Тема «Применение производной к исследованию функций»

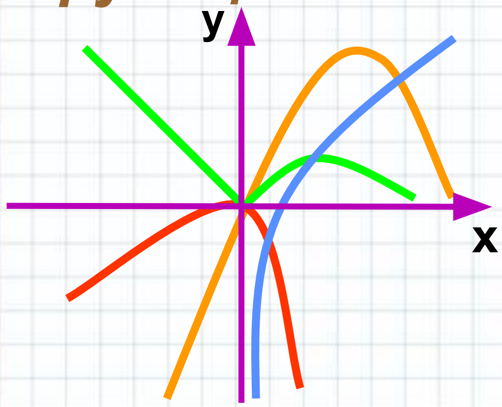


Таблица производных

	Производные простых функций (x – независимая переменная)	Производные сложных функций ($u=u(x)$ – любая дифференцируемая функция)
1	$(C)' = 0$	$(C)' = 0$
2	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$
3	$(a^x)' = a^x \ln a$	$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$
4	$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
5	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$
6	$(\ln x)' = \frac{1}{x}, x > 0$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, u > 0$
7	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
8	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
9	$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(tgu)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
10	$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(ctgu)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$

§34 (стр110)№12 л *Найти промежутки возрастания и убывания функции.*

$$y = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$$

Алгоритм действия

1. *Находим область определения функции.*
2. *Находим производную функции.*
3. *Решаем неравенство f(x)>0 и f(x)<0*

1. ООФ. Х – любое число.
2. $f'(x) = 6x^2 - 10x + 4$

подсказка

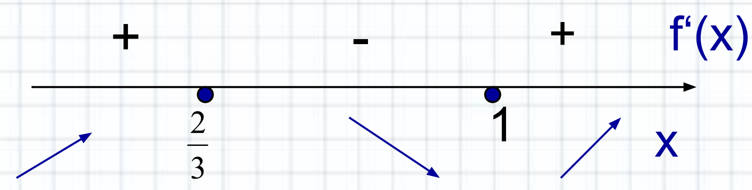
3. $6x^2 - 10x + 4 = 0 \quad | \quad :2$

$3x^2 - 5x + 2 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2}$$

$$x_2 = \frac{5-1}{6} = \frac{2}{3} \qquad x_1 = \frac{5+1}{6} = 1$$



Ответ. *Функция возрастает при* $x \le \frac{2}{3}$ *и при* $x \ge 1$

Функция убывает при $\frac{2}{3} \le x \le 1$

Тема **Экстремумы функции**

Найти точки экстремума функции $y = \frac{4}{x} + \frac{x}{16}$

x≠0

1. **О.О.Ф.** **x≠0** (делить на 0 нельзя)

2. *Для нахождения производной представим условие в другой форме записи* $y = 4 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{16} x$

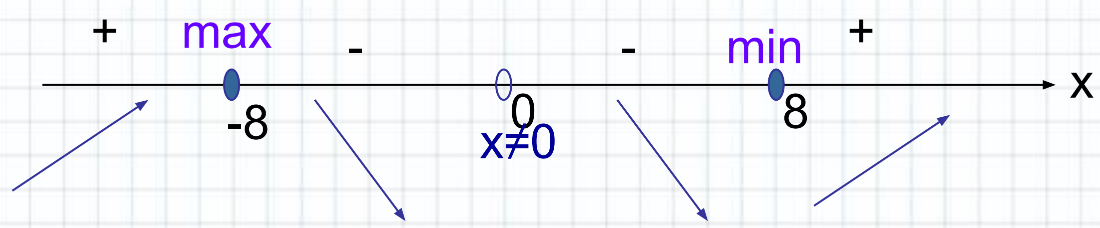
$$y' = 4 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{16} = -\frac{4}{x^2} + \frac{1}{16}$$

x≠0

3. *Если* x_0 *- точка экстремума дифференцируемой функции f(x), то f'(x) =0*

y'=0 $\quad -\frac{4}{x^2} + \frac{1}{16} = 0 \quad \frac{4}{x^2} = \frac{1}{16} \quad x = \pm 8$

4. *Точки минимума и точки максимума называются точками экстремума.*



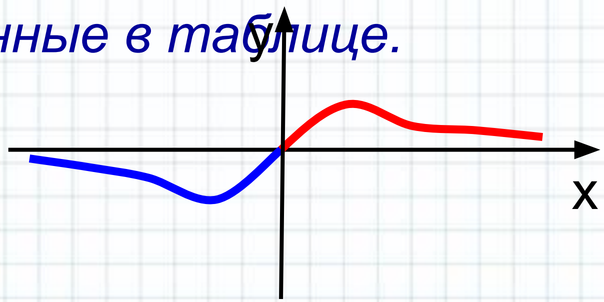
Ответ . X=-8 точка максимума

X= 8 точка минимума

Тема « Применение производной к построению графиков функций

Алгоритм исследования свойств функции:

1. Найти область определения функции
2. Найти производную функции.
3. Найти критические точки функции.
4. Найти промежутки возрастания и убывания функции.
5. Найти точки экстремума и значения функции в этих точках.
6. Результаты исследования записываем в таблицу.
7. Находим значение функции в дополнительных точках (если потребуется)
8. Строим график функции используя данные в таблице.



Исследовать функцию и построить ее график

$$f(x)=(x-1)(x+1)^2$$

Алгоритм

1) $D(y)=R$

2). $f(x)=(x-1)(x+1)^2=(x-1)(x^2+2x+1)=$

$$=x^3+x^2-x-1$$

$$f'(x)=3x^2+2x-1$$

3. f'(x) = 0

$$3x^2+2x-1=0$$

$$x_1=-1 \qquad x_2=\frac{1}{3}$$

4.

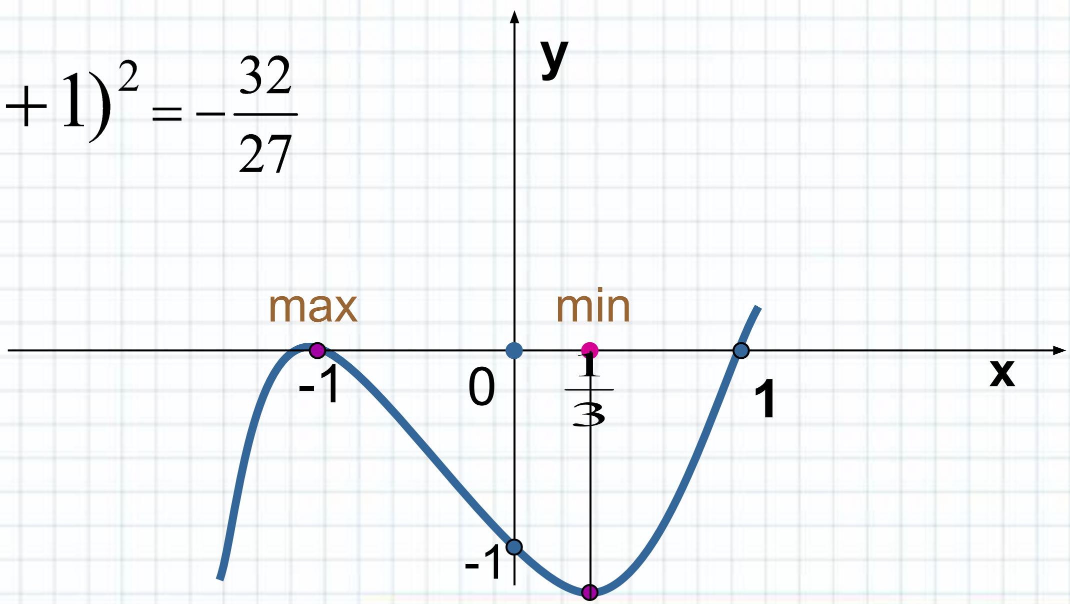
+ max - min +

-1 $\quad \frac{1}{3}$ x

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$x > \frac{1}{3}$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗
		max		min	

$$f(-1) = (-1-1)(-1+1)^2 = 0$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}+1\right)^2 = -\frac{32}{27}$$



Построить график функции

$$y = x + \frac{4}{x}$$

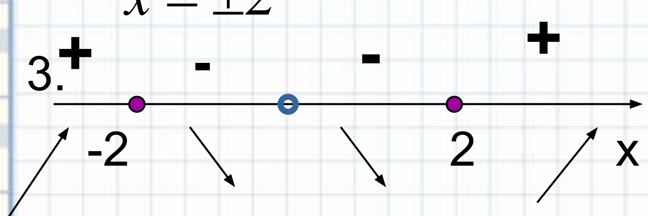
1. $X \neq 0$

2. *Функция нечетная, т.к y(x) = y(-x)*

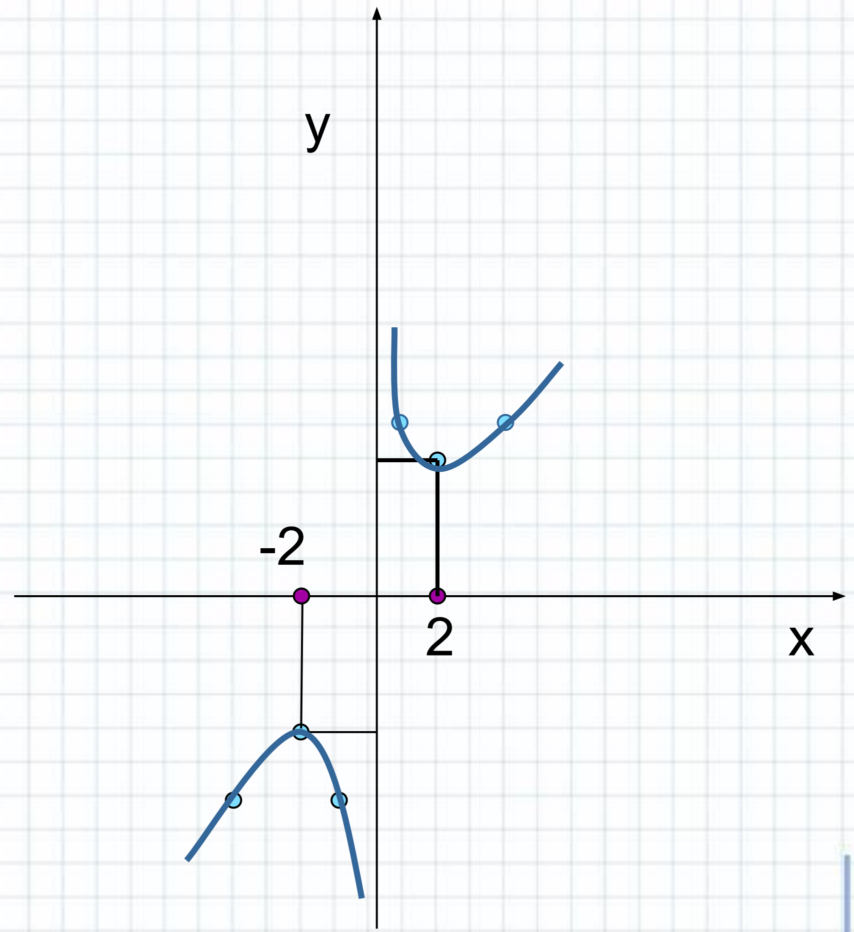
График функции симметричен относительно точки (0;0)

$$y' = 1 - \frac{4}{x^2}$$

$$x = \pm 2$$

3. 

x	0< x <2	2	X>2
У	-	0	+
У'	↘	4	↗



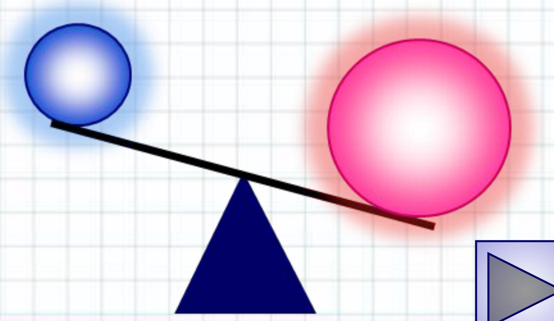
Дополнительные точки f(1)=5 f(4)=5

Наибольшее и наименьшее значения функции

Алгоритм

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции f(x) на отрезке [a; b] нужно:

1. *найти значения функции* ***на концах отрезка****, т.е. числа* ***f(a)*** *и* ***f(b)****;*
2. *найти её значения в тех* ***критических точках****, которые принадлежат интервалу* ***(a; b)****;*
3. *из найденных значений выбрать* ***наибольшее*** *и* ***наименьшее.***



Найти наибольшее (или наименьшее) значение функции $f(x)=x^2+\frac{16}{x^2}$ на интервале $x>0$

1) $f'(x)=\left(x^2\right)'+16\left(x^{-2}\right)'=2x-32x^{-3}=2x-\frac{32}{x^3}=\frac{2x^4-32}{x^3}=$

$=\frac{2\left(x^4-16\right)}{x^3}=\frac{2\left(x^2-4\right)\left(x^2+4\right)}{x^3}=\frac{2(x-2)(x+2)\left(x^2+4\right)}{x^3}$

2) $f'(x)=0$ при $x_1=2, x_2=-2\notin(0;+\infty)$

3) $f'(x)$ не существует при $x=0\notin(0;+\infty)$

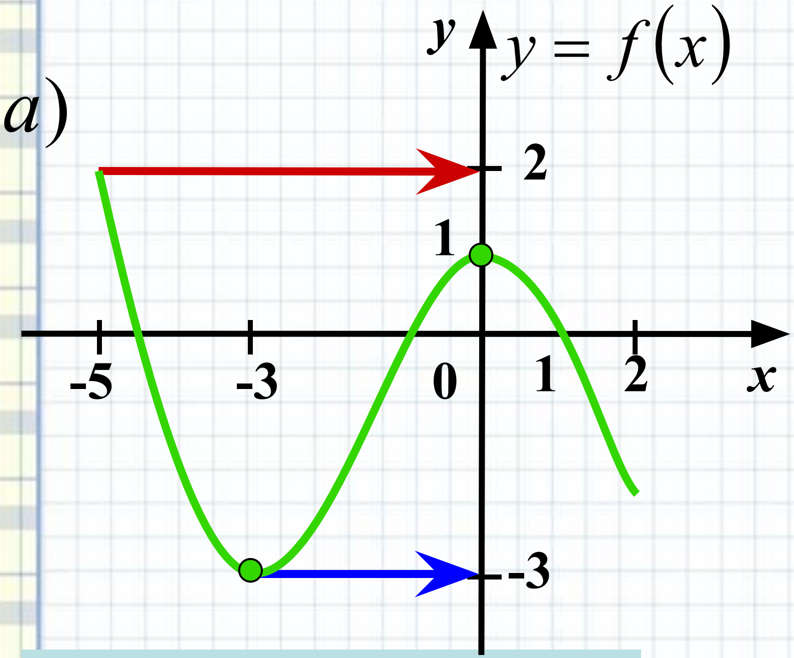
4) $f(2)=2^2+\frac{16}{2^2}=4+\frac{16}{4}=8$

Ответ: $8-$ наименьшее значение.

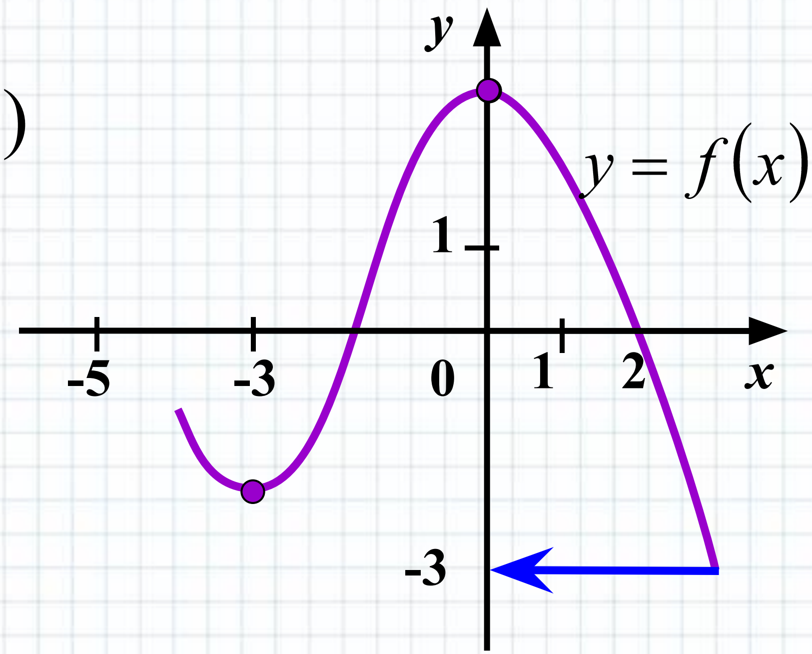
Алгоритм

Используя график функции, найти её точки экстремума, а также наибольшее и наименьшее значения:

а)



б)



	а)	б)
Точка максимума	$x = 0$	$x = 0$
Точка минимума	$x = -3$	$x = -3$
Наибольшее значение	2	3
Наименьшее значение	-3	-3

Геометрически – это ординаты самой высокой (самой низкой) точки графика.