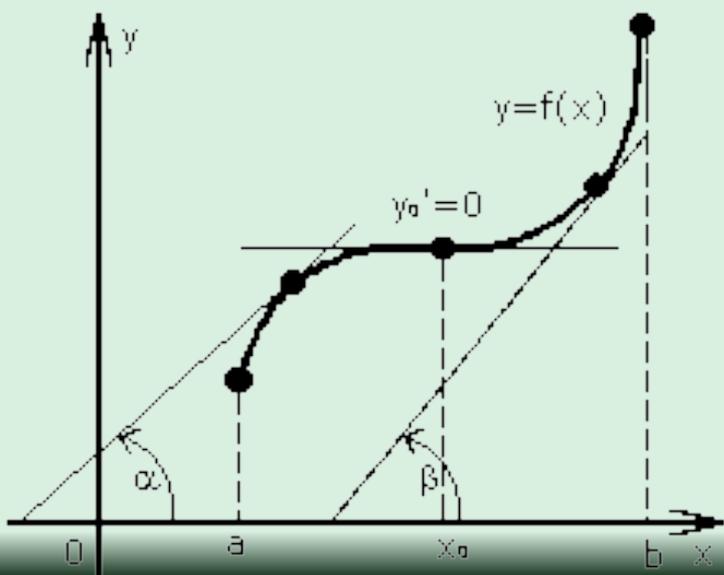
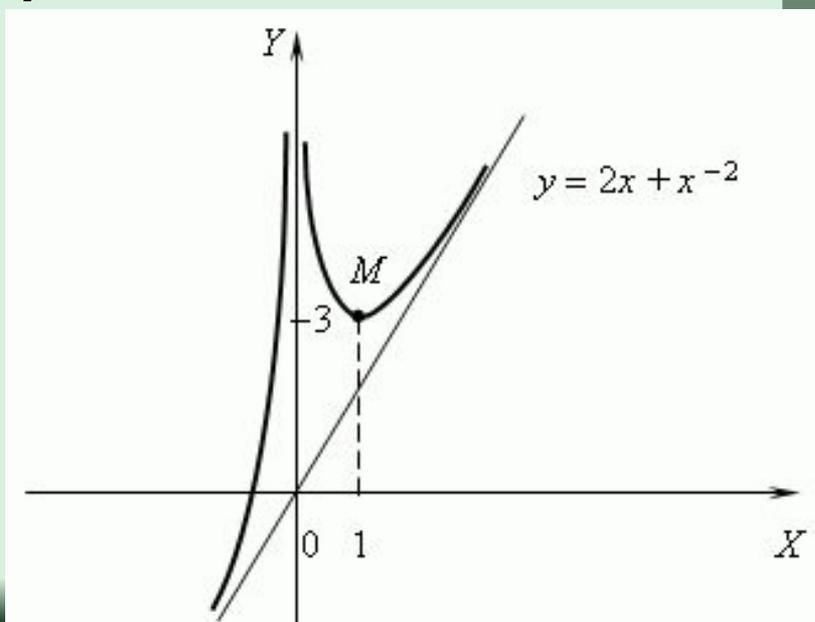


# Применение производной к исследованию функции



# Исследование функции и построение графика

Исследование функций с помощью производной позволяет более точно строить их графики, которые применяются для решения многих алгебраических задач.



# Схема исследования функции

- Область определения
- Чётность, нечётность
- Периодичность
- Точки пересечения графика с осями координат
- Промежутки знакопостоянства
- Монотонность
- Точки экстремума и значения  $f$  в этих точках
- Наибольшее и наименьшее значение  $f$
- Вспомогательные точки
- График функции (точный или эскиз)



# Область определения функции

Множество всех значений аргумента, при котором функция определена.

$D(f)$

$$(-\infty; -4) \cup (-4; \infty)$$

# Чётность, нечётность

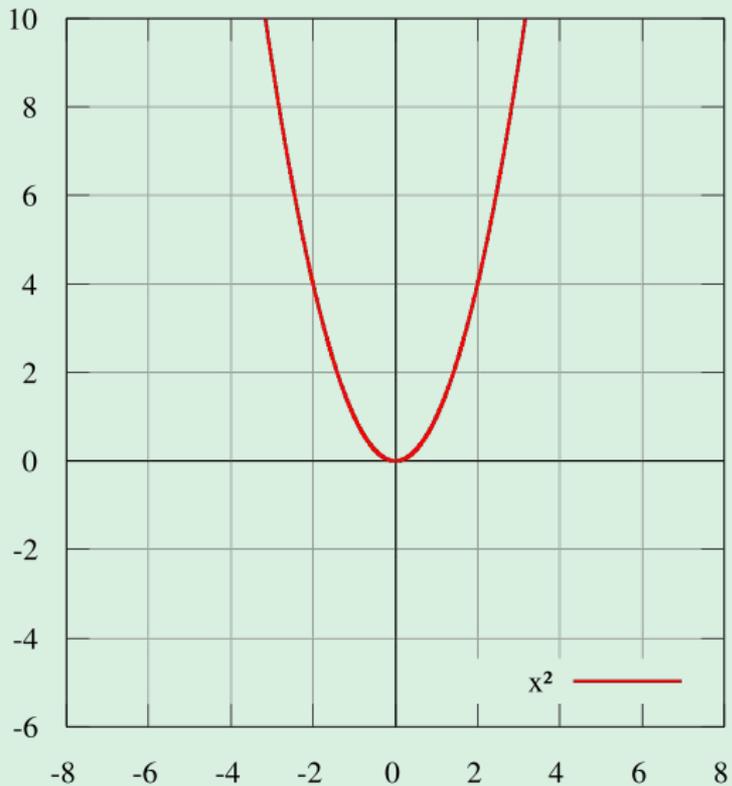
$D(f)$ -симметрична относительно  $O(0;0)$ .

Если  $f(-x)=f(x)$ -функция четная.

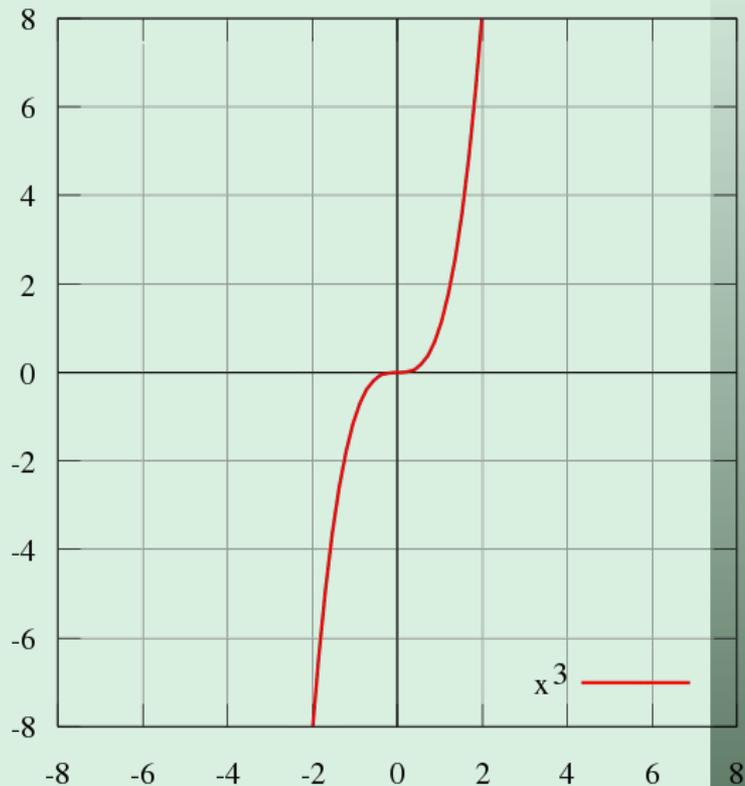
Если  $f(-x)=-f(x)$ -функция нечетная.

Если функция ни та, и ни другая,  
то она общего вида!

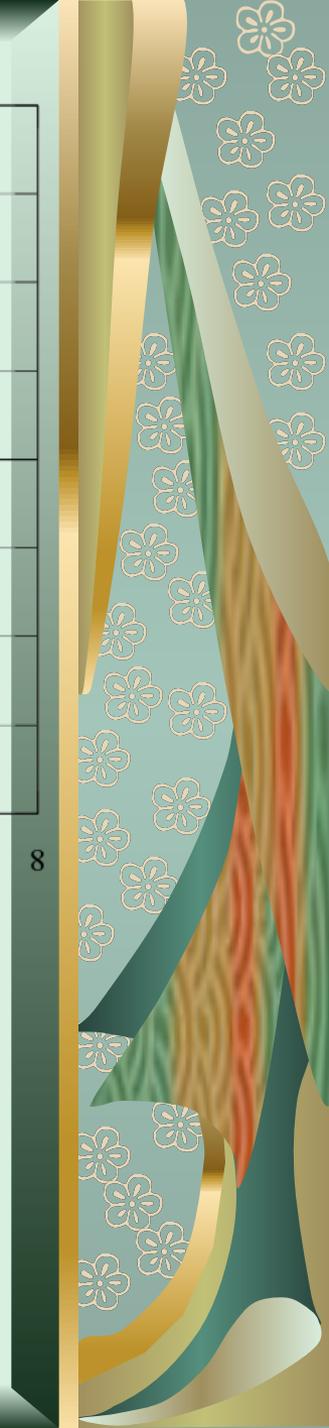




**Четная  
функция**

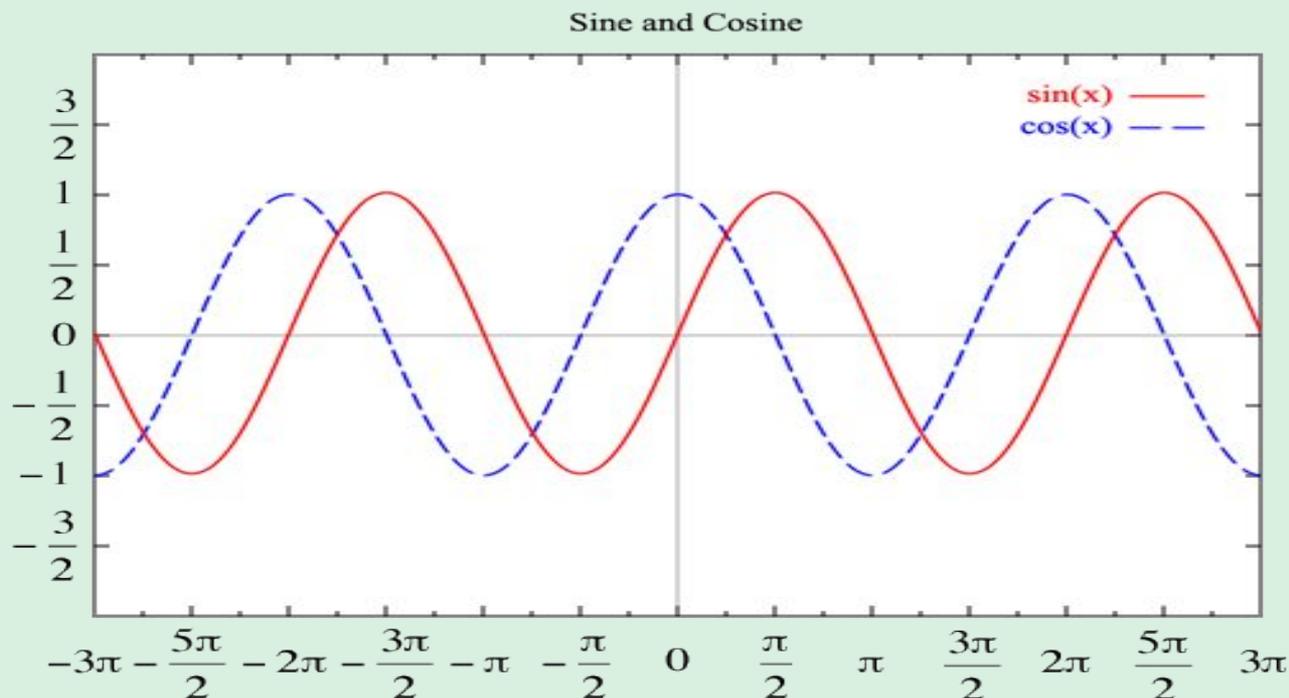


**Нечетная  
функция**



# Периодичность

Если  $T$ -период, то  $f(x+T)=f(x-T)=f(x)$



Синусоида- график одной из периодических функций

# Точки пересечения графика с осями координат

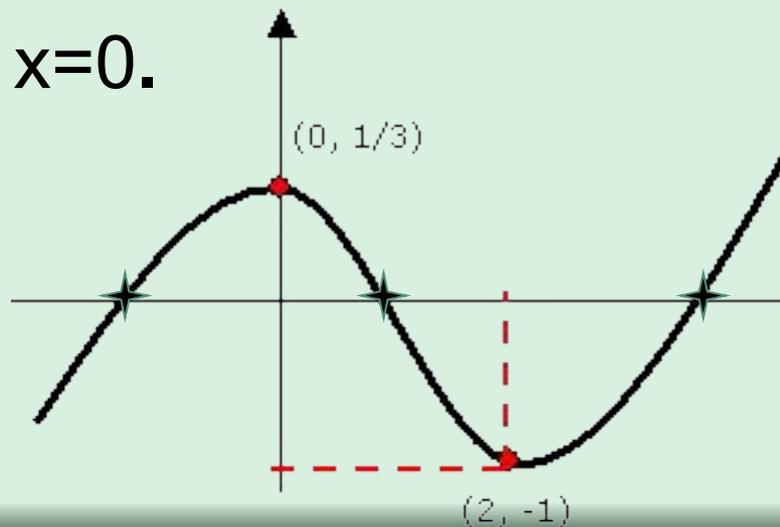
## Нули функции

Значение аргумента при котором значение функции равно нулю.

С  $Ox$ , если  $y=0$ .

## Пересечение графика функции

с осью с  $Oy$ , если  $x=0$ .

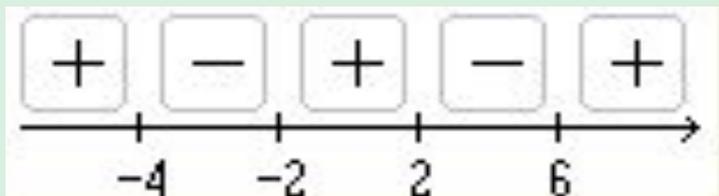


# Промежутки знакопостоянства

Промежутки знакопостоянства – интервалы, на которых функция положительна или отрицательна, или, иначе, решения неравенств  $f(x) > 0$  и  $f(x) < 0$ .

$y > 0$ , при  $x \in [a; b]$ ;

$y < 0$ , при  $x \in [a_1; b_1]$ .



# Монотонность

Функция  $f(x)$  называется возрастающей на промежутке  $D$ , если для любых чисел  $x_1$  и  $x_2$  из промежутка  $D$  таких, что  $x_1 < x_2$ , выполняется неравенство  $f(x_1) < f(x_2)$ .

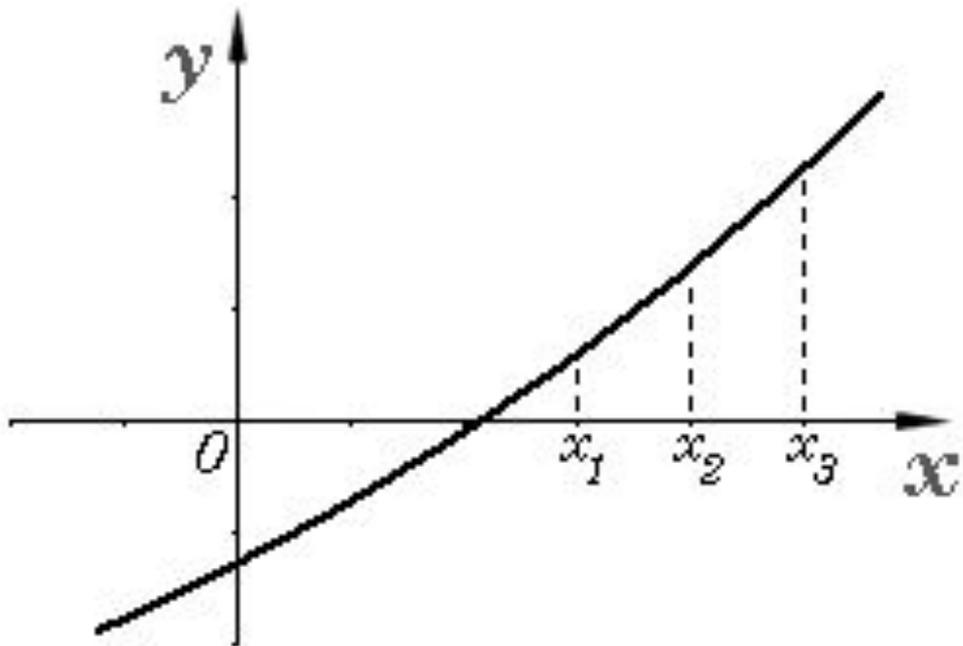
Или выполняется условие  $f'(x) > 0$

Функция  $f(x)$  называется убывающей на промежутке  $D$ , если для любых чисел  $x_1$  и  $x_2$  из промежутка  $D$  таких, что  $x_1 > x_2$ , выполняется неравенство  $f(x_1) > f(x_2)$ .

Или выполняется условие  $f'(x) < 0$

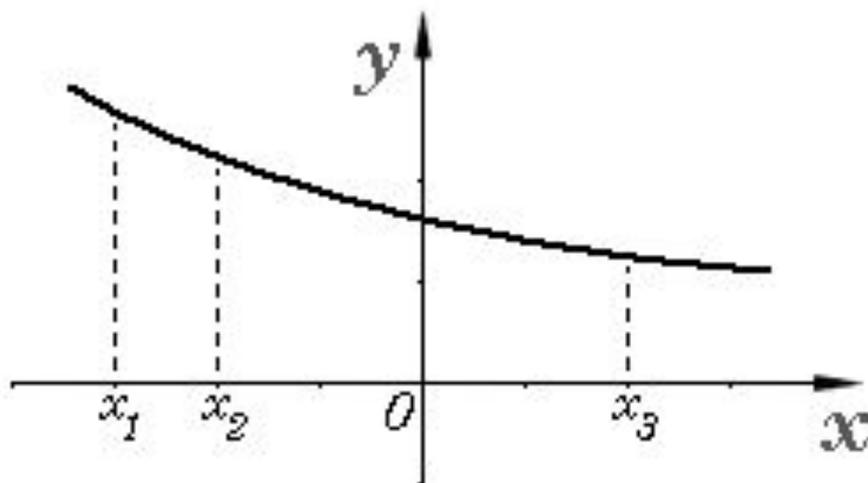
Промежутки возрастания и убывания – интервалы, на которых функция или возрастает, или убывает. Слова “возрастание” и “убывание” функции иногда заменяют одним словом – “монотонность” функции.



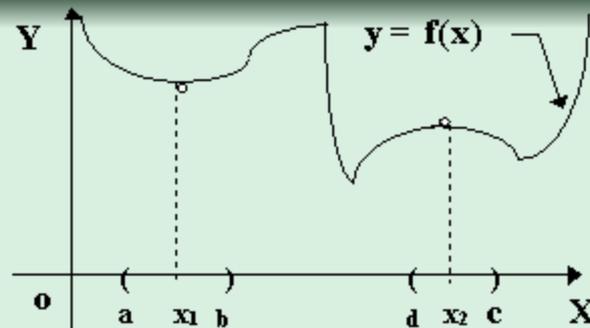


Функция  
возрастает

Функция  
убывает



# Экстремумы



Точки экстремума – точки, лежащие внутри области определения, в которых функция принимает самое большое (максимум) или самое малое (минимум) значение по сравнению со значениями в близких точках

Если в точке  $x_0$  производная меняет знак с плюса на минус, то  $x_0$  есть точка максимума

Если в точке  $x_0$  производная меняет знак с минуса на плюс, то  $x_0$  есть точка минимума.

# Множество значений функции Наибольшее и наименьшее значение

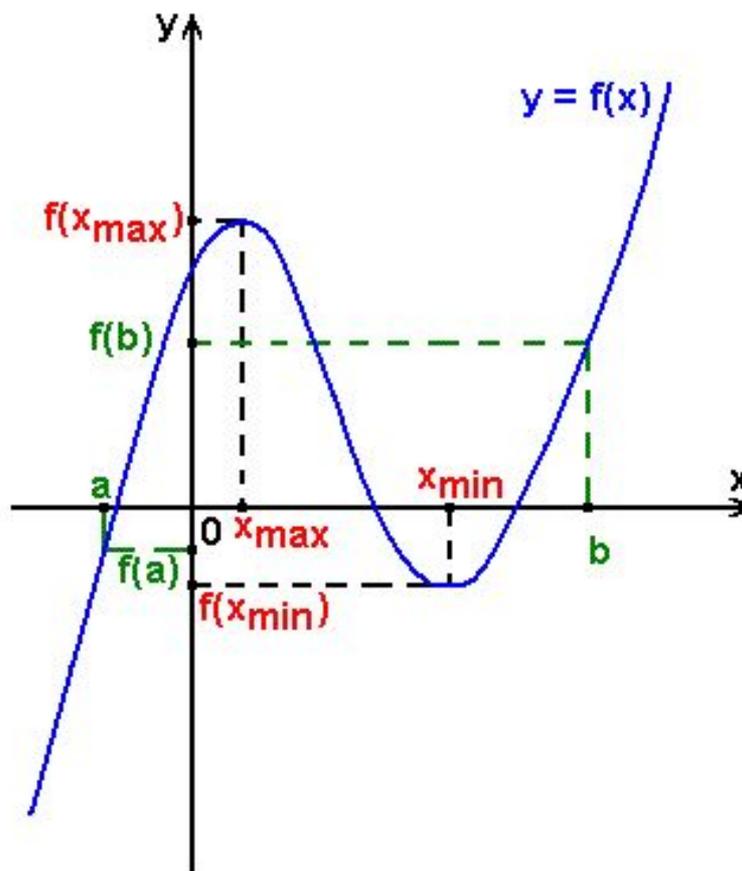
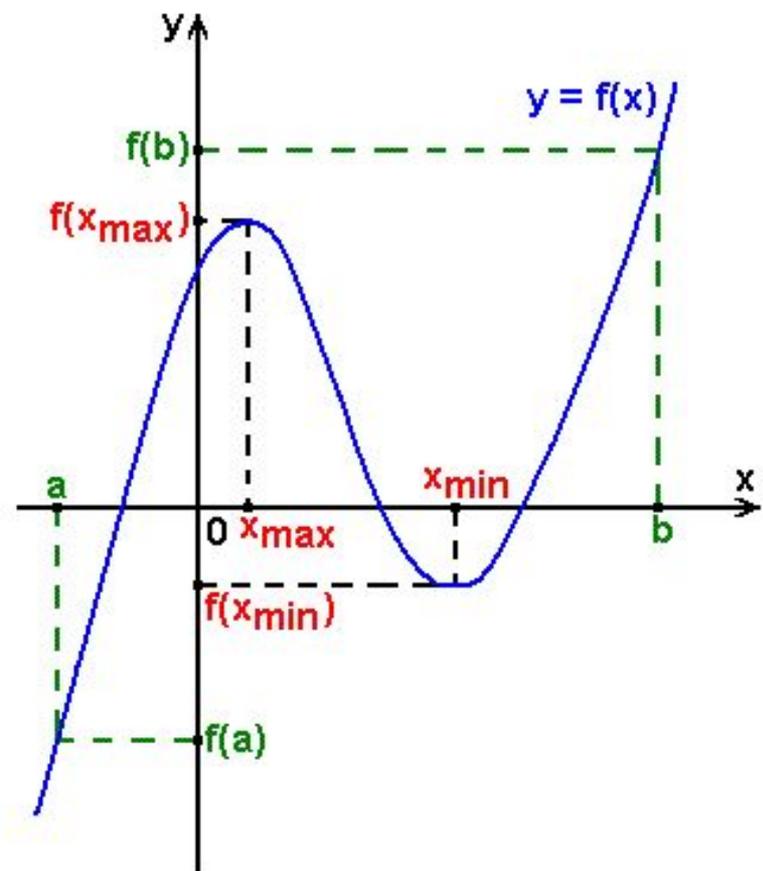
Множество значений функции –  
множество чисел, состоящее из всех  
значений функции.

$E(f)$

Непрерывная на отрезке  $[a;b]$  функция  $f$   
принимает на этом отрезке наибольшее  
и наименьшее значение, либо на концах  
промежутка, либо в критических точках,  
в которых  $f'=0$

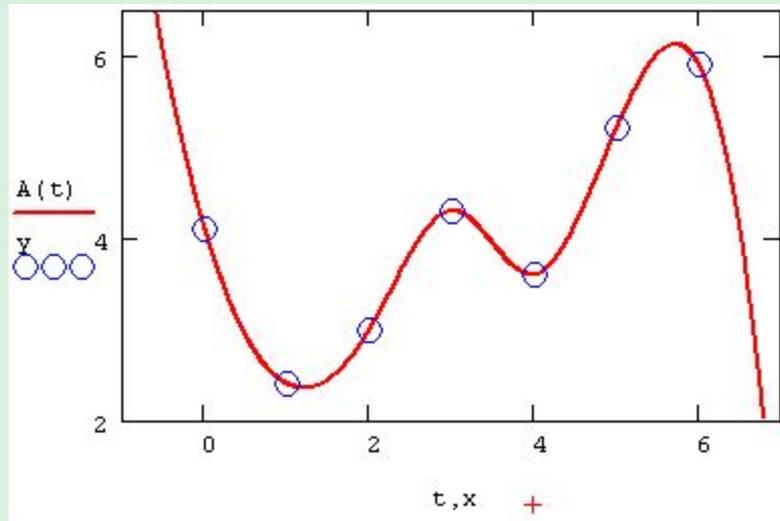


## Наибольшее и наименьшее значение функции



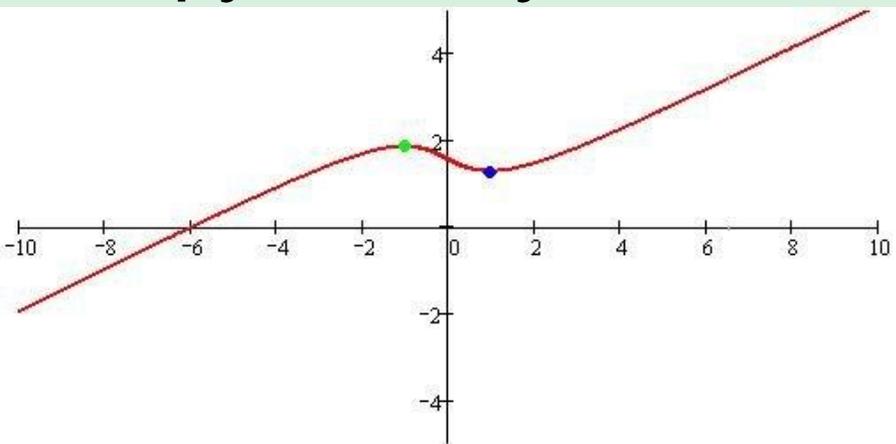
# Вспомогательные точки

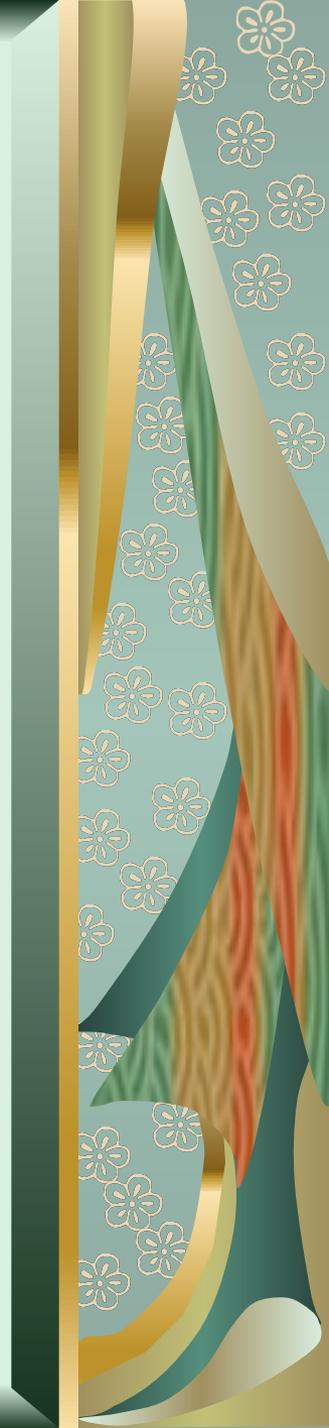
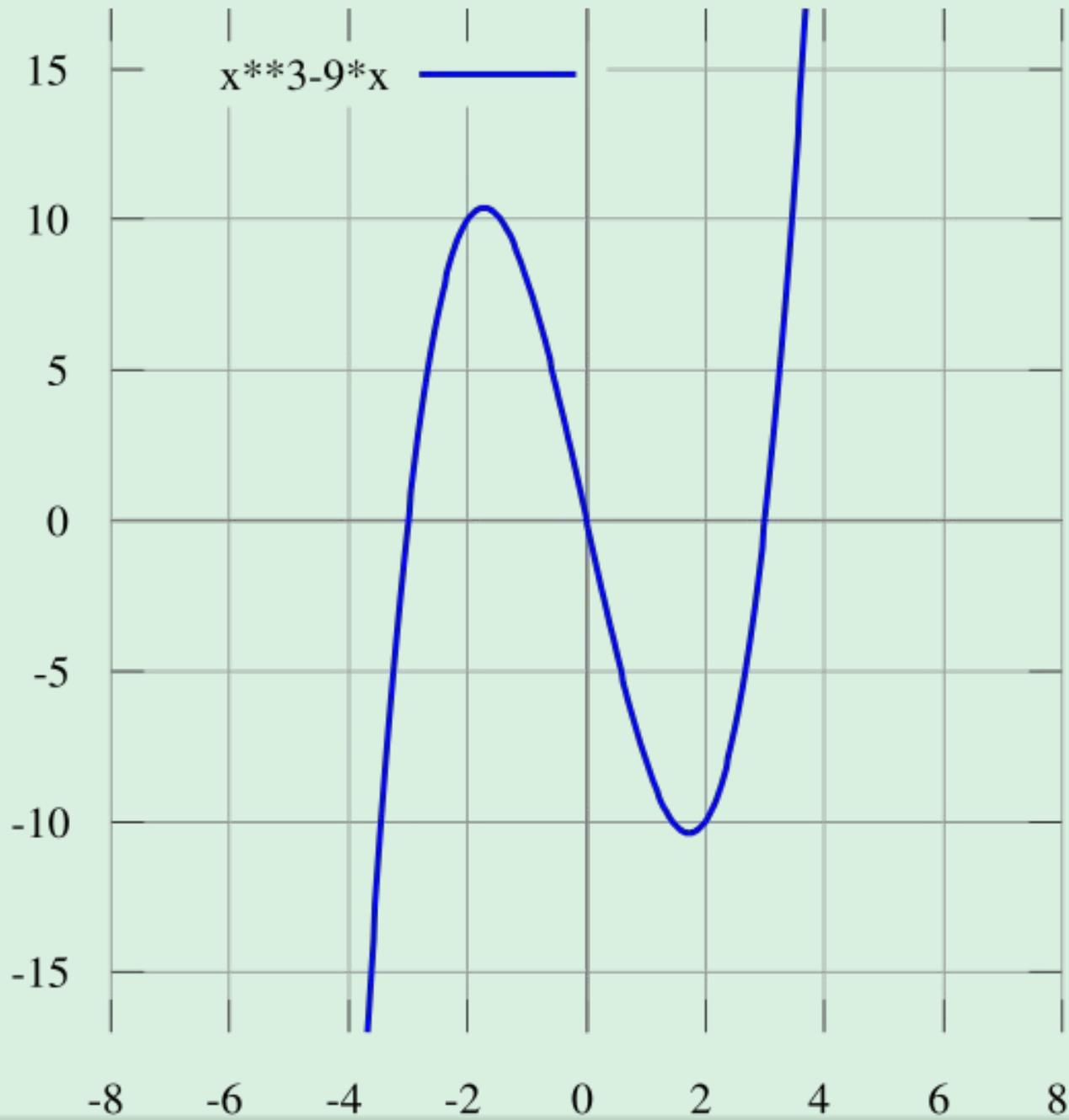
Точки, требуемые при построения графика.(Если выявленных точек не достаточно для построения графика)



# График

График функции — множество точек, у которых абсциссы являются допустимыми значениями аргумента  $x$ , а ординаты — соответствующими значениями функции  $y$ .





# Исследование функции

$$y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 3x + 2}$$

1. Упростим выражение

$$y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 3x + 2}; y = \frac{x^2 + x}{(x-1)(x-2)}$$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$$

2. Функция общего вида,

$$\text{т.к. } f(-x) \neq f(x) \text{ и } f(-x) \neq -f(x)$$

- Непериодическая

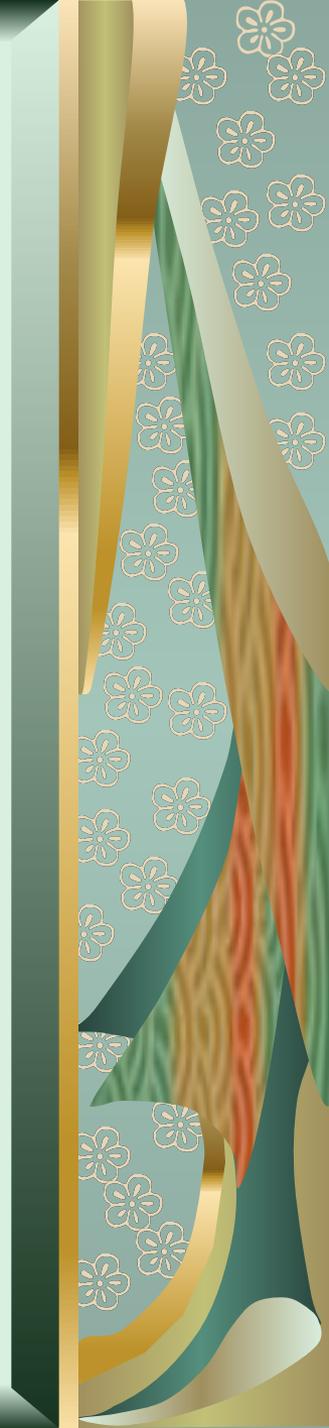
- С осью  $oy$   $x=0$ , тогда  $y=0$ ;

$$\text{С осью } ox \text{ } y=0, \text{ тогда } \frac{x^2 + x}{x^2 - 3x + 2} = 0$$

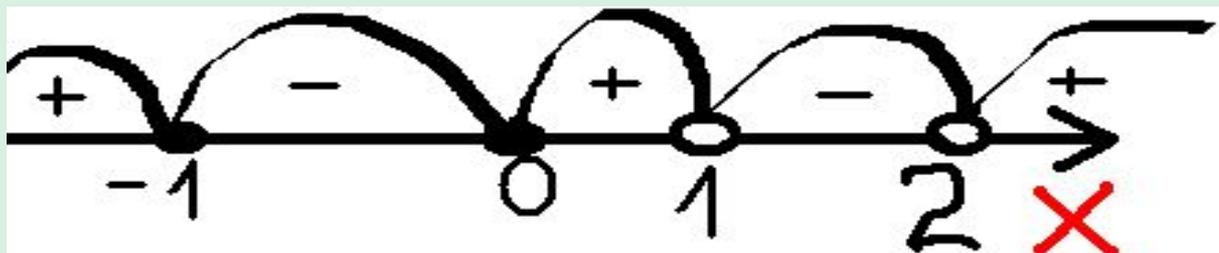
$$x^2 + x = 0$$

$$x(x+1) = 0$$

$$x=0 \text{ или } x=-1$$



## 5. Промежутки знакопостоянства



## 6. Находим производную функции

$$y' = (-4x^2 + 4x + 2) / ((x-1)^2 * (x-2)^2)$$

$$D(f') = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$$

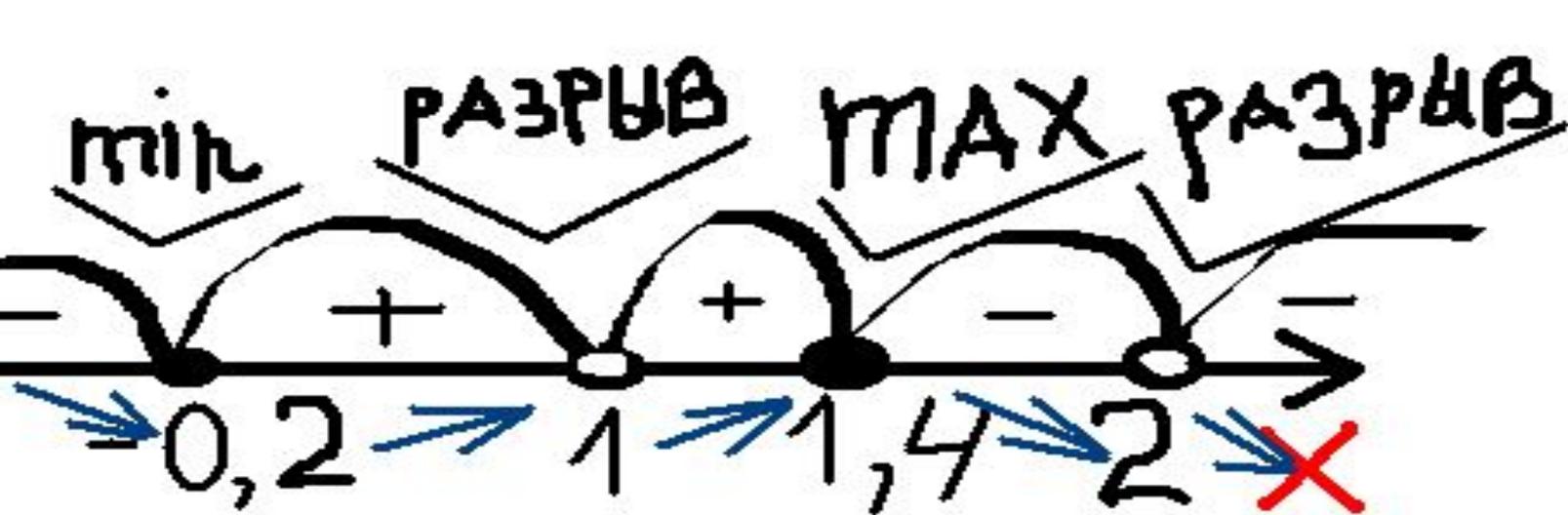
## 7. Находим промежутки возрастания и убывания функции

$$(-4x^2 + 4x + 2) / ((x-1)^2 * (x-2)^2) = 0$$

$$-4x^2 + 4x + 2 = 0$$

$$x_1 = (-1 + \sqrt{3}) / -2 \approx 1,4;$$

$$x_2 = (-1 - \sqrt{3}) / -2 \approx -0,4;$$



## 8. Экстремумы

$x = (-1 + \sqrt{3}) / -2$  - точка минимума;

$$y((-1 + \sqrt{3}) / -2) = (2 - 2\sqrt{3}) / (3 + 2\sqrt{3})$$

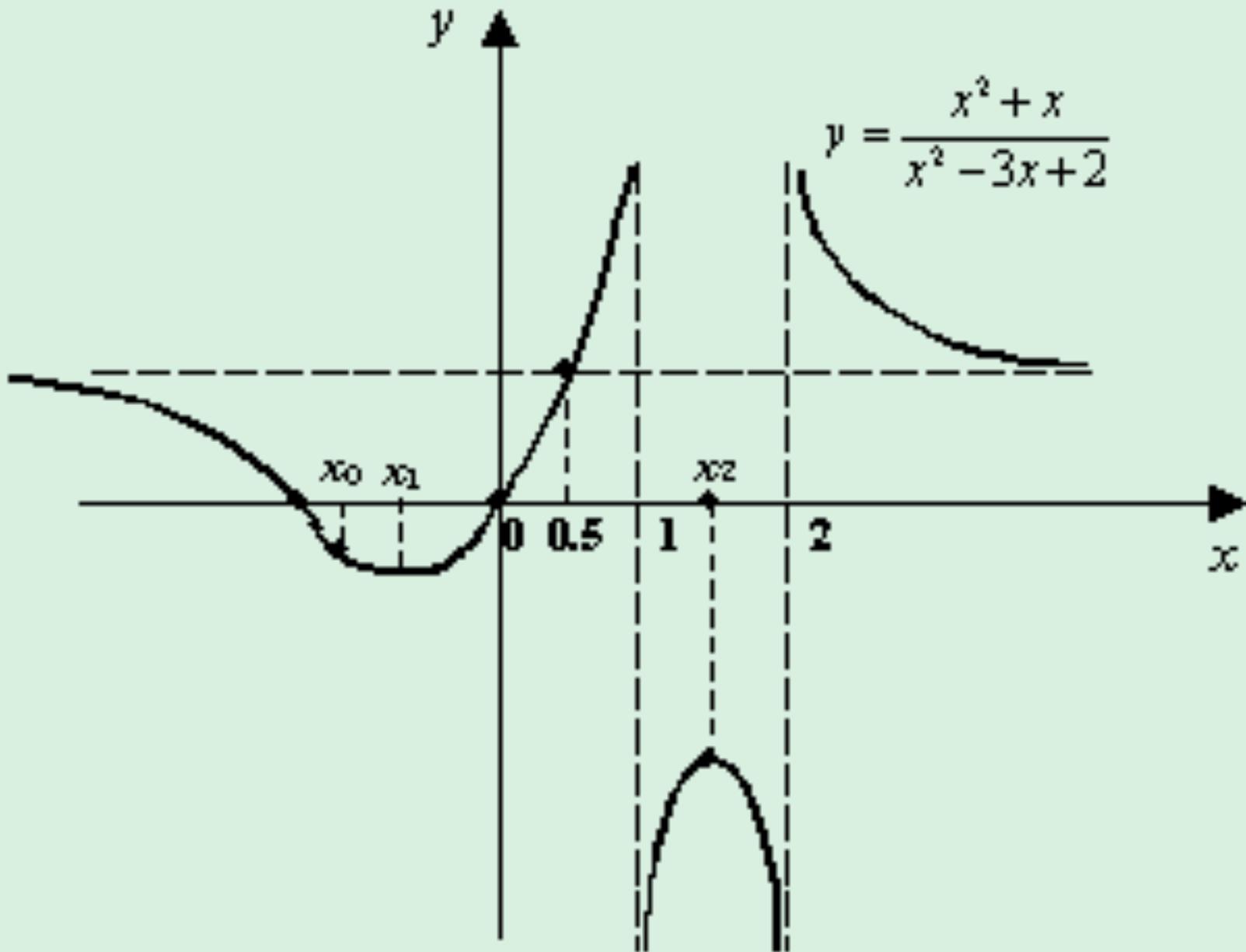
$x = (-1 - \sqrt{3}) / -2$  - точка максимума;

$$y((-1 - \sqrt{3}) / -2) = (2 + 2\sqrt{3}) / (3 - 2\sqrt{3})$$

9.

$$E(y) = (-\infty; (2 - 2\sqrt{3}) / (3 + 2\sqrt{3})) \cup ((2 + 2\sqrt{3}) / (3 - 2\sqrt{3}); +\infty)$$

10. График



# Литература

[www.wikipedia.org](http://www.wikipedia.org)

[www.schoolru.narod.ru](http://www.schoolru.narod.ru)

[www.images.yandex.ru](http://www.images.yandex.ru)

[www.edu.ru](http://www.edu.ru)

Энциклопедия «Кирилла и Мефодия»

