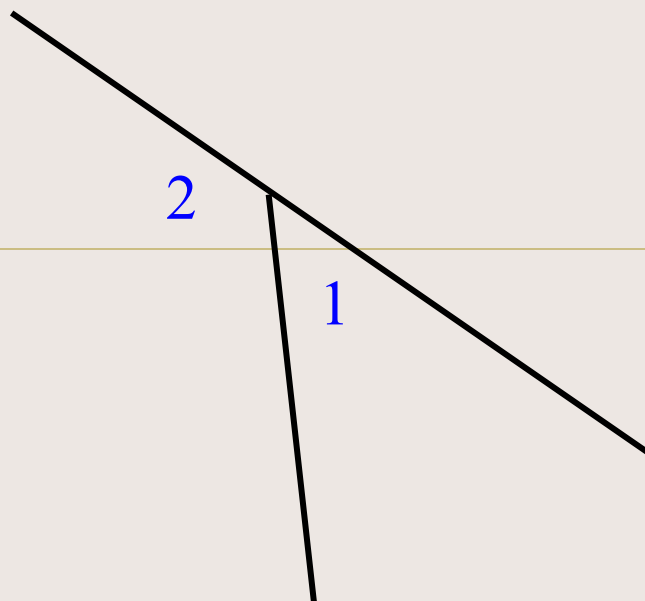


Вертикальные углы равны

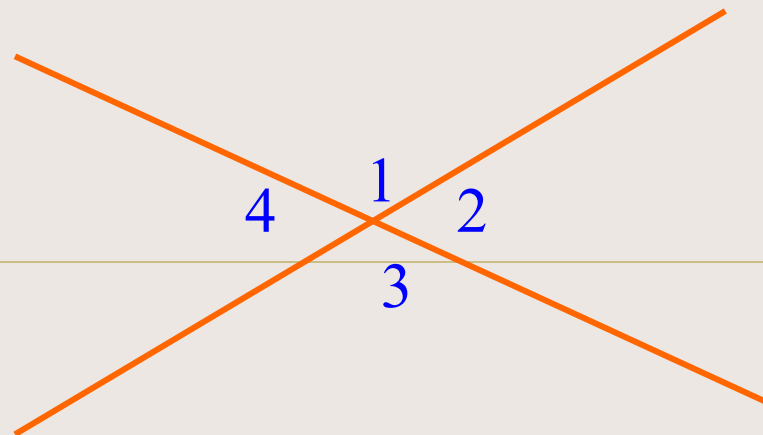
$$\angle 1 = \angle 3$$

$$\angle 2 = \angle 4$$





*Сделай в тетради
такой же рисунок.
Запиши как называются
углы 1 и 2.
Запиши их свойство*



*Сделай в тетради
такой же рисунок.
Запиши как называются
углы 1 и 3.
Запиши их свойство*



Задачи

1. Один из смежных углов равен 58° . Найти второй угол.

58° меньше 90° , поэтому на рисунке таким углом может быть угол 1.

Дано: $\angle 1$, $\angle 2$ -смежные, $\angle 1 = 58^\circ$

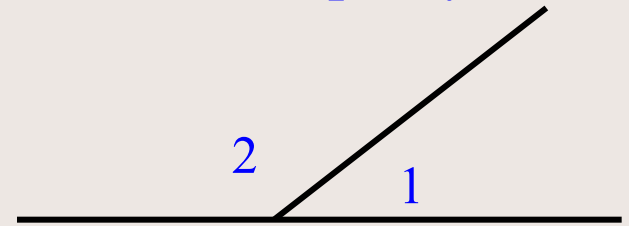
Найти: $\angle 2$.

Решение:

$$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ (\text{смеж. углы}) \Rightarrow \angle 2 = 180^\circ - \angle 1.$$

Значит, $\angle 2 = 180^\circ - 58^\circ = 122^\circ$.

Ответ: $\angle 2 = 122^\circ$.



Задачи

2. Один из смежных углов на 20° больше другого. Найти эти углы.

Дано: $\angle 1$, $\angle 2$ -

смежные
 $\angle 2$ на $20^\circ > \angle 1$.

Найти: $\angle 1$, $\angle 2$.

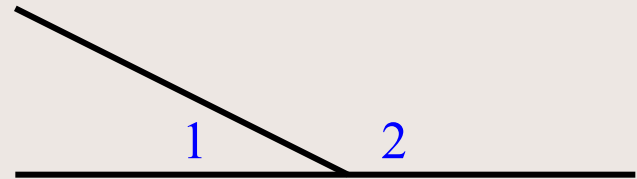
Решение: $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ (смеж. углы).

Пусть $\angle 1 = x$, тогда $\angle 2 = x + 20^\circ$.

$$x + x + 20^\circ = 180^\circ \Rightarrow 2x + 20^\circ = 180^\circ \Rightarrow 2x = 180^\circ - 20^\circ \Rightarrow$$

$$2x = 160^\circ \Rightarrow x = 160^\circ : 2 = 80^\circ. \angle 1 = 80^\circ, \angle 2 = 80^\circ + 20^\circ = 100^\circ.$$

Ответ: 80° и 100° .



Задачи

3. Найти смежные углы, если известно, что они относятся как 2 : 3.

Дано: $\angle 1$, $\angle 2$ -
смежные. $2 = 2 : 3$.

Найти: $\angle 1$, $\angle 2$.

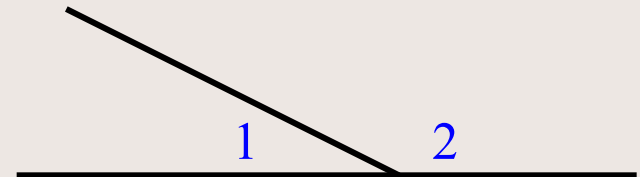
Решение: $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ (смеж. углы).

Пусть $\angle 1 = 2x$, тогда $\angle 2 = 3x$.

$$2x + 3x = 180^\circ \Rightarrow 5x = 180^\circ \Rightarrow x = 180^\circ : 5 = 36^\circ$$

$$\angle 1 = 2 \cdot 36^\circ = 72^\circ, \angle 2 = 3 \cdot 36^\circ = 108^\circ.$$

Ответ: 36° и 108° .



Задачи

4. Один из углов, которые получаются при пересечении двух прямых, равен 125 градусам. Найти остальные углы.

Дано: $\angle 2 = 125^\circ$.

Найти: $\angle 1$, $\angle 3$, $\angle 4$

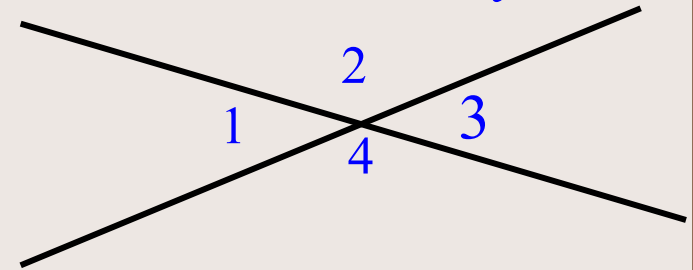
Решение: $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ (смеж. углы).

$$\angle 1 = 180^\circ - \angle 2 = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ.$$

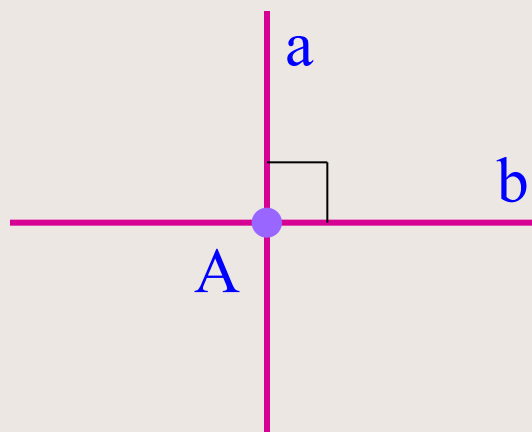
$$\angle 3 = \angle 1, \quad \angle 4 = \angle 2 \text{ (вертикальные)}$$

$$\Rightarrow \angle 3 = 55^\circ, \quad \angle 4 = 125^\circ.$$

Ответ: $\angle 1 = \angle 3 = 55^\circ$, $\angle 4 = 125^\circ$.



Перпендикулярные прямые



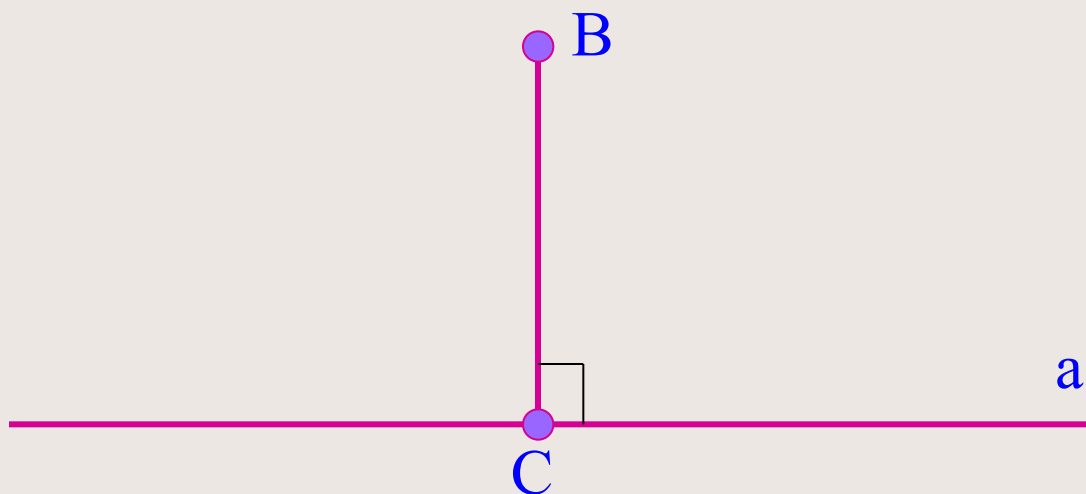
$$\angle A = 90^\circ$$

$$a \perp b$$

*Две прямые называются **перпендикулярными**, если они пересекаются **под прямым углом**.*



Перпендикуляр



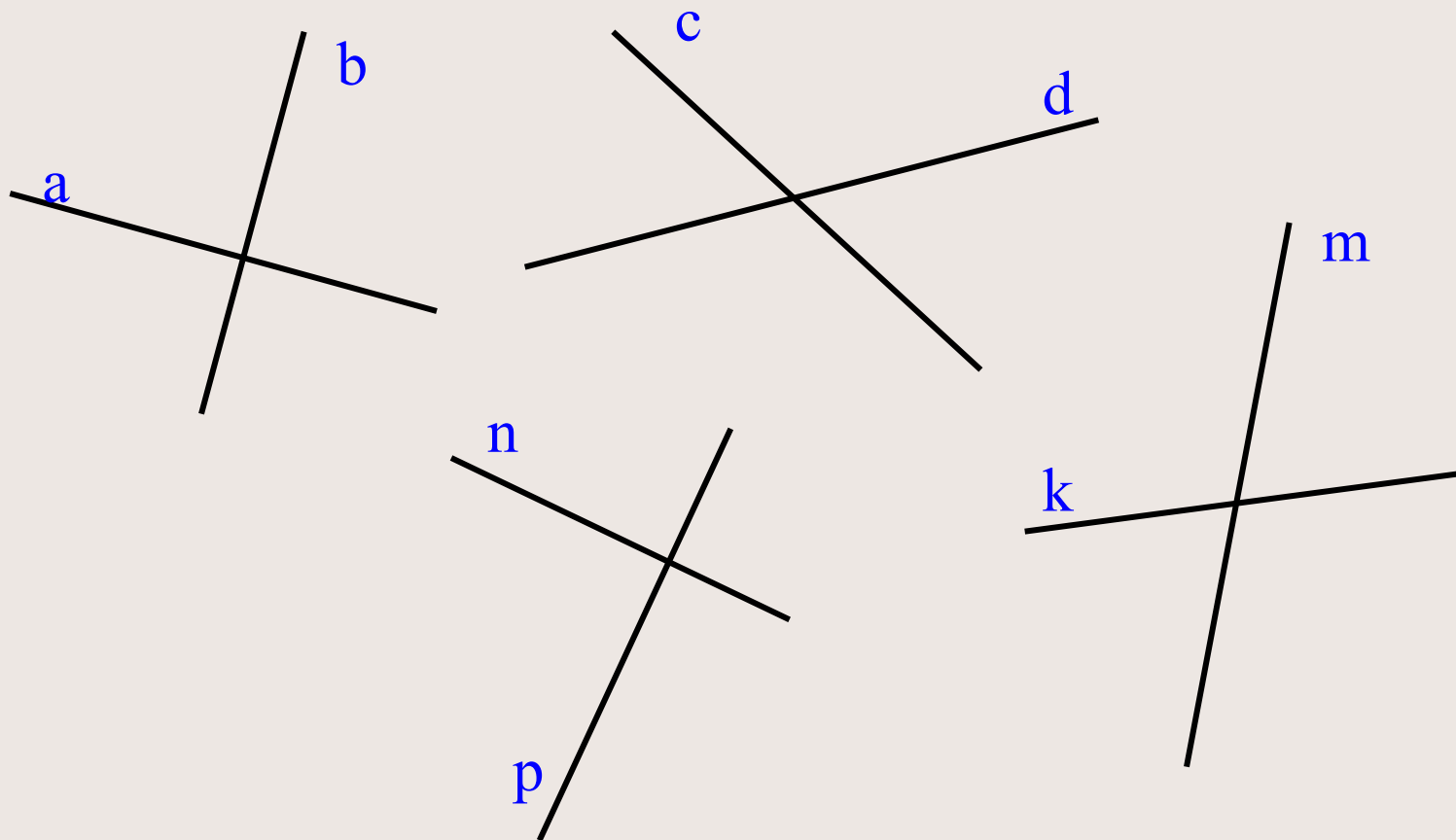
Перпендикуляром называется отрезок прямой, перпендикулярной данной, который имеет одним из своих концов точку пересечения прямых.

Отрезок BC – перпендикуляр.

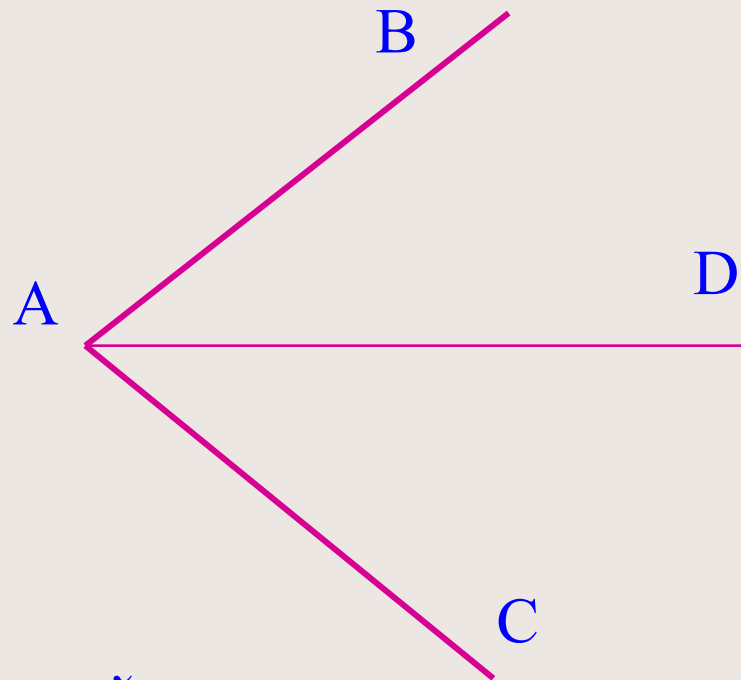
Точка C – основание перпендикуляра.



Найди перпендикулярные прямые
и запиши их в тетрадь:



Биссектриса угла



AD- биссектриса

$$\angle BAD = \angle CAD$$

$$\angle BAC = 2 \cdot \angle BAD$$

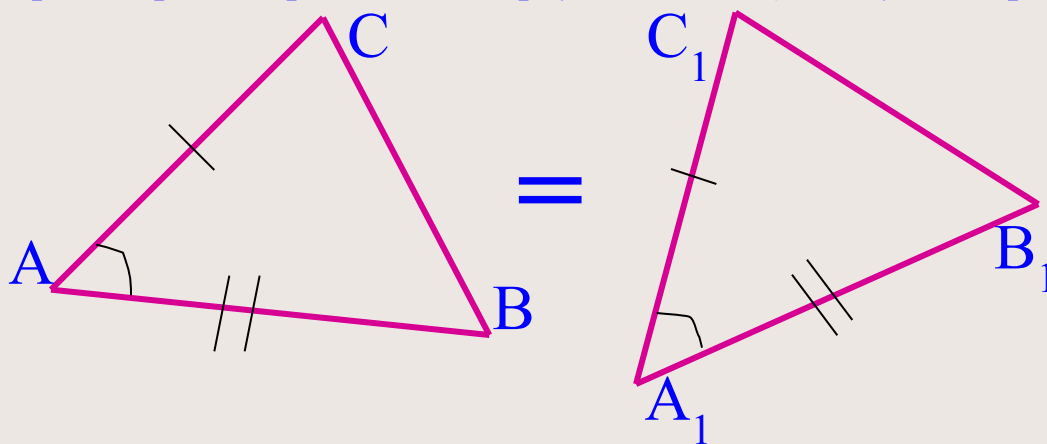
$$\angle CAD = \frac{1}{2} \angle BAC$$

Биссектрисой угла называется луч, который исходит из вершины угла, проходит между его сторонами и делит угол пополам.



1-ый и 2-ой признаки равенства треугольников

Первый признак равенства треугольников (По двум сторонам и углу между ними):



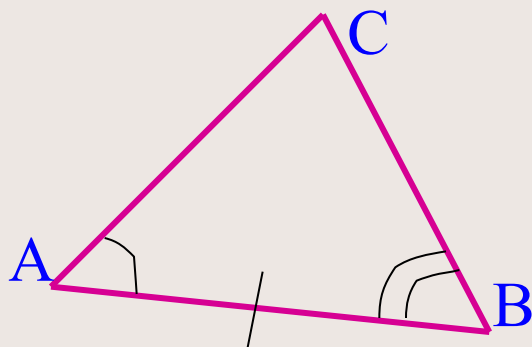
*Если две стороны и угол между ними одного треугольника
равны соответственно двум сторонам и углу между ними
другого треугольника,
то такие треугольники равны.*

$$AB=A_1B_1, AC=A_1C_1, \angle A=\angle A_1 \Rightarrow \triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$$

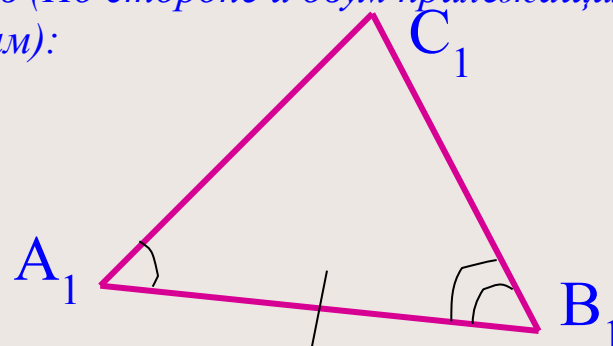


1-ый и 2-ой признаки равенства треугольников

Второй признак равенства треугольников (По стороне и двум прилежащим к ней углам):



=

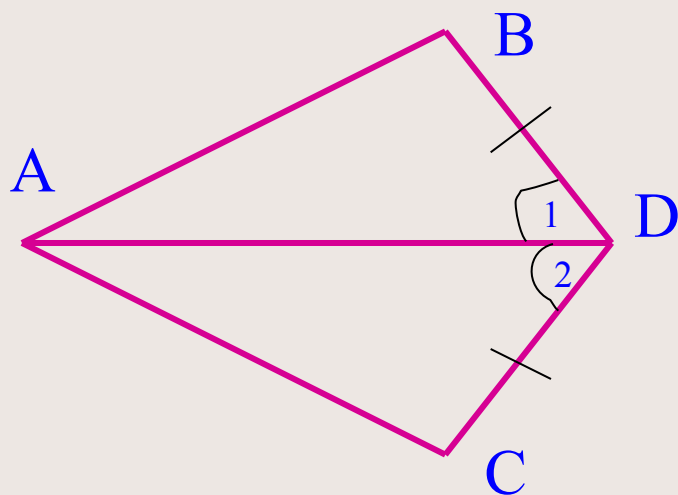


Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника равны соответственно стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

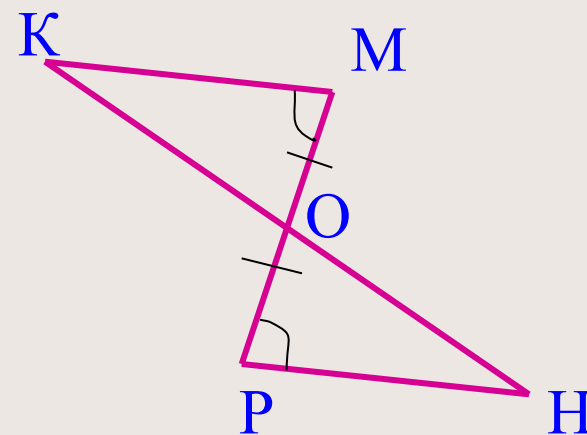
$$AB=A_1B_1, \angle A=\angle A_1, \angle B=\angle B_1 \Rightarrow \triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$$



Задачи



Почему равны треугольники
 ADB и ADC ?



Почему равны треугольники
 OMK и OPH ?

Какой признак равенства треугольников здесь
используется?

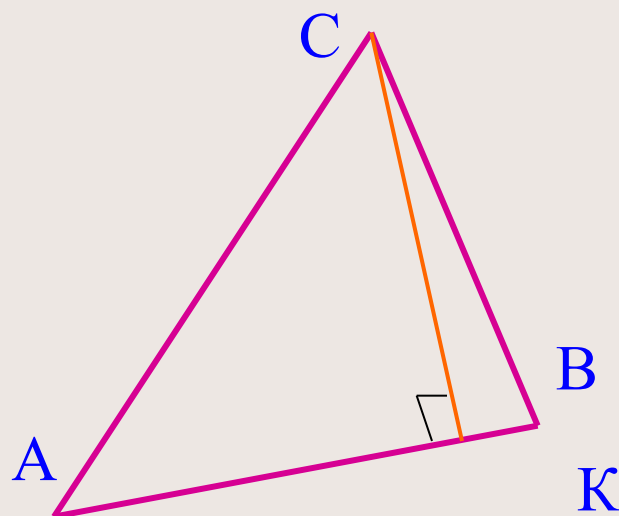
Сделай соответствующие записи в тетрадь.



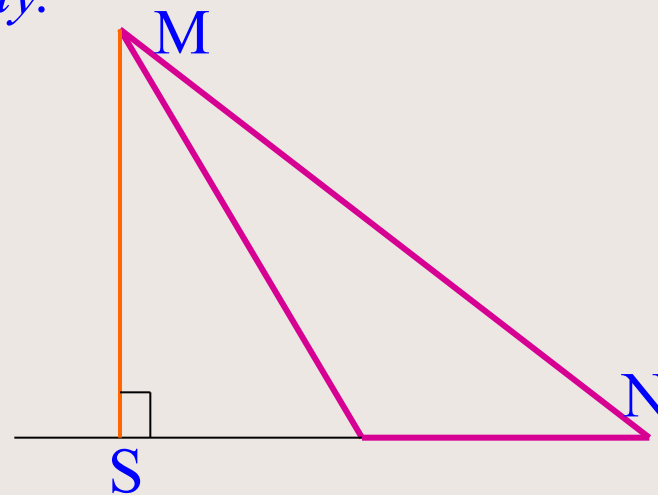
Подс
казка

Высота, медиана и биссектриса треугольника

Высотой треугольника, опущенной из данной вершины, называется перпендикуляр, проведённый из данной вершины к прямой, проходящей через противоположную сторону.



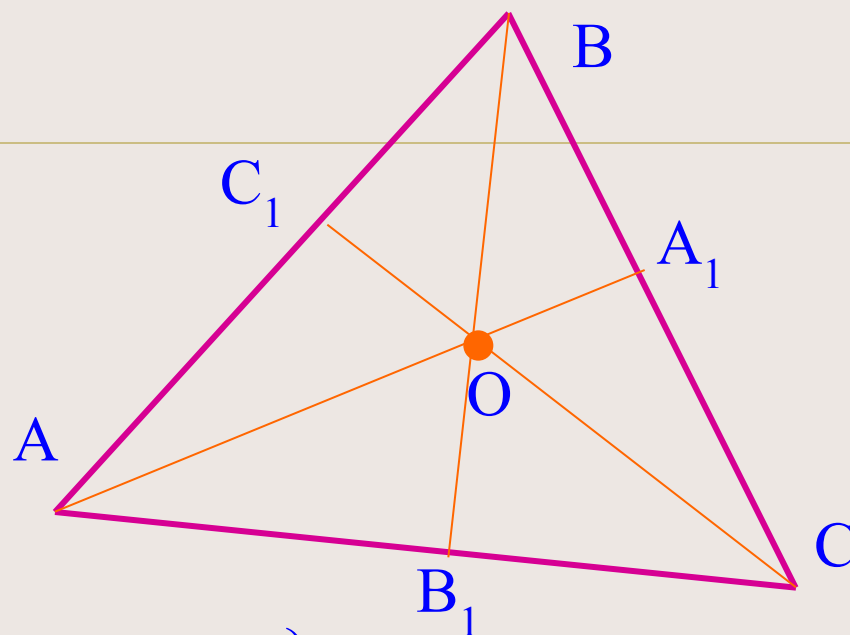
*CK – высота
треугольника ABC*



*MS – высота
треугольника PMN*



У любого треугольника – три высоты:



***Высоты** перпендикулярны прямой, содержащим противоположные стороны.*

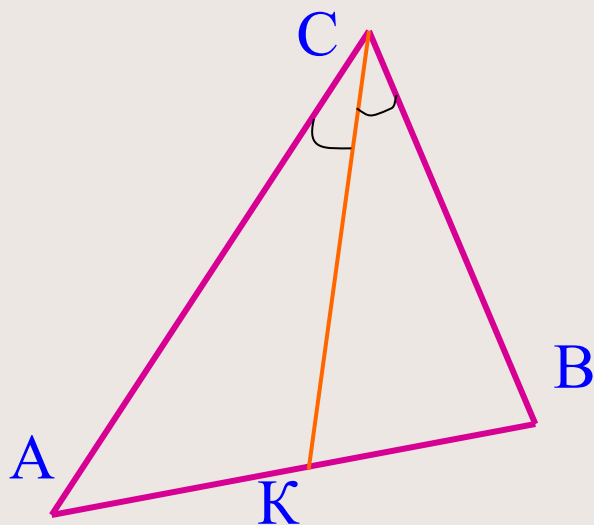
Три высоты треугольника пересекаются в одной точке – в точке O .

Сделай в тетради такой же рисунок, запиши высоты треугольника ABC . Укажи прямые углы.

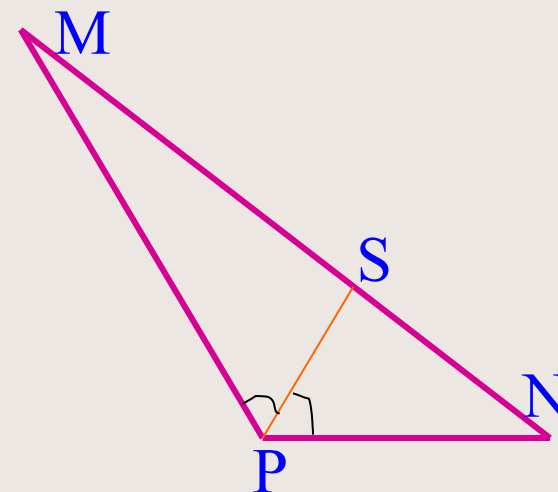


Высота, медиана и биссектриса треугольника

Биссектрисой треугольника, проведенной из данной вершины, называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий эту вершину с точкой на противоположной стороне.



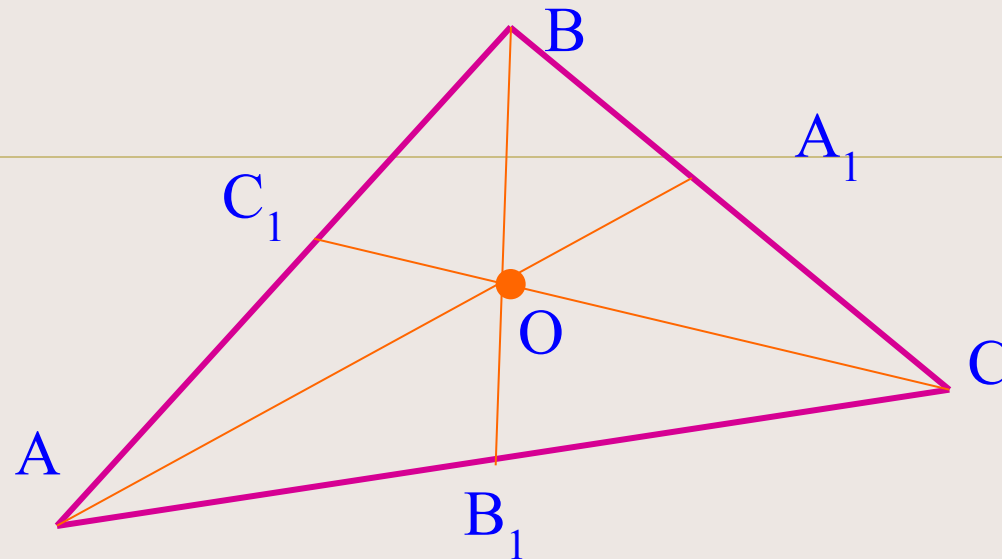
*CK – биссектриса
треугольника ABC*



*MS – биссектриса
треугольника PMN*



У любого треугольника – три биссектрисы:



Биссектрисы делят углы треугольника пополам.

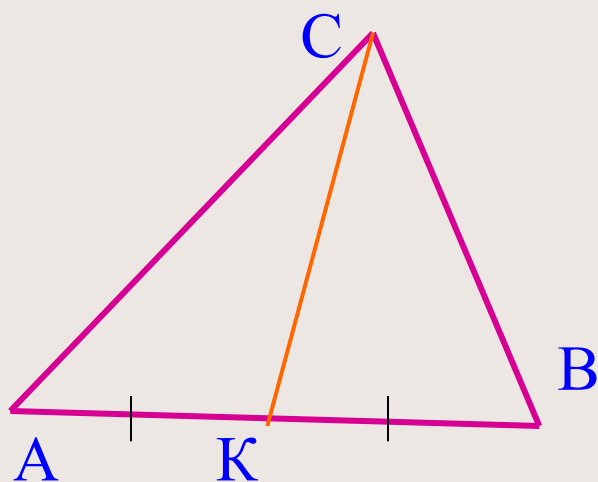
Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке – в точке O.

Сделай в тетради такой же рисунок, запиши биссектрисы треугольника ABC. Укажи равные углы.

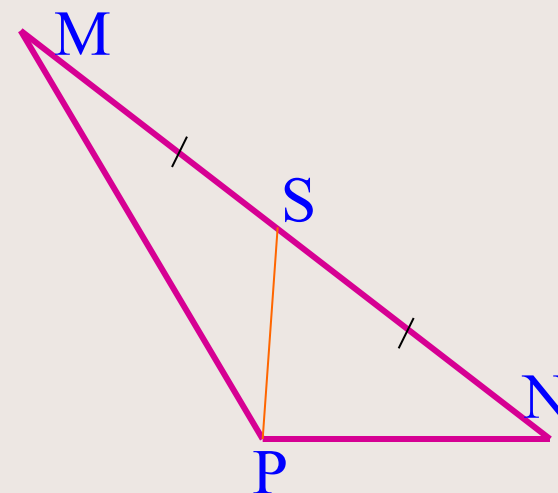


Высота, медиана и биссектриса треугольника

Медианой треугольника, проведенной из данной вершины, называется отрезок, соединяющий эту вершину с серединой противоположной стороны.



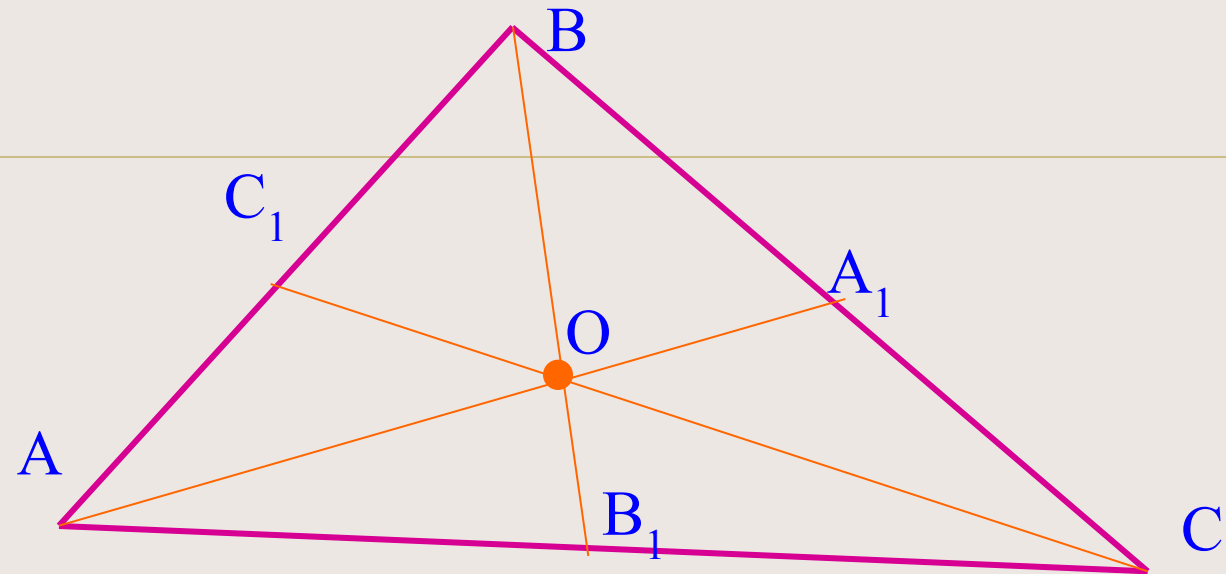
*CK – медиана
треугольника ABC*



*MS – медиана
треугольника PMN*



У любого треугольника – три медианы:



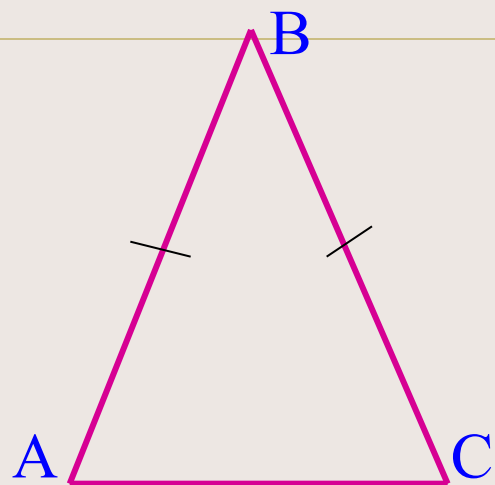
*Медианы делят противоположные стороны
треугольника **пополам**.*

*Три медианы треугольника пересекаются в одной
точке – в точке O.*

Сделай в тетради такой же рисунок, запиши медианы
треугольника ABC. Укажи равные отрезки.



Равнобедренный треугольник



$$AB=BC$$

AB и BC – боковые стороны.

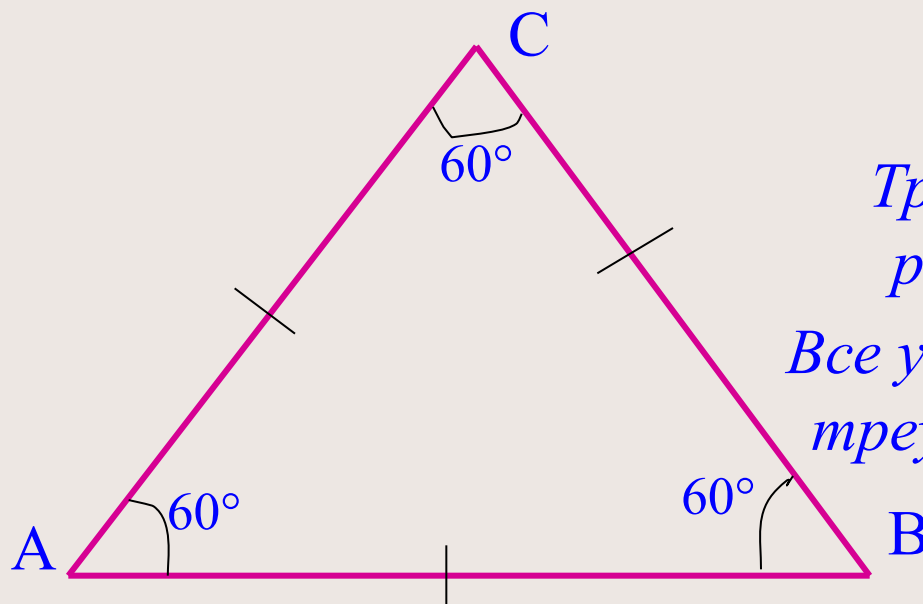
AC – основание.

*Треугольник называется **равнобедренным**, если у него две стороны равны.*

*Равные стороны называются **боковыми**, а третья сторона – **основанием**.*



Равносторонний треугольник



$$AB=BC=AC \Rightarrow$$

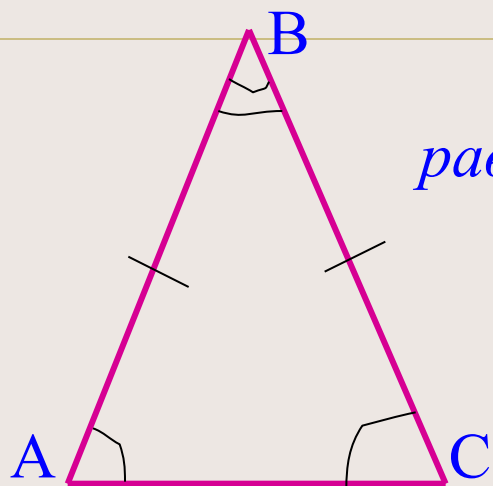
*Треугольник ABC -
равносторонний*

*Все углы равностороннего
треугольника равны 60° .*

*Треугольник, у которого все стороны равны,
называется **равносторонним**.*



Свойство углов равнобедренного треугольника



Угол между боковыми сторонами равнобедренного треугольника называется углом при вершине.

$\angle B$ - угол при вершине.

Углы A и C называются углами при основании.

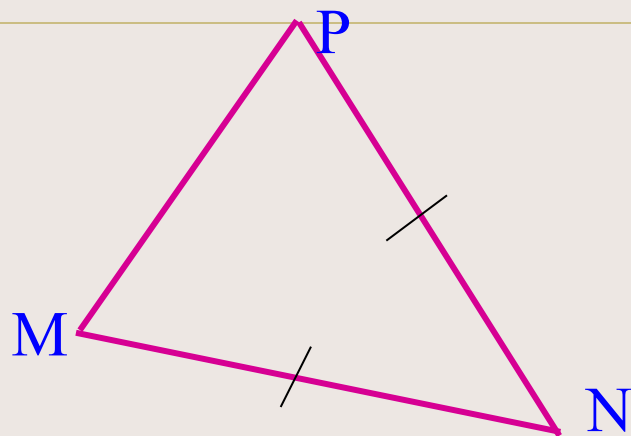
*Углы при основании равнобедренного треугольника равны:
 $\triangle ABC$ - равнобедренный $\Rightarrow \angle A = \angle C$.*

*Обратно: Если в треугольнике два угла равны,
то такой треугольник равнобедренный.*

*$\angle A = \angle C \quad \triangle ABC$ - равнобедренный.
 $\Rightarrow$*

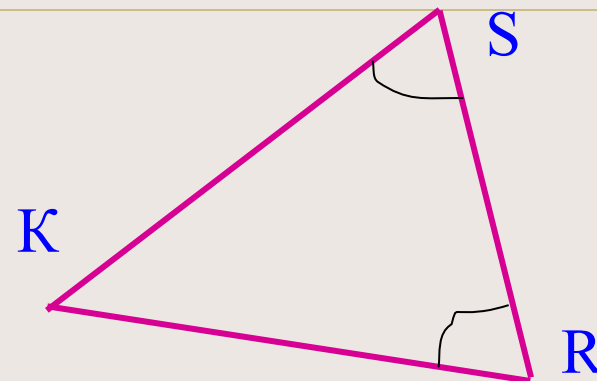


Сделай в тетради такой же рисунок и ответь письменно на вопросы:



Если в $\triangle MNP$ $MN=NP$, то
что можно сказать про
углы M и P ?

Почему?

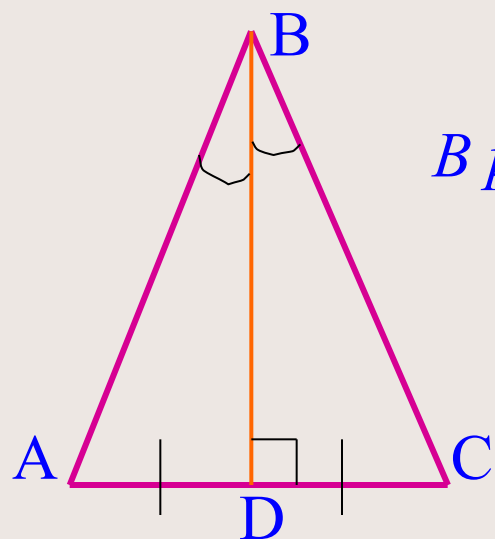


Если в $\triangle KRS$ $\angle S = \angle R$, то
что можно сказать про
его стороны?

Почему?



Свойство медианы равнобедренного треугольника



*В равнобедренном треугольнике **медиана**, проведенная к основанию, является **биссектрисой** и **высотой**.*

$\triangle ABC$ – равнобедренный ($AB=BC$), $AD = CD$ (BD - медиана) $\Rightarrow$
 $\angle ABD = \angle CBD$, $BD \perp AC$.



Образец решения задачи

1. Периметр равнобедренного треугольника равен 26 см.
Найти боковые стороны, если основание равно 6 см.

Дано: $\triangle ABC$ – равнобедр., $AC=BC$,
 $P=26$ см, $AB=6$ см.

Найти: AC , BC .

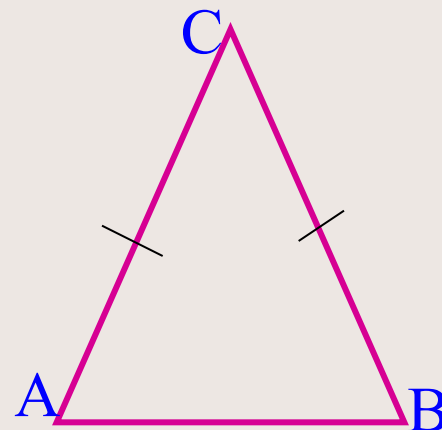
Решение: $P=AB+AC+BC$,

$$AC=BC \Rightarrow$$

$$P=AB+2AC, \Rightarrow 2AC=P-AB=26-6=20, \Rightarrow$$

$$AC=20:2=10.$$

Ответ: $AC=BC=10$ см.



Образец решения задачи

2. В равнобедренном треугольнике боковая сторона на 3 см больше основания, а периметр равен 27 см. Найти стороны треугольника.

Дано: $\triangle ABC$ – равнобедр., $AC=BC$,
 $P=27$ см, $AC > AB$ на 3 см.

Найти: AB , AC , BC .

Решение: $P = AB + AC + BC$,

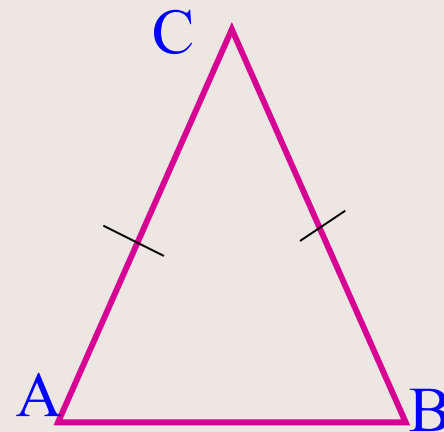
Пусть $AB = x$, тогда $AC = BC = x + 3$.

Составим уравнение:

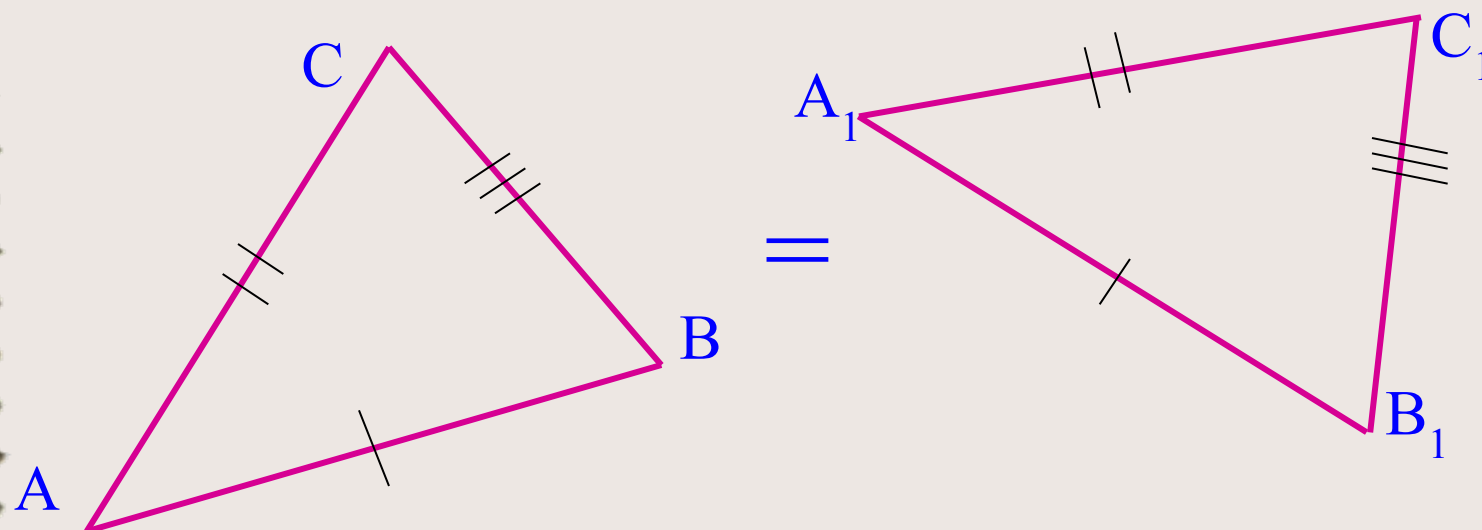
$$x + x + 3 + x + 3 = 27 \Rightarrow 3x + 6 = 27 \Rightarrow 3x = 27 - 6 = 21 \Rightarrow$$

$$x = 21 : 3 = 7 \Rightarrow AB = 7 \text{ см}, AC = BC = 7 + 3 = 10 \text{ см}.$$

Ответ: $AB = 7$ см, $AC = BC = 10$ м.



3-ий признак равенства треугольников



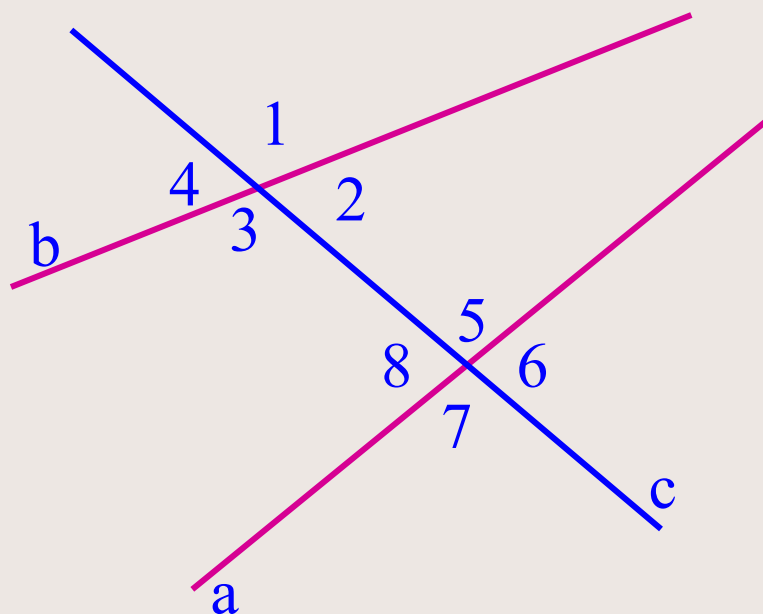
Если **три стороны** одного треугольника **равны** соответственно **трем сторонам** другого треугольника, то такие **треугольники равны**.

$$AB=A_1B_1, \quad AC=A_1C_1, \quad BC=B_1C_1 \Rightarrow \triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1.$$



Признаки параллельности прямых

Углы, образованные при пересечении двух
прямых секущей.



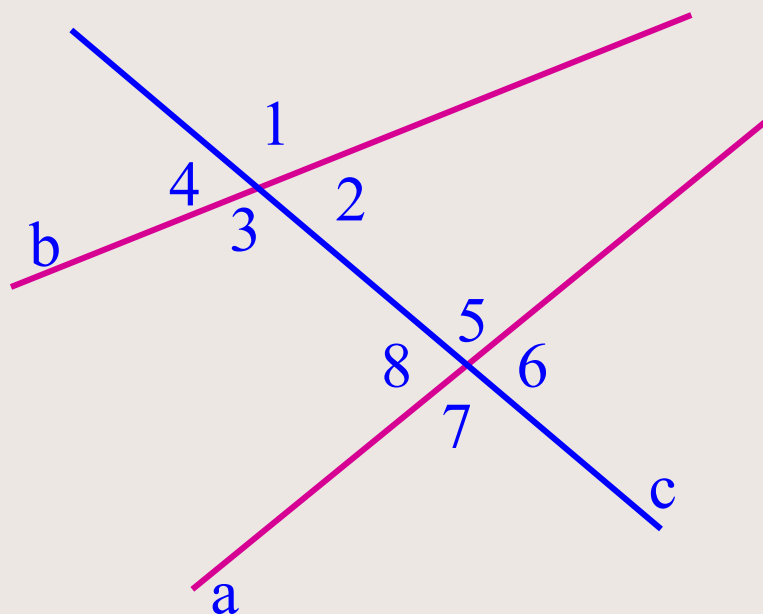
$\angle 2$ и $\angle 5$ – внутренние
односторонние.

$\angle 3$ и $\angle 8$ – внутренние
односторонние.



Признаки параллельности прямых

Углы, образованные при пересечении двух
прямых секущей.



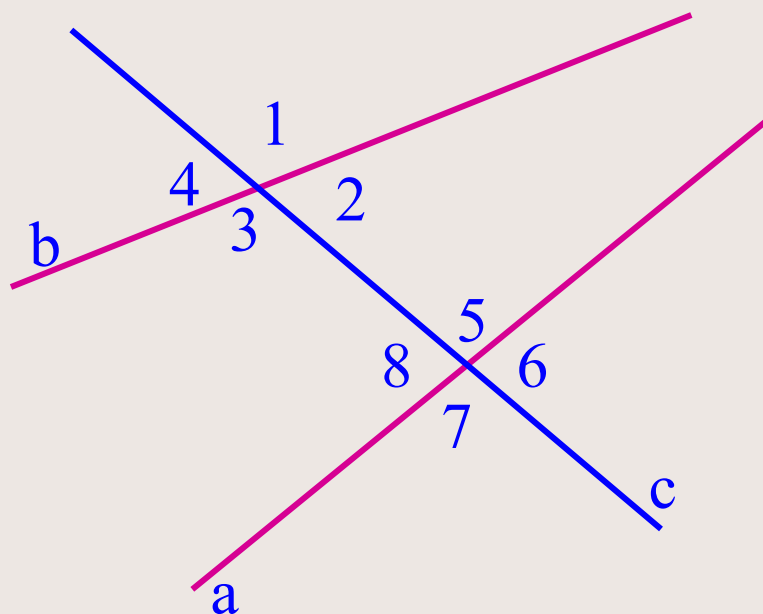
$\angle 2$ и $\angle 8$ – внутренние
накрест лежащие.

$\angle 3$ и $\angle 5$ – внутренние
накрест лежащие.



Признаки параллельности прямых

Углы, образованные при пересечении двух
прямых секущей.



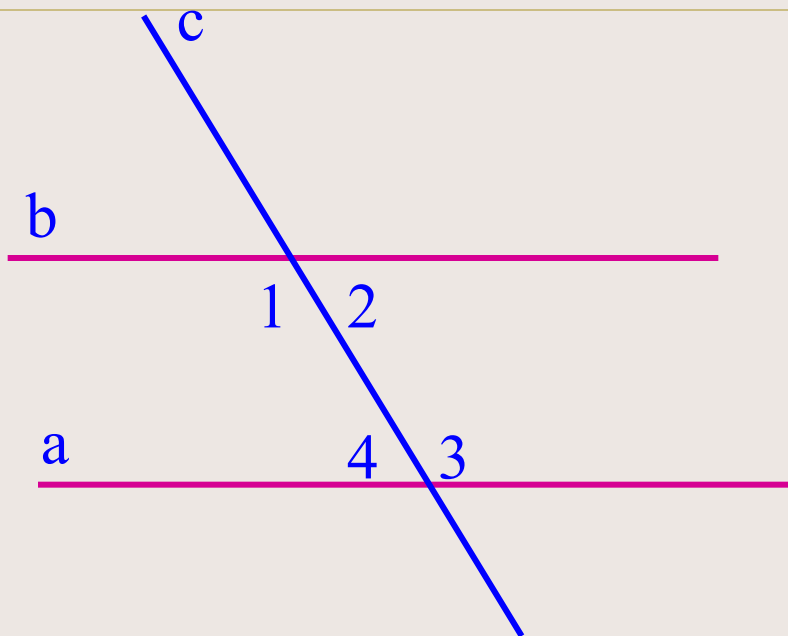
$\angle 1$ и $\angle 5$ –
соответственные углы.

$\angle 2$ и $\angle 6$ –
соответственные углы.

$\angle 4$ и $\angle 8$, $\angle 3$ и $\angle 7$ –
соответственные углы.



Признаки параллельности прямых



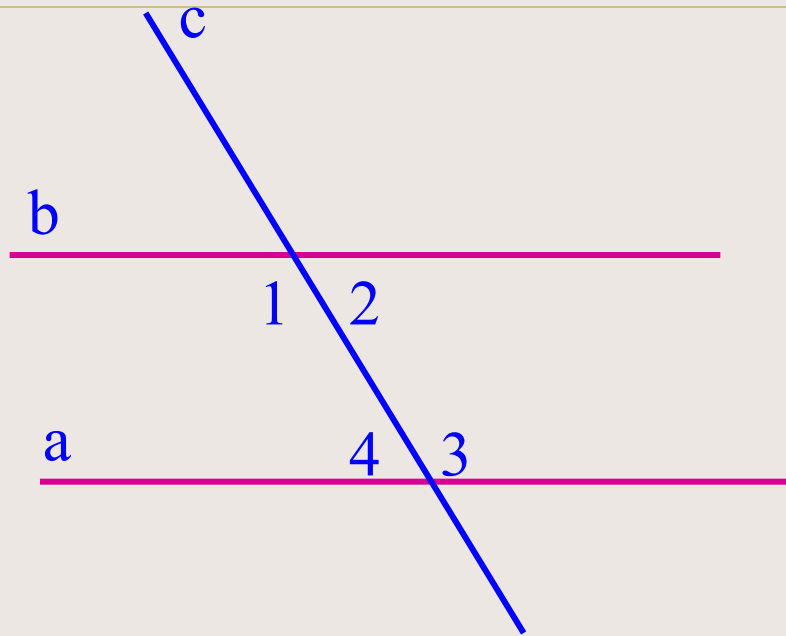
$$\angle 1 = \angle 3 \Rightarrow a \parallel b$$

$$\angle 2 = \angle 4 \Rightarrow a \parallel b$$

1 признак: Если при пересечении двух прямых секущей внутренние накрест лежащие углы равны, то эти прямые параллельны.



Признаки параллельности прямых



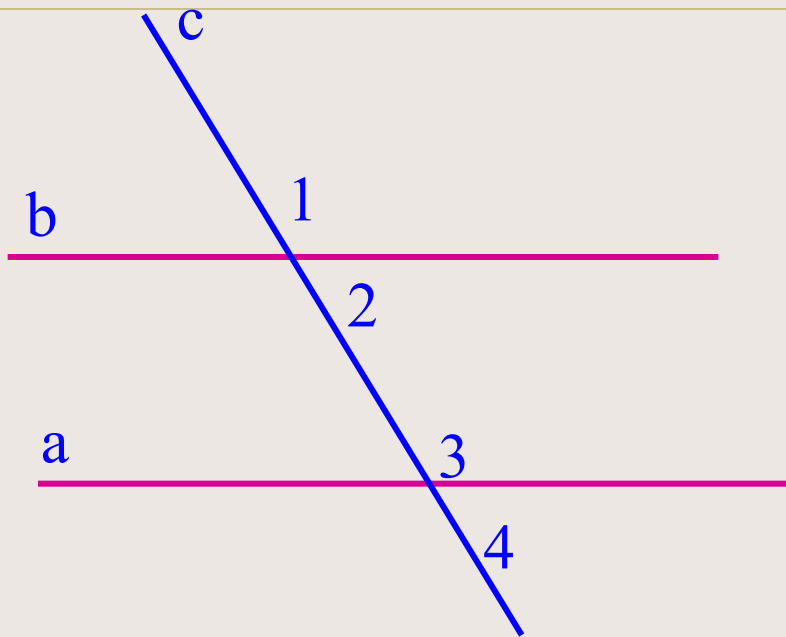
$$\angle 1 + \angle 4 = 180^\circ \Rightarrow a \parallel b$$

$$\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ \Rightarrow a \parallel b$$

2 признак: Если при пересечении двух прямых секущей сумма внутренних односторонних углов равна 180° , то эти прямые параллельны.



Признаки параллельности прямых



$$\angle 1 = \angle 3 \Rightarrow a \parallel b$$

$$\angle 2 = \angle 4 \Rightarrow a \parallel b$$

3 признак: Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны , то эти прямые параллельны.



Образец решения задачи

1. Один из углов, которые получаются при пересечении двух параллельных прямых секущей, равен 50° . Найти остальные углы.

Дано: $a \parallel b$, c -секущая, $\angle 2 = 50^\circ$.

Найти: $\angle 1, \angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6, \angle 7,$

Решение: $\angle 8$.

$$\angle 4 = \angle 2 (\text{вн.накр.леж.}) \Rightarrow \angle 4 = 50^\circ.$$

$$\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ \Rightarrow$$

$$\angle 3 = 180^\circ - \angle 2 = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ.$$

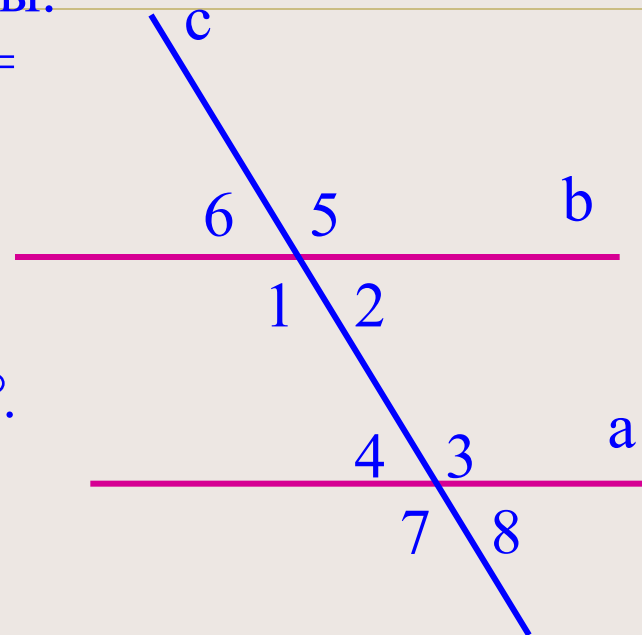
$$\angle 1 = \angle 3 (\text{вн.накр.леж.}) \Rightarrow \angle 1 = 130^\circ$$

$$\angle 5 = \angle 3, \angle 7 = \angle 1 (\text{соответств.углы})$$

$$\angle 8 = \angle 2, \angle 6 = \angle 4 (\text{соответств.углы}) \Rightarrow \angle 8 = \angle 4 = 50^\circ.$$

$$\text{Ответ: } \angle 1 = \angle 3 = \angle 5 = \angle 7 = 130^\circ,$$

$$\angle 4 = \angle 6 = \angle 8 = 50^\circ.$$



Образец решения задачи

2. Разность двух внутренних односторонних углов, которые получаются при пересечении двух параллельных прямых секущей, равна 40° . Найти эти углы.

Дано: $a \parallel b$, c -секущая,

$$\angle 4 = 40^\circ.$$

Найти: $\angle 1$, $\angle 4$.

Решение:

$$\angle 1 + \angle 4 = 180^\circ (\text{вн. накр. леж.})$$

Пусть $\angle 4 = x \Rightarrow$

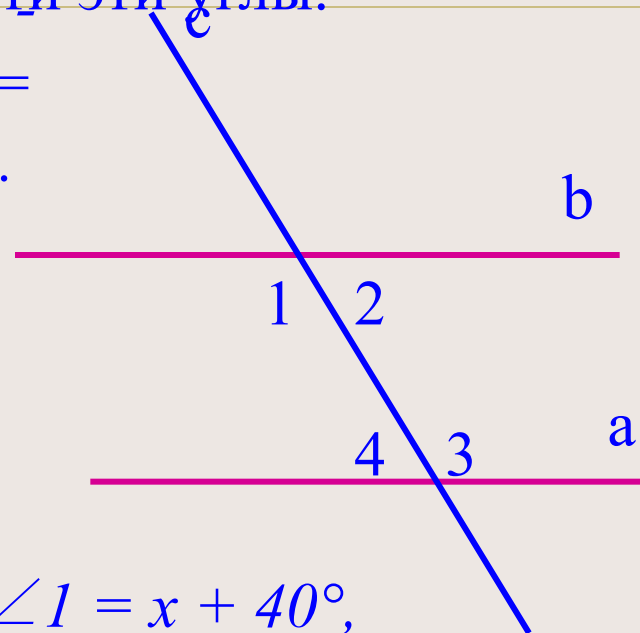
$$\angle 1 - x = 40^\circ (\text{по условию}), \text{ тогда } \angle 1 = x + 40^\circ,$$

$$\text{Составим уравнение: } x + 40^\circ + x = 180^\circ,$$

$$2x + 40^\circ = 180^\circ \Rightarrow 2x = 180^\circ - 40^\circ, 2x = 140^\circ,$$

$$x = 140^\circ : 2 = 70^\circ. \angle 4 = 70^\circ, \angle 1 = 70^\circ + 40^\circ = 110^\circ.$$

Ответ: $\angle 1 = 110^\circ, \angle 4 = 70^\circ$.



Образец решения задачи

3. Сумма внутренних накрест лежащих углов, которые получаются при пересечении двух параллельных прямых секущей, равна 130° . Найти эти углы.

Дано: $a \parallel b$, c -секущая,
($\angle 1$ и $\angle 3$ - тупые углы,
поэтому их сумма не может
равняться 130°)

$$\angle 2 + \angle 4 = 130^\circ.$$

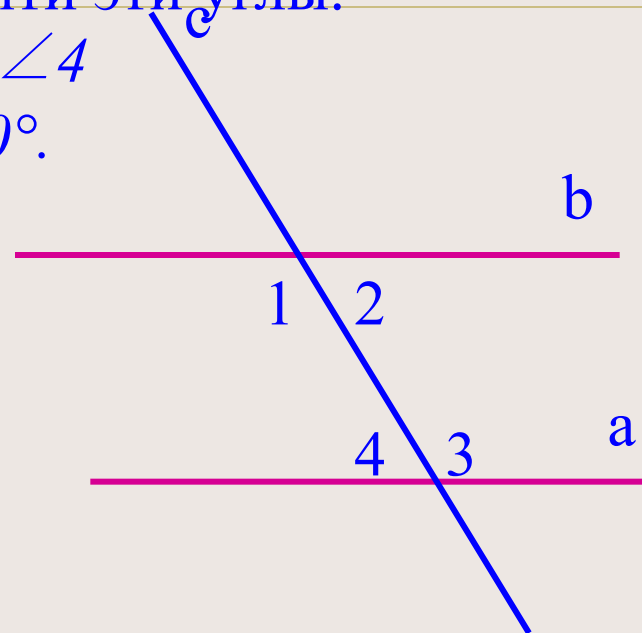
Найти: $\angle 2, \angle 4$.

Решение:

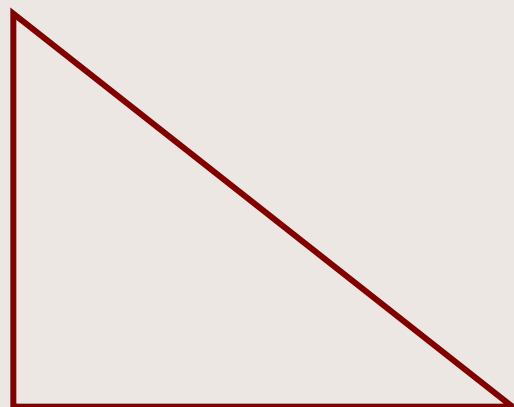
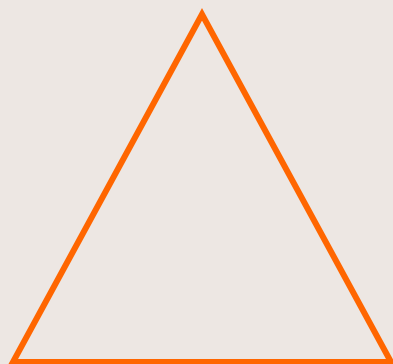
$$\angle 2 = \angle 4 (\text{вн. накр. лежа.}) \Rightarrow \angle 2 + \angle 2 = 130^\circ,$$

$$\angle 2 = 130^\circ : 2 = 65^\circ.$$

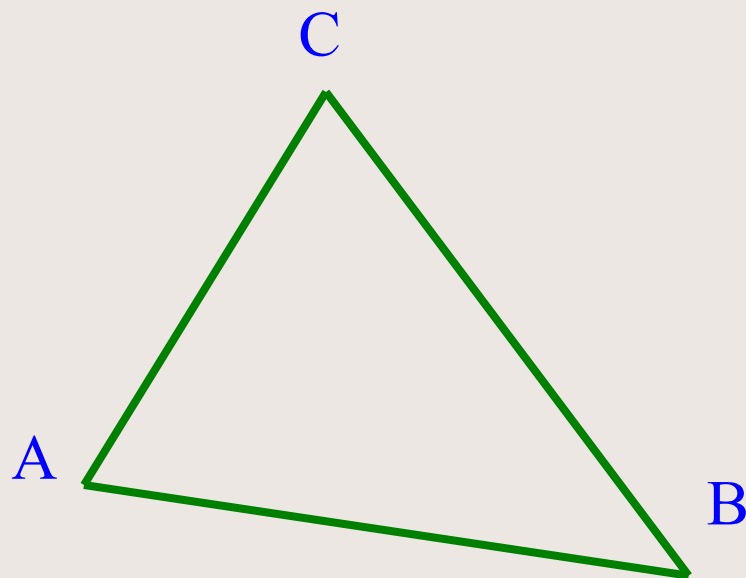
Ответ: $\angle 2 = \angle 4 = 65^\circ$.



Сумма углов треугольника



Сумма углов треугольника



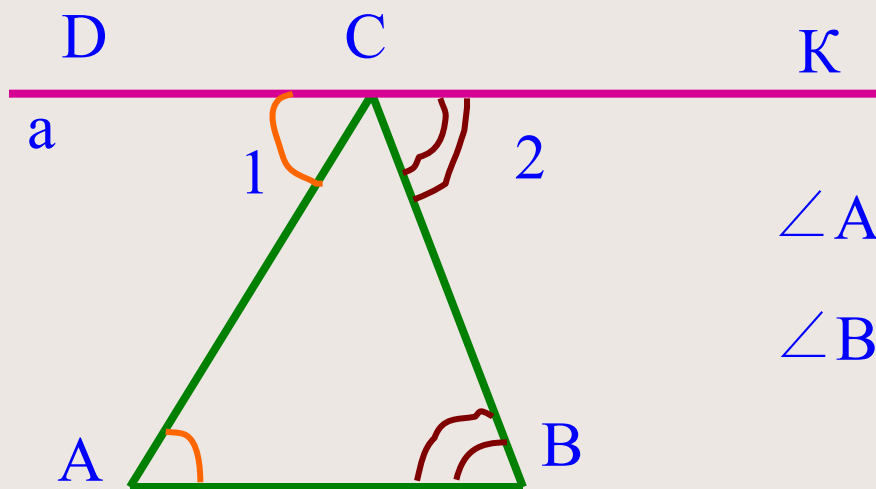
$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

Сумма внутренних углов треугольника равна 180° .



Сумма углов треугольника = 180° .

Через точку С проведем прямую $a \parallel AB$



$\angle A = \angle 1$ (внутр.накрест леж)

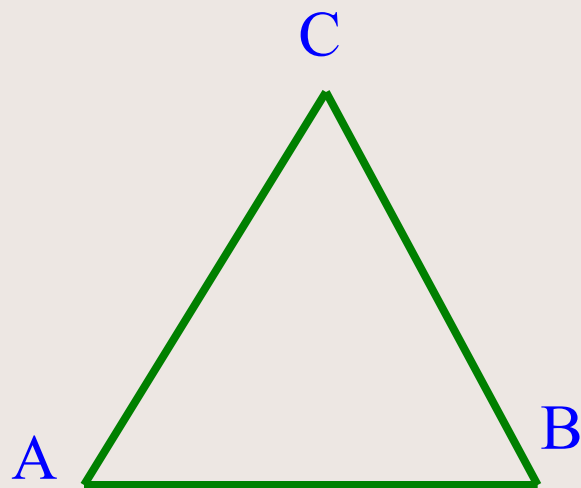
$\angle B = \angle 2$ (внутр.накрест леж)

$$\angle A + \angle B + \angle C = \angle 1 + \angle 2 + \angle C = \angle DCK = 180^\circ \text{ (развёрнутый)}$$

=



У равностороннего треугольника все углы
равны 60° .



$\triangle ABC$ - равносторонний

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

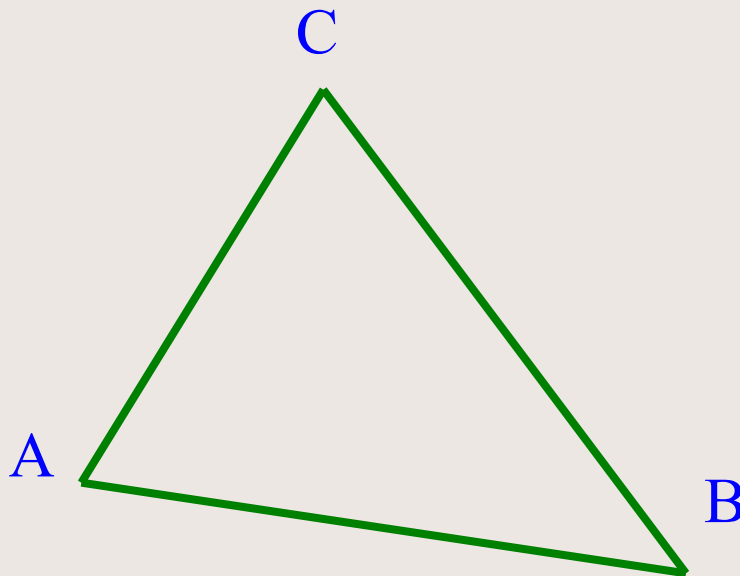
$$\angle A = \angle B = \angle C \Rightarrow$$

$$\angle A = \angle B = \angle C = 180^\circ : 3 = 60^\circ$$



Задачи для устного решения:

1. В треугольнике ABC один угол равен 50° , второй 70° . Найти третий угол.



Подсказка

Задачи для устного решения:

2. Существует ли треугольник, у которого углы равны 80° , 30° и 60° ?



Подсказка

Задачи для устного решения:

3. Существует ли треугольник, у которого два угла тупые?



Подсказка

Задачи для устного решения:

4. Может ли угол при основании равнобедренного треугольника быть тупым?



Подсказка

Опорные задачи

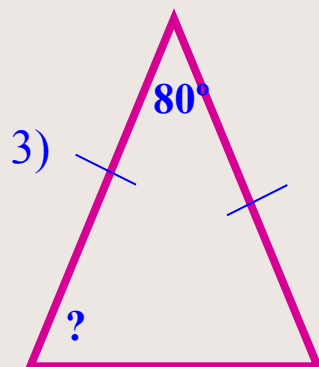
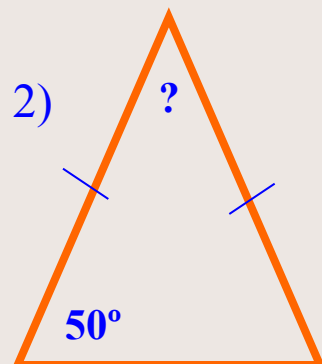
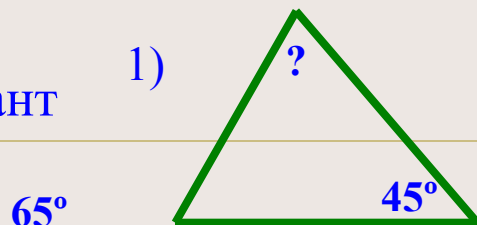
1. Найти углы треугольника, если известно, что второй угол больше первого на 20° , а третий угол больше первого на 40° .
2. Найти углы при основании равнобедренного треугольника, если угол при вершине равен 30° .
3. Найти угол при вершине равнобедренного треугольника, если угол при основании равен 70° .



Найди неизвестные углы:

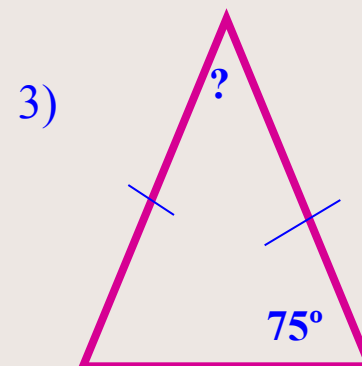
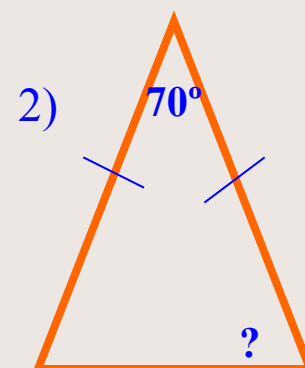
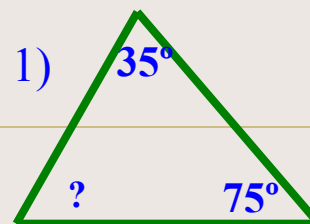
1 вариант

1)



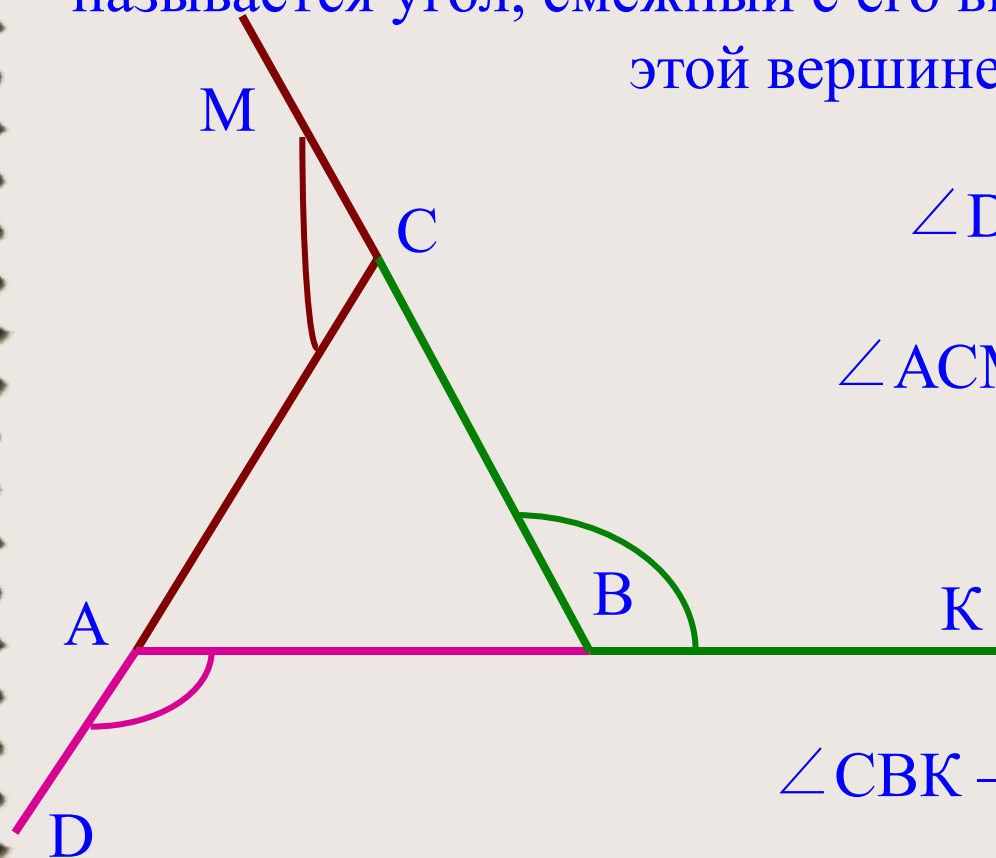
2 вариант

1)



Внешний угол треугольника.

Внешним углом треугольника при данной вершине называется угол, смежный с его внутренним углом при этой вершине.



$\angle DAB$ – внешний
угол

$\angle ACM$ – внешний угол

$\angle CBK$ – внешний угол



Внешний угол треугольника равен сумме
двух внутренних углов треугольника, не
смежных с ним.

$$\angle DAB = \angle B + \angle C$$

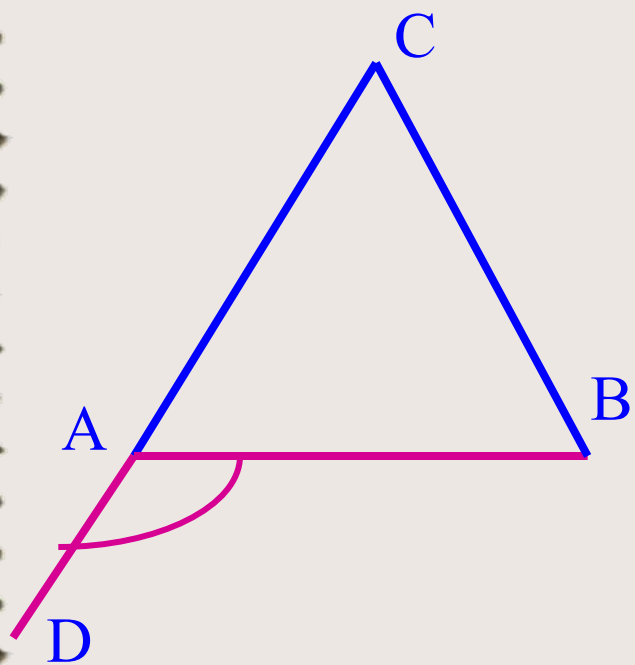
$$\angle DAB + \angle A = 180^\circ (\text{смежные углы}) \Rightarrow$$

$$\angle DAB = 180^\circ - \angle A$$

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \Rightarrow$$

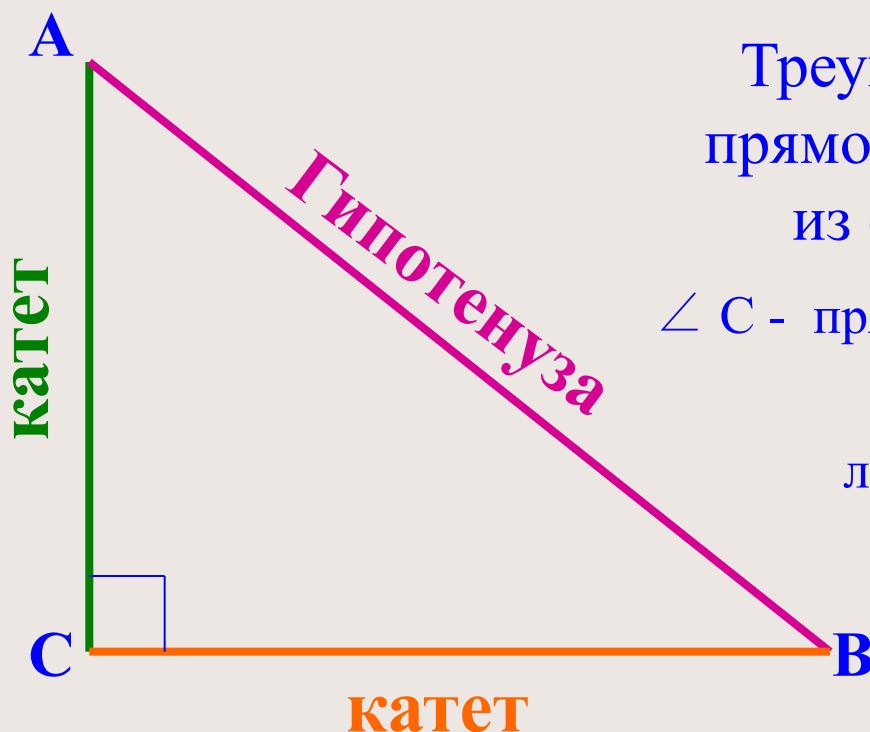
$$\angle B + \angle C = 180^\circ - \angle A \Rightarrow$$

$$\angle DAB = \angle B + \angle C$$



Признаки равенства прямоугольных треугольников

Определение прямоугольного треугольника



Треугольник называется
прямоугольным, если один
из его углов прямой.

$\angle C$ - прямой, $\triangle ABC$ - прямоугольный

Сторона треугольника,
лежащая напротив прямого
угла - гипотенуза

Две другие стороны -
катеты

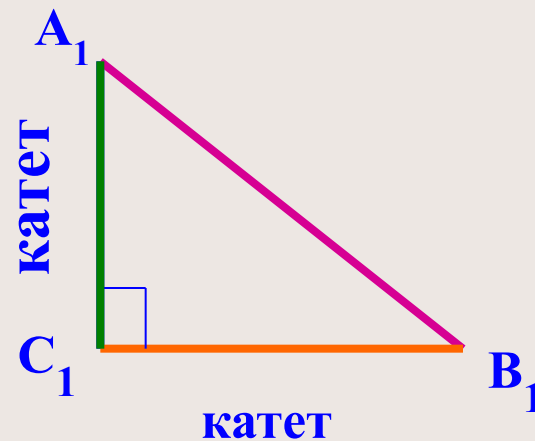
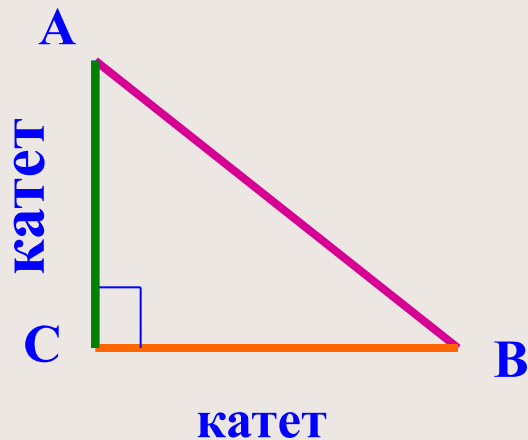


Признаки равенства прямоугольных треугольников

Первый признак

Если катеты одного треугольника
соответственно равны катетам
другого, то такие прямоугольные
треугольники равны.

$$\left. \begin{array}{l} AC = A_1C_1 \\ BC = B_1C_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$$

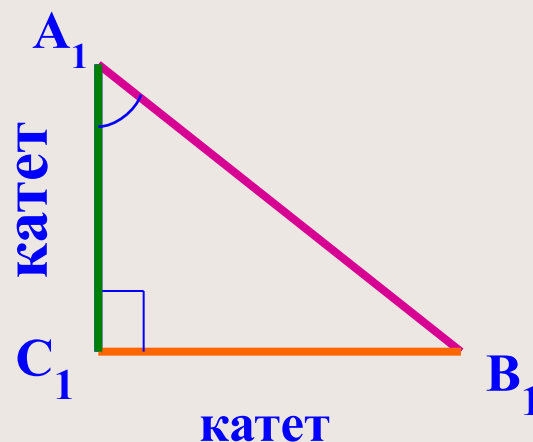
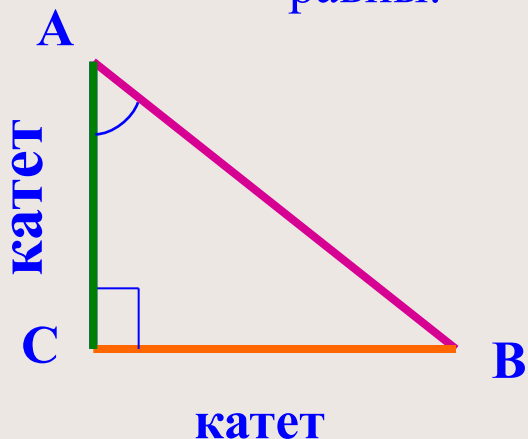


Признаки равенства прямоугольных треугольников

Второй признак

Если катет и прилежащий острый
угол одного треугольника
соответственно равны катету и
острому углу другого, то такие
прямоугольные треугольники
равны.

$$\left. \begin{array}{l} AC = A_1C_1 \\ \angle A = \angle A_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$$



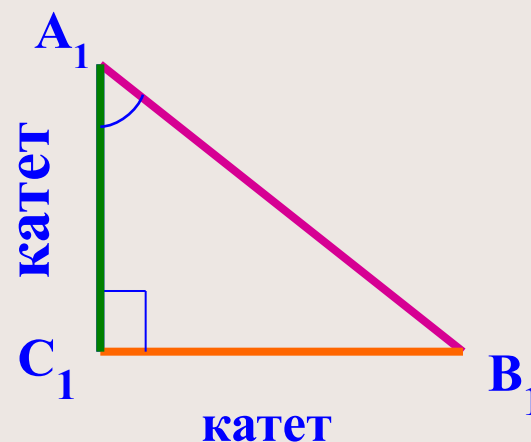
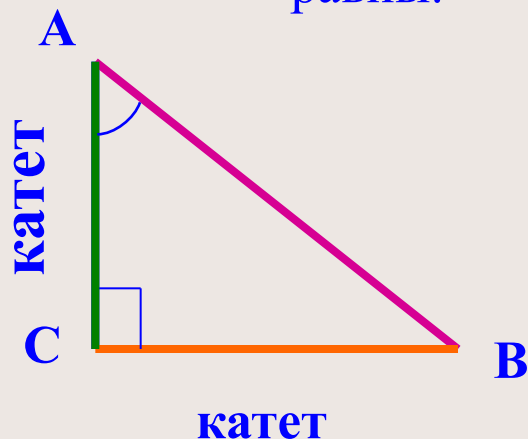
Признаки равенства прямоугольных треугольников

Третий признак

Если гипотенуза и прилежащий острый угол одного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то такие прямоугольные треугольники

равны.

$$\left. \begin{array}{l} AB = A_1B_1 \\ \angle A = \angle A_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$$

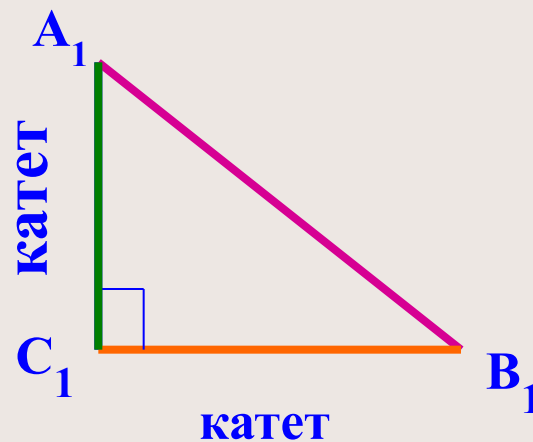
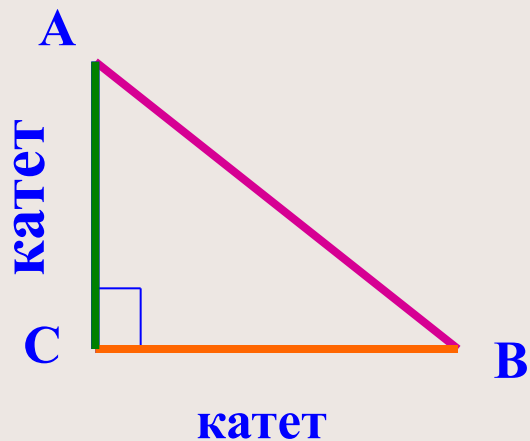


Признаки равенства прямоугольных треугольников

Четвертый признак

Если катет и гипотенуза одного
треугольника соответственно
равны катету и гипотенузе
другого, то такие прямоугольные
треугольники равны.

$$\left. \begin{array}{l} AC = A_1C_1 \\ AB = A_1B_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$$



Расстояние от точки до прямой

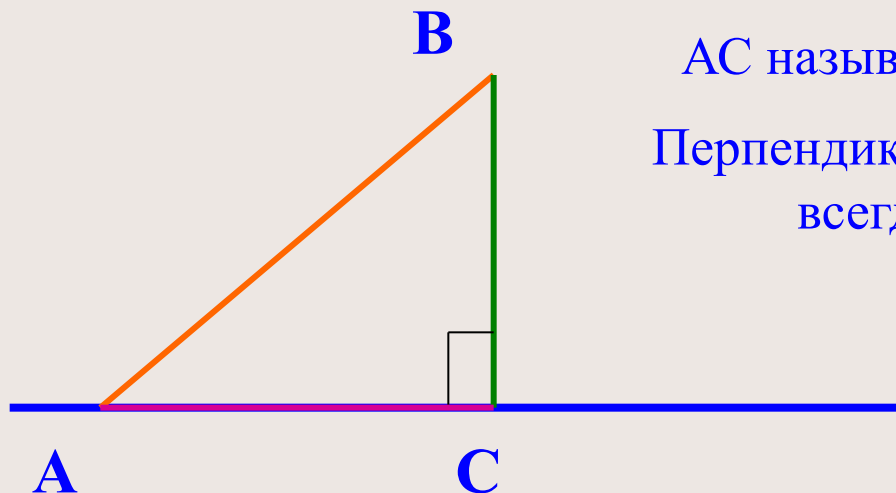
BC называется перпендикуляром

AB называется наклонной

AC называется проекцией наклонной

Перпендикуляр и проекция наклонной
всегда меньше наклонной

$$AC < AB, \quad BC < AB$$



Расстоянием от точки до прямой называют длину перпендикуляра,
опущенного из этой точки на прямую

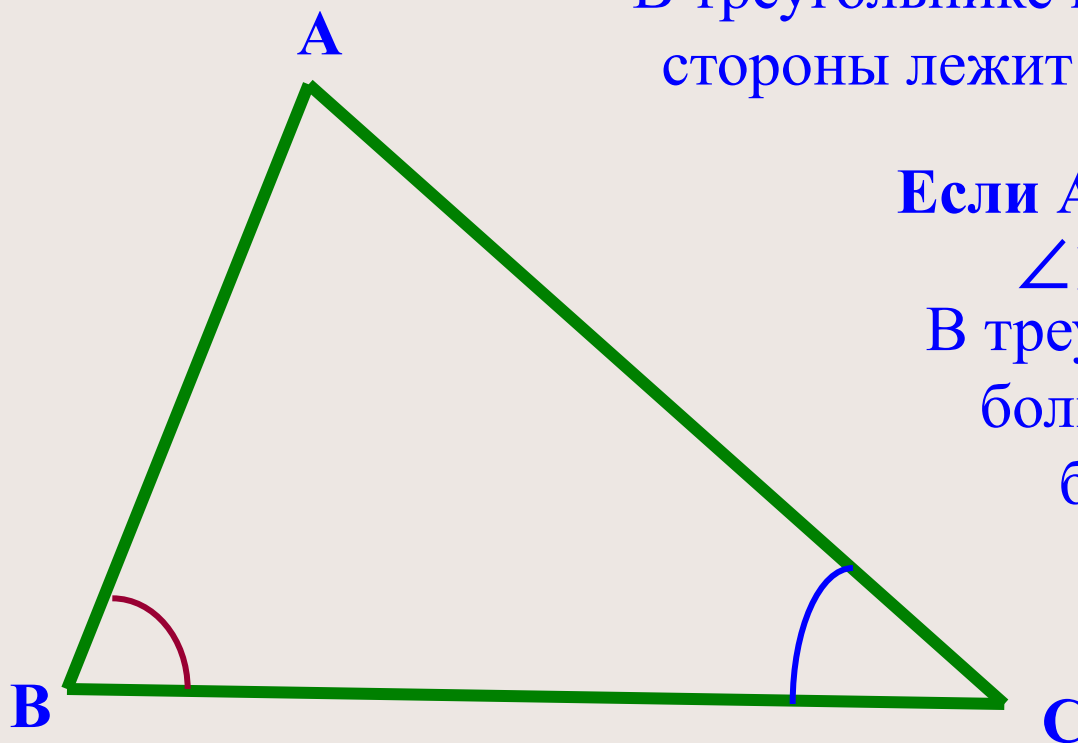


Соотношения между сторонами и углами треугольника

В треугольнике против большей стороны лежит больший угол.

Если $AC > AB$, то
 $\angle B > \angle C$.

В треугольнике против
большего угла лежит
большая сторона.

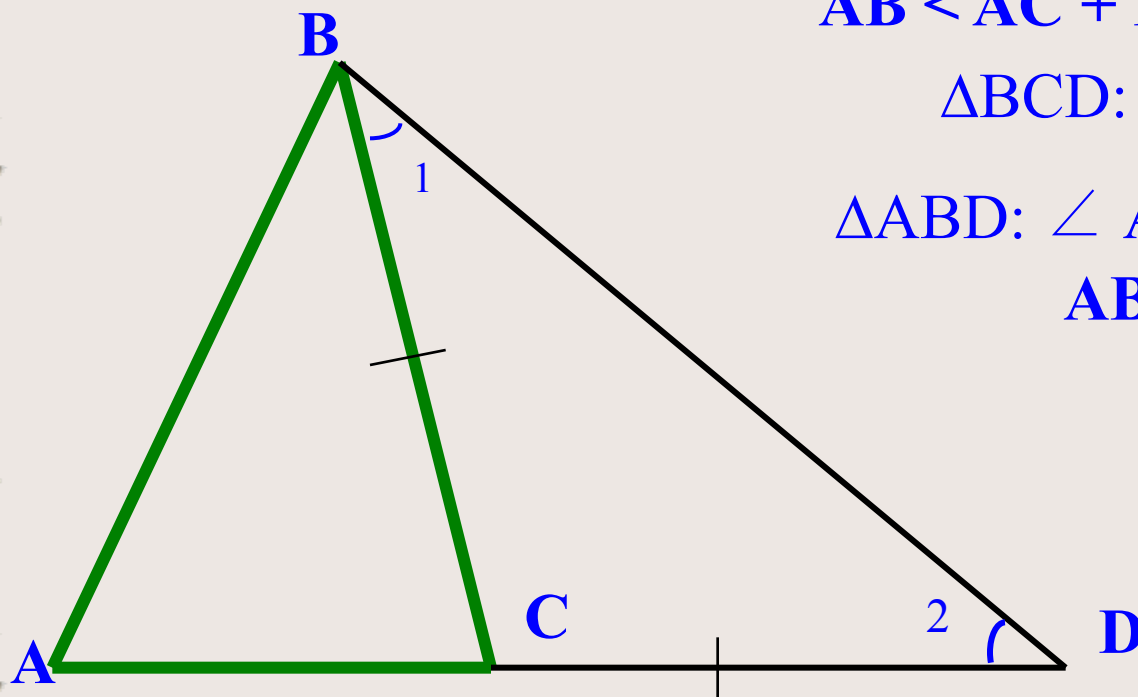


Если $\angle B > \angle C$, то $AC > AB$.



Неравенство треугольника

Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.



$$AB < AC + BC$$

$$\triangle BCD: \angle 1 = \angle 2$$

$$\triangle ABD: \angle ABD > \angle 1 = \angle 2$$

$$AB \Rightarrow AD = AC +$$

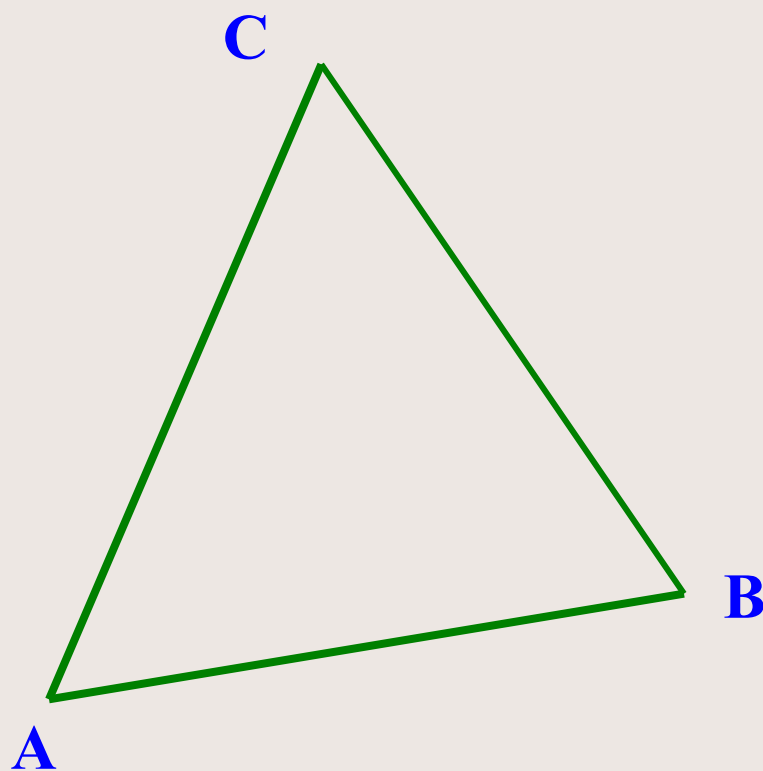
$$CD = BC$$

$\Rightarrow$

$$AB < AC + BC$$



Неравенство треугольника



$$AB < AC + BC$$

$$AC < AB + BC$$

$$BC < AB + AC$$



Задача: Существует ли треугольник с
данными сторонами и почему?

8 см, 10 см, 17см

5 см, 7 см, 13см

Подска
зка



Задачи для устного решения:

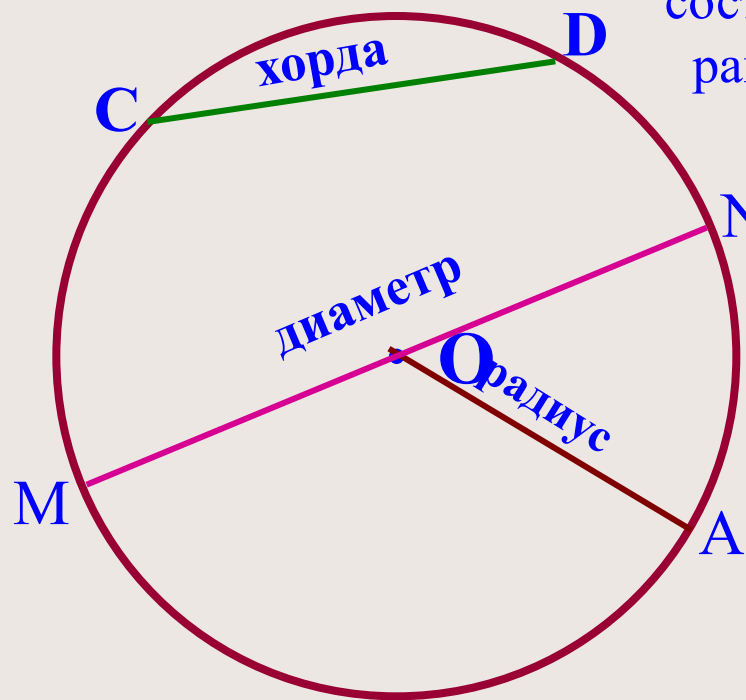
1. Могут ли стороны треугольника относиться как $5:2:4$?
2. Могут ли стороны треугольника относиться как $6:9:16$?
3. Могут ли стороны треугольника относиться как $5:11:6$?

Ответ



Окружность.

Окружностью называется фигура, состоящая из всех точек плоскости, равноудалённых от данной точки



Точка O - центр окружности

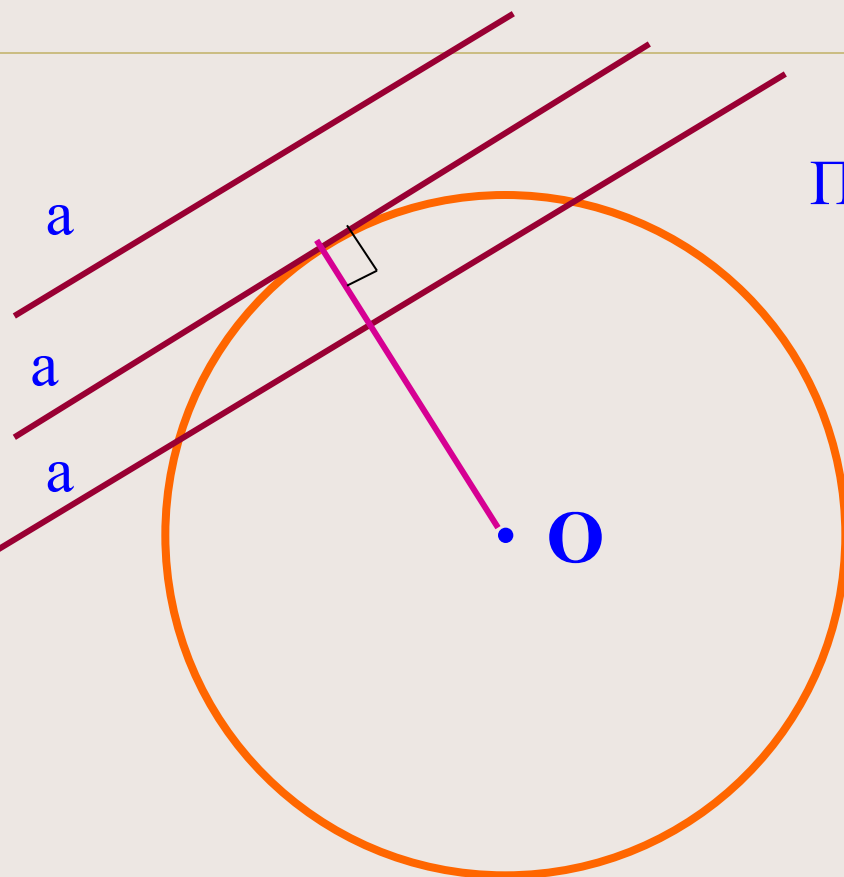
OA - радиус окружности

CD - хорда окружности

MN - диаметр окружности



Касательная к окружности



Прямая может не пересекать
окружность

Прямая может пересекать
окружность в двух точках

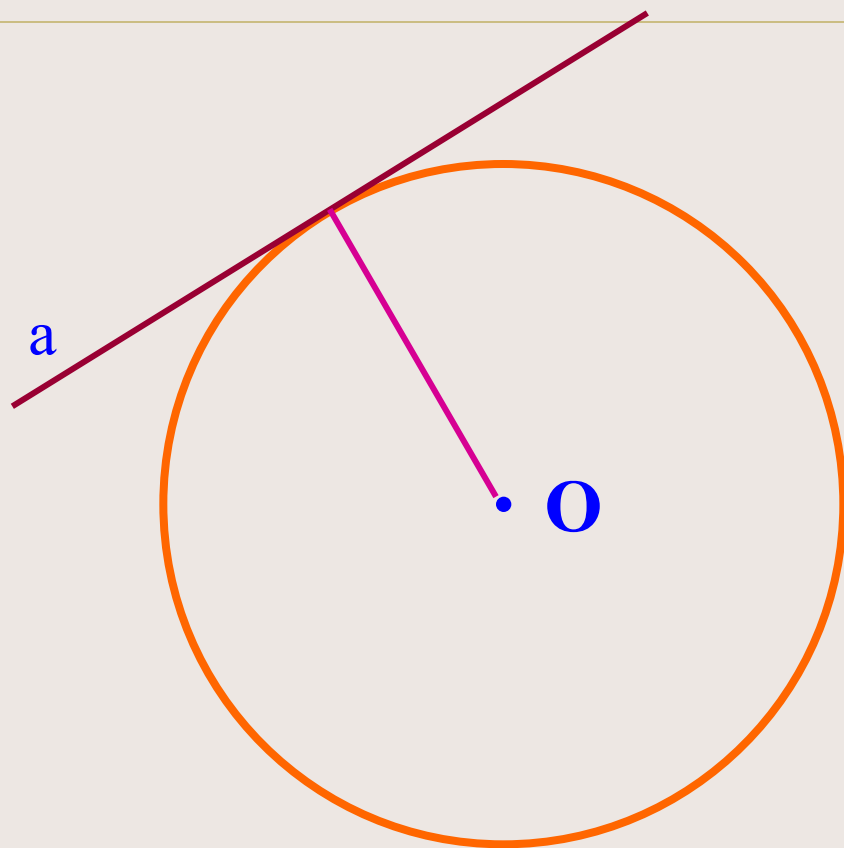
Прямая может иметь с
окружностью одну общую
точку

Прямая *a* – *касательная* к окружности

Касательная перпендикулярна радиусу



Построение касательной

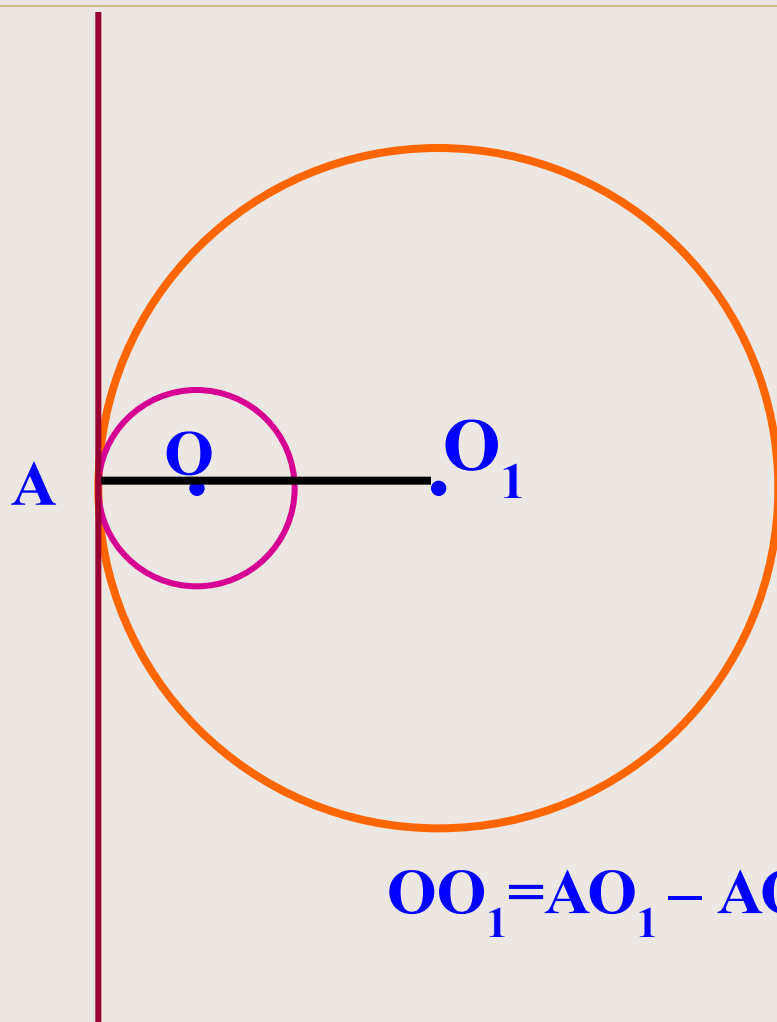


1. В точку касания проводим радиус

2. Через точку касания проводим прямую перпендикулярную радиусу



Касание двух окружностей (внутреннее)

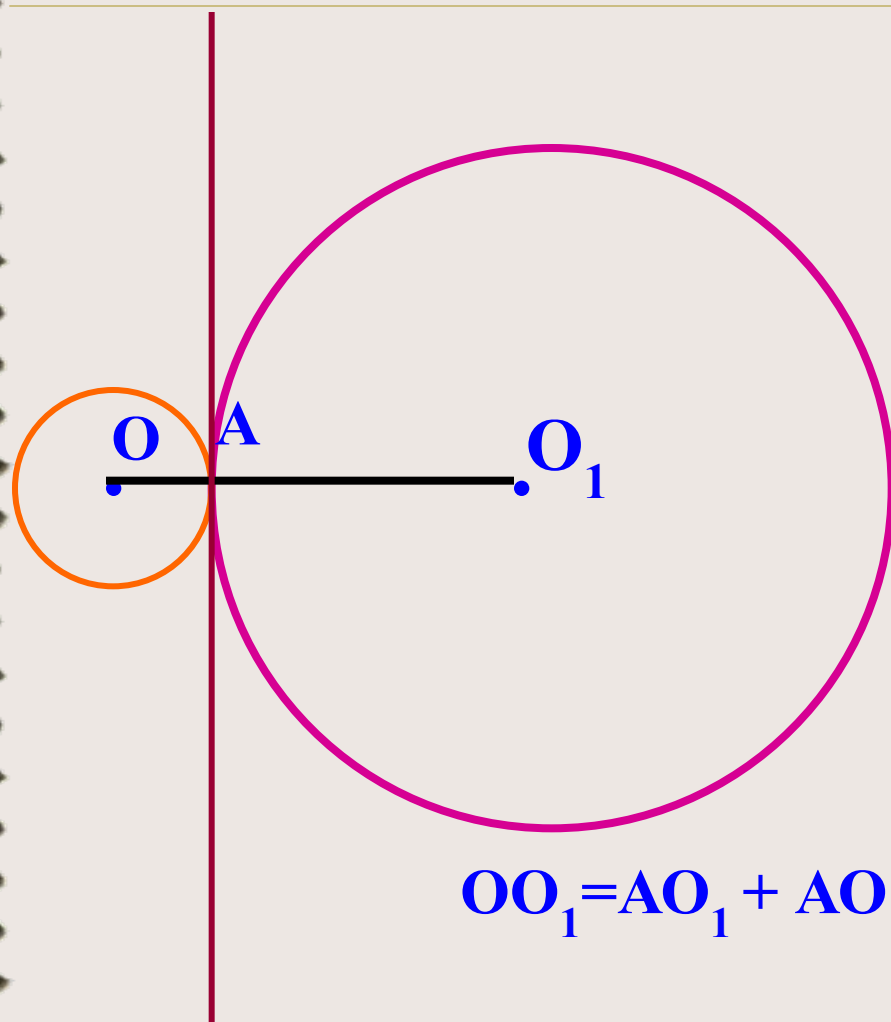


Если две окружности имеют общую касательную и центры окружностей лежат по одну сторону от касательной, то касание окружностей-внутреннее

$$OO_1 = AO_1 - AO = R - r$$



Касание двух окружностей (внешнее)



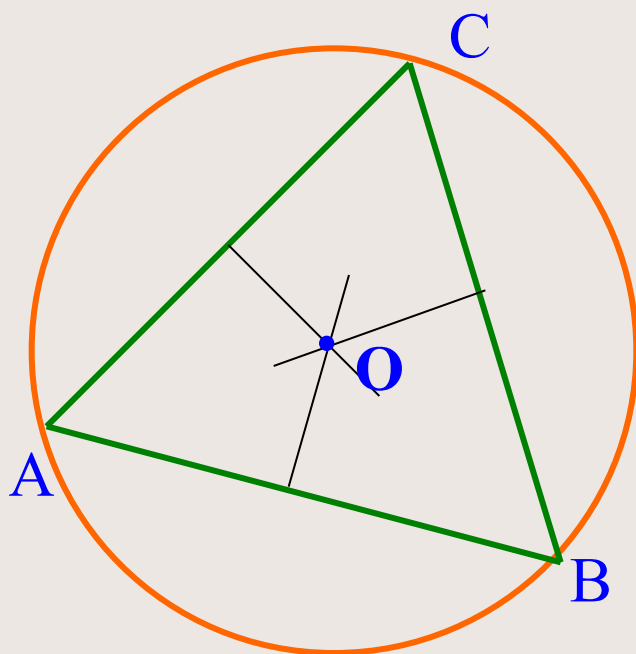
Если две окружности имеют общую касательную и центры окружностей лежат по разные стороны от касательной, то касание окружностей-внешнее

$$OO_1 = AO_1 + AO = R + r$$



Окружность, описанная около треугольника

Центр окружности, описанной около треугольника лежит в точке пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника

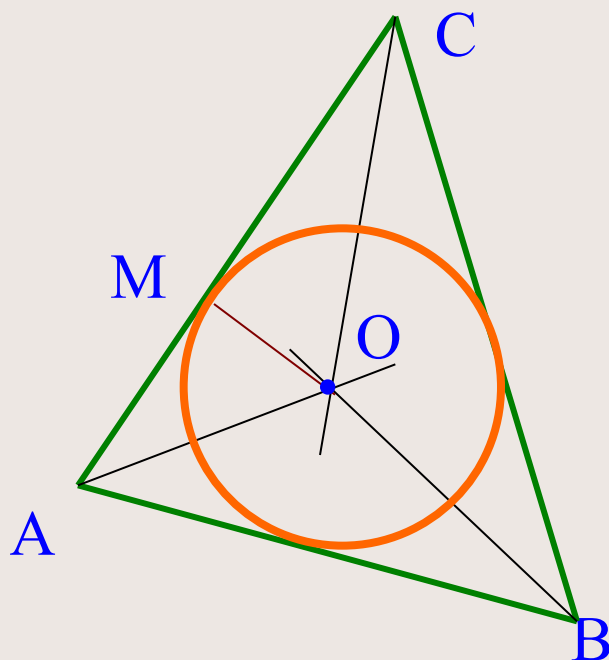


1. Через середины сторон проводим перпендикуляры
2. Точка пересечения серединных перпендикуляров (точка O) - центр окружности
3. Проводим окружность с центром в точке O и радиусом OA



Окружность, вписанная в треугольник

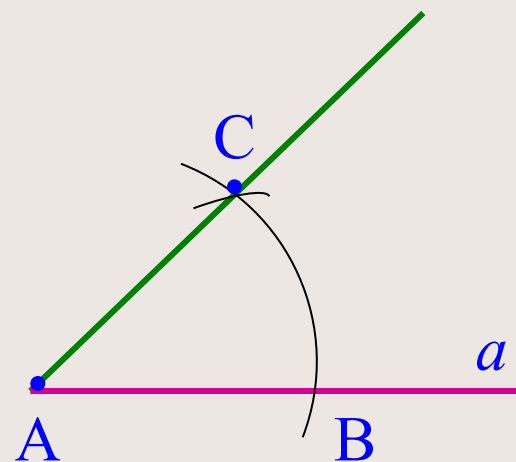
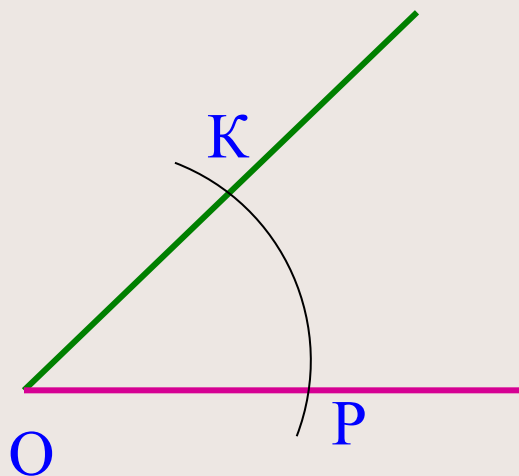
Центр окружности, вписанной в треугольник лежит в точке пересечения его биссектрис



1. Проводим биссектрисы углов
2. Точка пересечения биссектрис (точка O) - центр окружности
3. Опускаем перпендикуляр OM на сторону треугольника
4. Проводим окружность с центром в точке O и радиусом OM



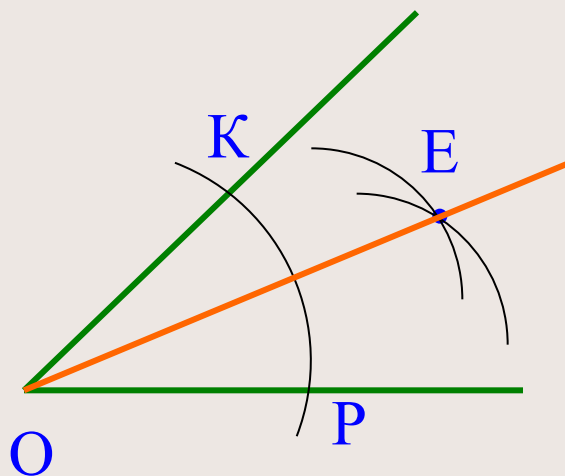
Построение угла, равного данному



1. Проводим окружность с центром в т. O произвольным радиусом
2. Точки пересечения окружности со сторонами угла- R, K
3. Проводим произвольный луч a с началом в точке A
4. Проводим окружность радиусом OR и с центром в точке A , получим точку B .
4. Проводим окружность радиусом RK и с центром в точке B , получим точку C .
5. Проводим луч OC , получим угол CAB , равный данному углу.



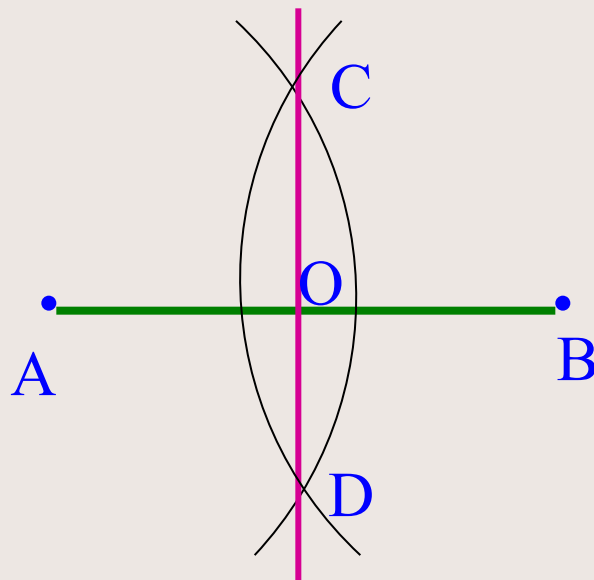
Построение биссектрисы угла



1. Проводим окружность с центром в т.О произвольным радиусом
2. Точки пересечения окружности со сторонами угла- Р, К
3. Проводим две окружности с центрами в точках Р и К одинаковым радиусом РК, получим точку Е
4. Проводим луч ОЕ- биссектрису угла



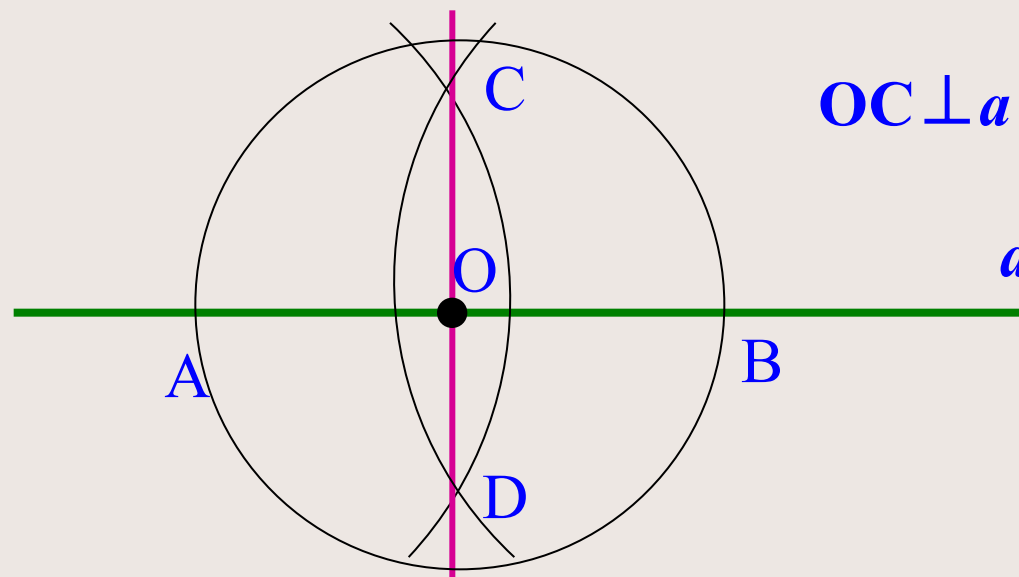
Деление отрезка пополам



1. Проводим окружность с центром в т.А и радиусом $>$ половины АВ
2. Проводим окружность с центром в т.В таким же радиусом
3. Получим точки С и D
4. Проводим прямую CD, Получим точку O – середину АВ



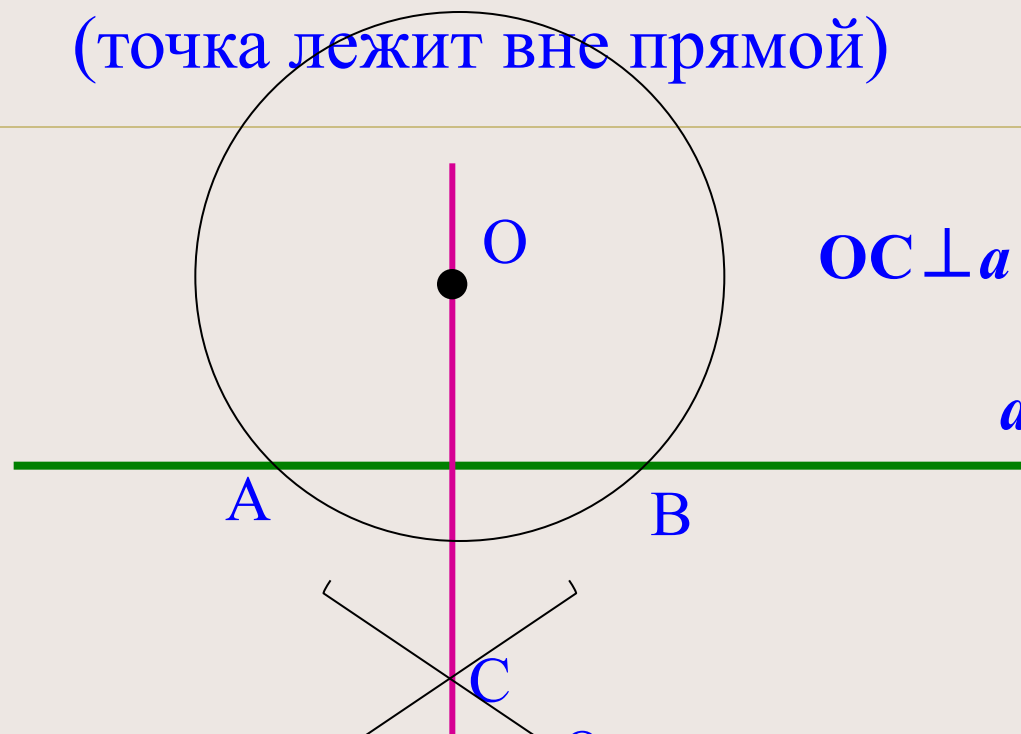
Построение прямой перпендикулярной данной (точка лежит на прямой)



1. Проводим окружность с центром в т. O , получим две точки: A и B
2. Проводим две окружности с центрами в точках A и B , одинаковыми радиусами большими AO
3. Получим точки C и D
4. Проводим прямую OC .



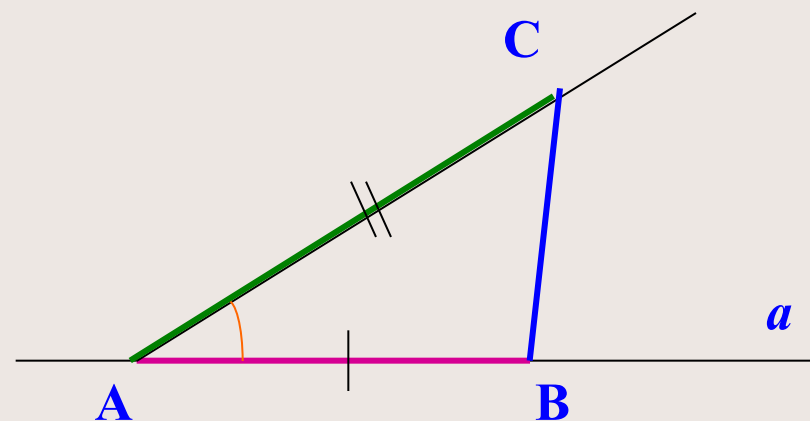
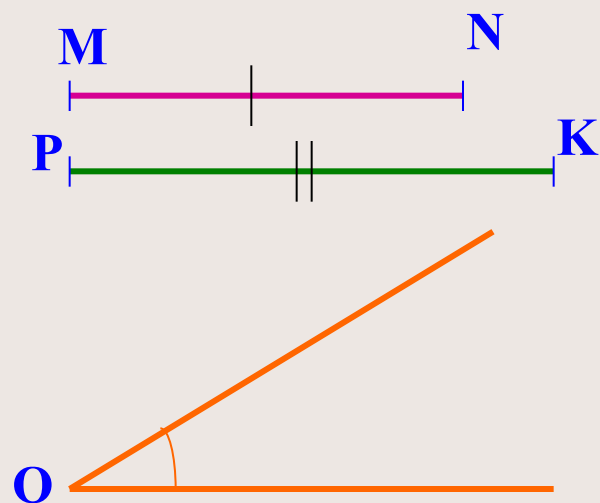
Построение прямой перпендикулярной данной (точка лежит вне прямой)



1. Проводим окружность с центром в т. O , получим две точки: A и B
2. Проводим две окружности с центрами в точках A и B , одинаковыми радиусами большими половины AB
3. Получим точку C
4. Проводим прямую OC .



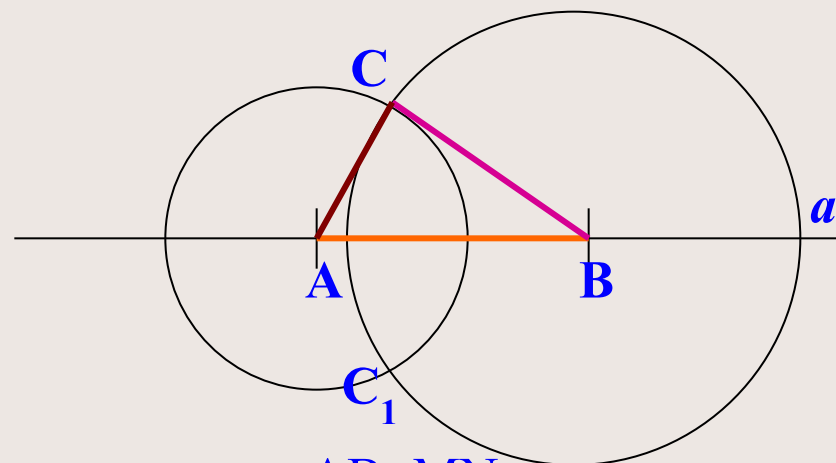
Построение треугольника по двум сторонам и углу между ними



1. Проводим прямую a
2. На прямой a циркулем откладываем отрезок $AB=MN$
3. Строим угол $CAB=\angle O$
4. На луче AC циркулем откладываем отрезок $AC=PK$.
5. Соединяем точки B и C .

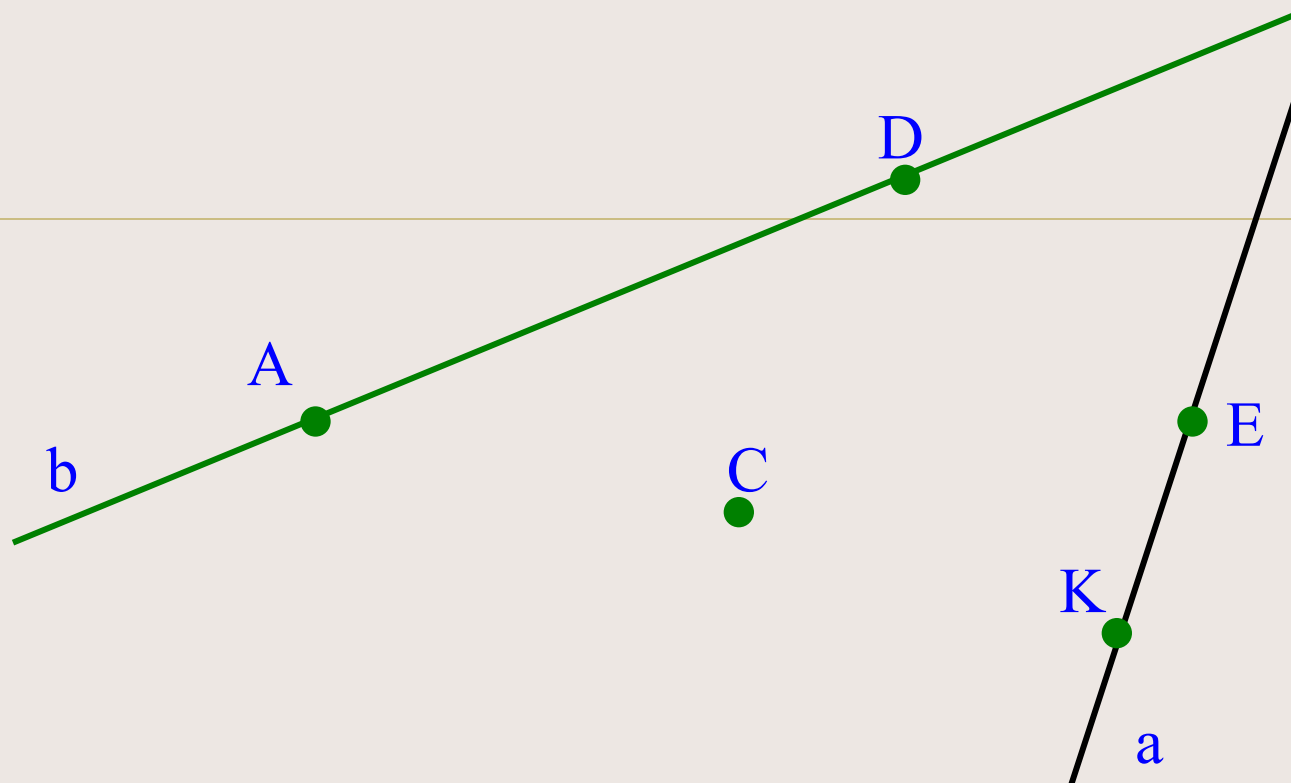


Построение треугольника по трём сторонам



1. Проводим прямую a
2. На прямой a циркулем откладываем отрезок $AB = MN$
3. Строим окружность с центром в точке B и радиусом $= PK$
4. Строим окружность с ц. в т. A и радиусом $= ED$. Получим точки C и C₁
5. Соединяем точки A и C, B и C.

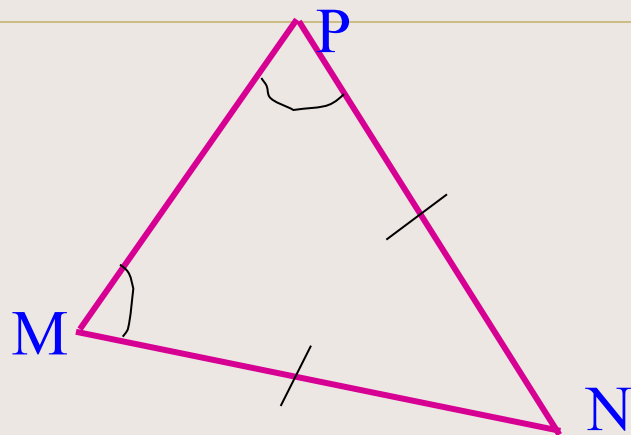




1. $K \in a, E \in a$.
2. $K \notin b, E \notin b, C \notin b$.
3. $A \notin a, D \notin a, C \notin b$.
4. $A \in b, D \in b$.



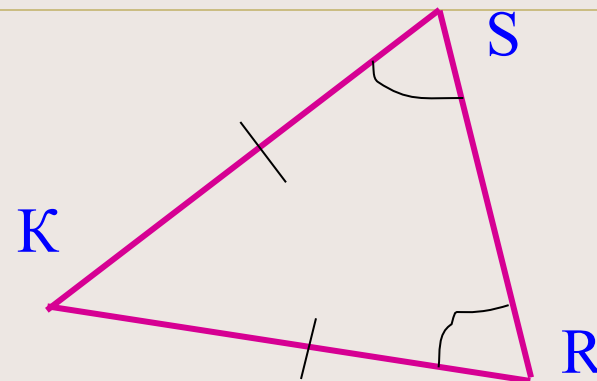
Ответы:



Если в $\triangle MNP$ $MN=NP$, то

$$\angle M = \angle P,$$

как углы при основании
равнобедренного $\triangle MNP$.



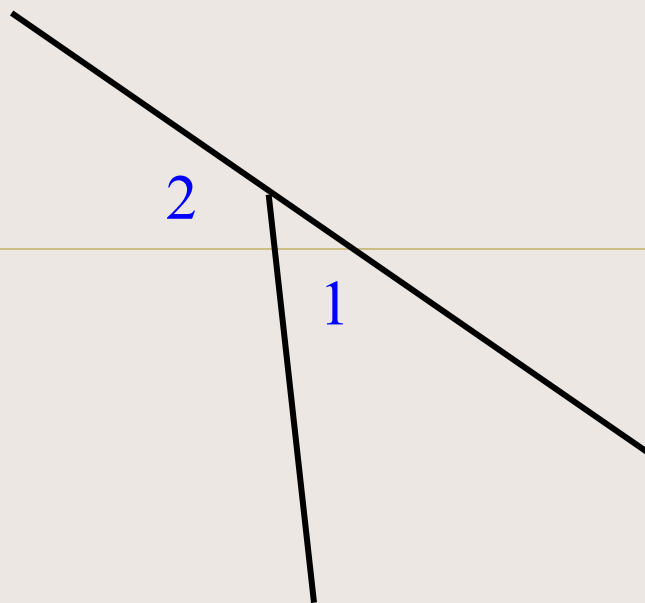
Если в $\triangle KRS$ $\angle S = \angle R$, то

$$KS=KR,$$

как боковые стороны
равнобедренного $\triangle MNP$.

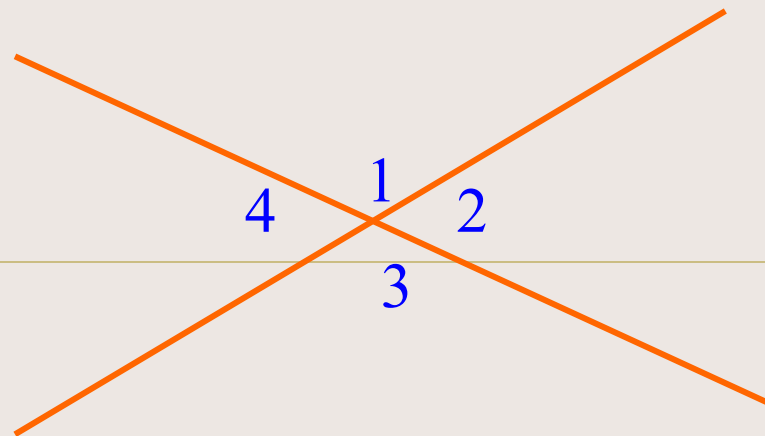


Наз
ад



Углы 1 и 2 называются
смежными.

Их свойство:
 $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$.

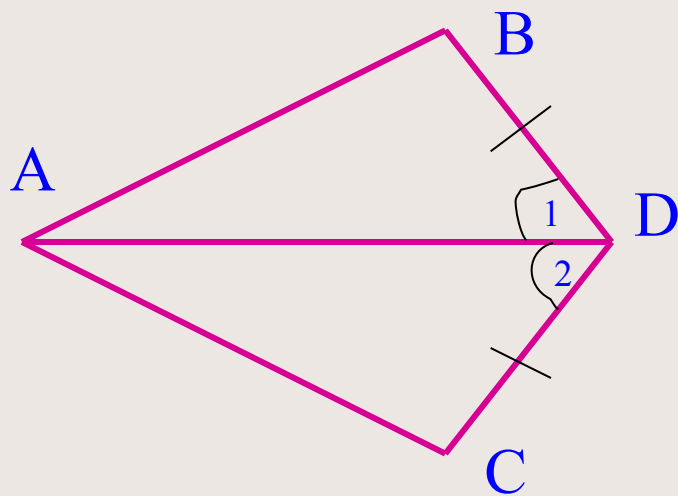


Углы 1 и 3 называются
вертикальными.

Их свойство:
 $\angle 1 = \angle 3$.

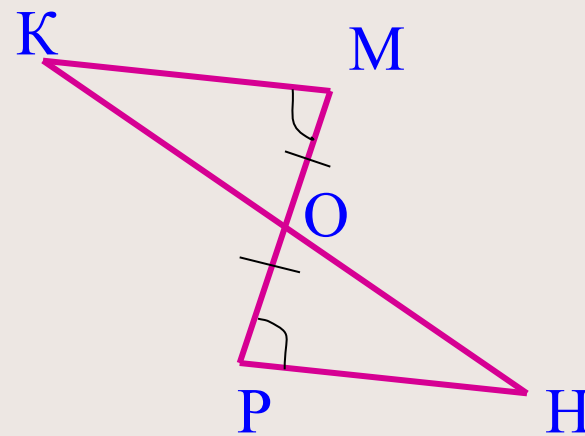


Шпаргалка для решения задач на равенство треугольников



Почему равны треугольники DBA и DCA ?

$DB=DC$ (по условию), AD - общая сторона, $\angle 1 = \angle 2$ (по условию)
 $\Rightarrow$ (по 1-му признаку)
 $\triangle DBA = \triangle DCA$.

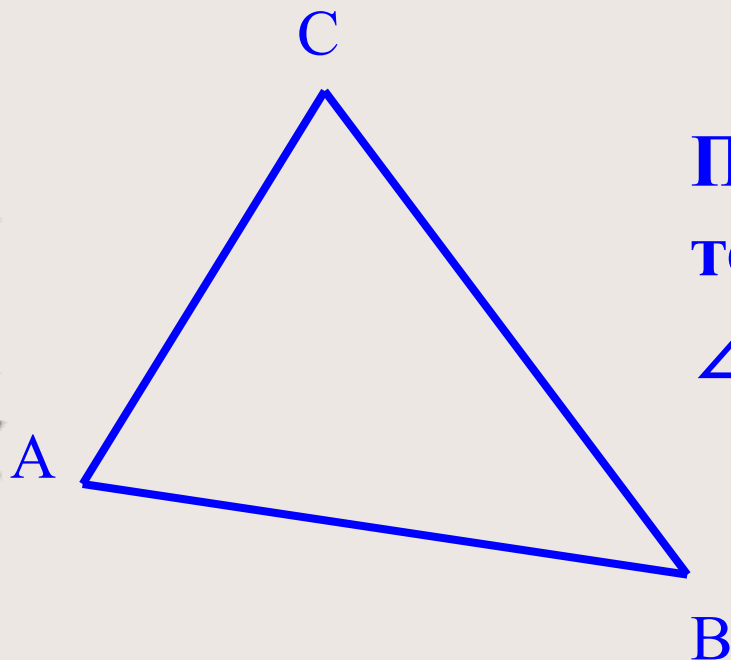


Почему равны треугольники OMK и OPH ?

$OM=OP$ (по условию), $\angle M = \angle P$ (по условию),
 $\angle 1 = \angle 2$ (вертикальные) $\Rightarrow$ (по 2-му признаку) $\triangle OMK = \triangle OPH$.



1. В треугольнике ABC один угол равен 50° , второй 70° . Найти третий угол.



Пусть $\angle B = 50^\circ$, $\angle A = 70^\circ$,
тогда

$$\angle C = 180^\circ - (50^\circ + 70^\circ) = 60^\circ$$

Ответ: 60° .

Назад

Не существует!

**Так как величина тупого угла
больше 90° , а сумма двух таких
углов будет больше 180° .**



Назад

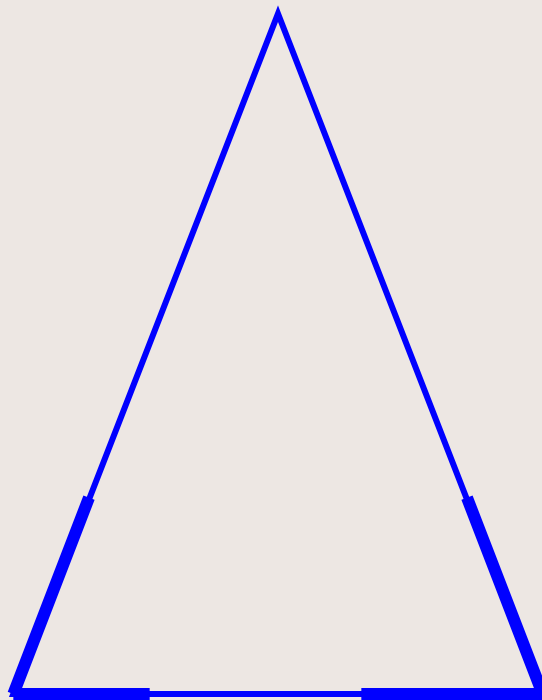
Не существует!

Так как $80^{\circ}+30^{\circ}+60^{\circ}=170^{\circ}\neq 180^{\circ}$

Назад

Два тупых угла в треугольнике!?

Как такое может быть?



**Мы не можем быть тупыми
одновременно!**

Назад

Задача: Существует ли треугольник с данными сторонами и почему?

8 см, 10 см, 17см

Ответ: Да, существует,
так как

$$17 < 8 + 10$$

5 см, 7 см, 13см

Ответ: Нет, не существует,
так как

$$13 > 5 + 7$$

Назад

Задачи для устного решения:

1. Могут ли стороны треугольника относиться как 5:2:4?

2. Могут ли стороны треугольника относиться как 6:9:16?

3. Могут ли стороны треугольника относиться как 5:11:6?

Ответ: 1. Да 2. Нет 3. Нет Почему?

$$5 < 2 + 4 \quad 16 > 6 + 9 \quad 11 = 5 + 6$$

Назад





Данная программа представляет собой пособие для учителя и предназначена для использования учителем при объяснении нового материала с использованием демонстрационного экрана или интерактивной доски. Может использоваться учащимися для самостоятельной подготовки к промежуточной аттестации по курсу Геометрии 7 класса на домашнем ПК.

