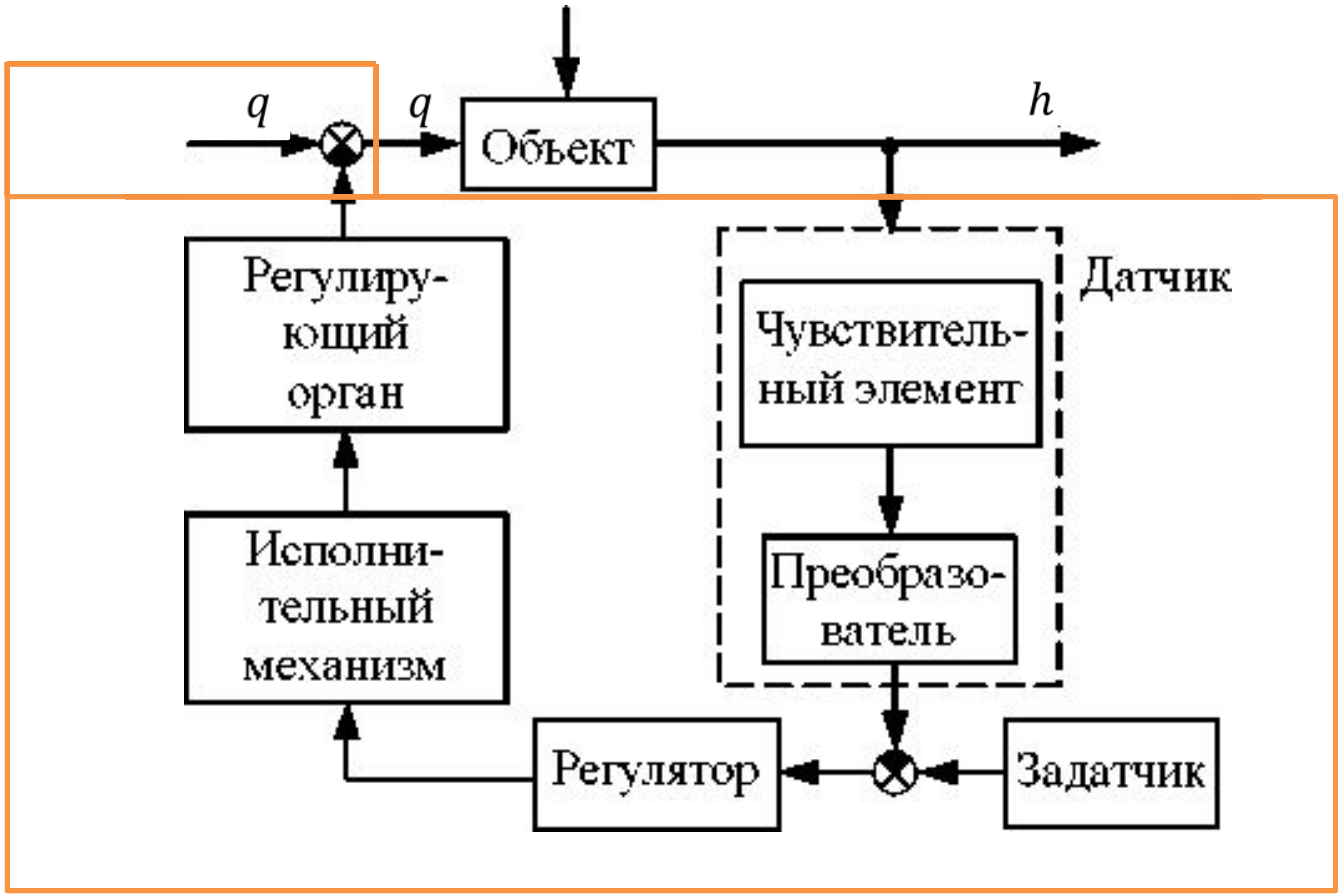
Лекция 4

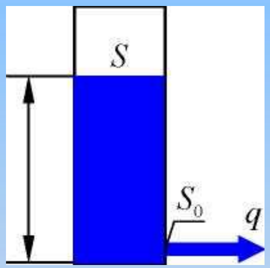
Математические модели объектов управления


q
q
Объект
h
Регулирующий орган
Датчик
Чувствительный элемент
Исполнительный механизм
Преобразователь
Регулятор
Задатчик

1. Алгебраические уравнения

Рассмотрим бак с водой. Площадь сечения бака - S, а площадь сечения отверстия - S_0.

Построим модель, которая связывает уровень воды в баке h (в *метрах)* и расход вытекающей воды q (в $м^3/с$).



Согласно закону Бернулли

$$\rho g h = \frac{\rho v^2}{2}$$

Здесь ρ - плотность жидкости (в $кг/м^3$), $g = 9{,}81$ $м/с^2$ - ускорение свободного падения, v - скорость вытекания жидкости (в $м/с$).

Отсюда $v = \sqrt{2gh}$. Учитывая, что $q = S_0 \cdot v$

$$q = \alpha\sqrt{h}, \qquad (2)$$

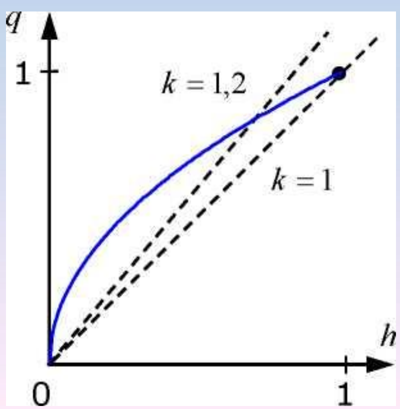
где $\alpha = S_0\sqrt{2g}$- постоянная величина.

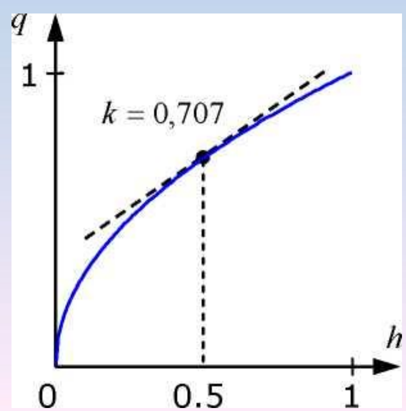
Это ***статическая*** модель. Очевидно, что модель (2) – нелинейная, поскольку содержит $\sqrt{h}$.

Линеаризовать ее – значит приближенно заменить уравнение (2) линейным уравнением

$$q = k \cdot h,$$

где k – некоторый коэффициент.





$$q = \frac{\sqrt{2}}{2} h + \frac{\sqrt{2}}{4}. \tag{3}$$

Это линейное уравнение, однако модель (3) – *нелинейная*.

Для того, чтобы получить из (3) линейную модель, нужно записать *уравнения в отклонениях* от *рабочей точки* $(h_0;\ q_0)$.

$$q_0 + \Delta q = \frac{\sqrt{2}}{2}(h_0 + \Delta h) + \frac{\sqrt{2}}{4}. \tag{4}$$

После преобразований получается

$$\Delta q = \frac{\sqrt{2}}{2} \Delta h. \qquad 5)$$

Это *линейная* модель объекта, записанная в отклонениях входа и выхода от *номинальной (рабочей) точки* $(h_0;\ q_0)$.

2. Дифференциальные уравнения

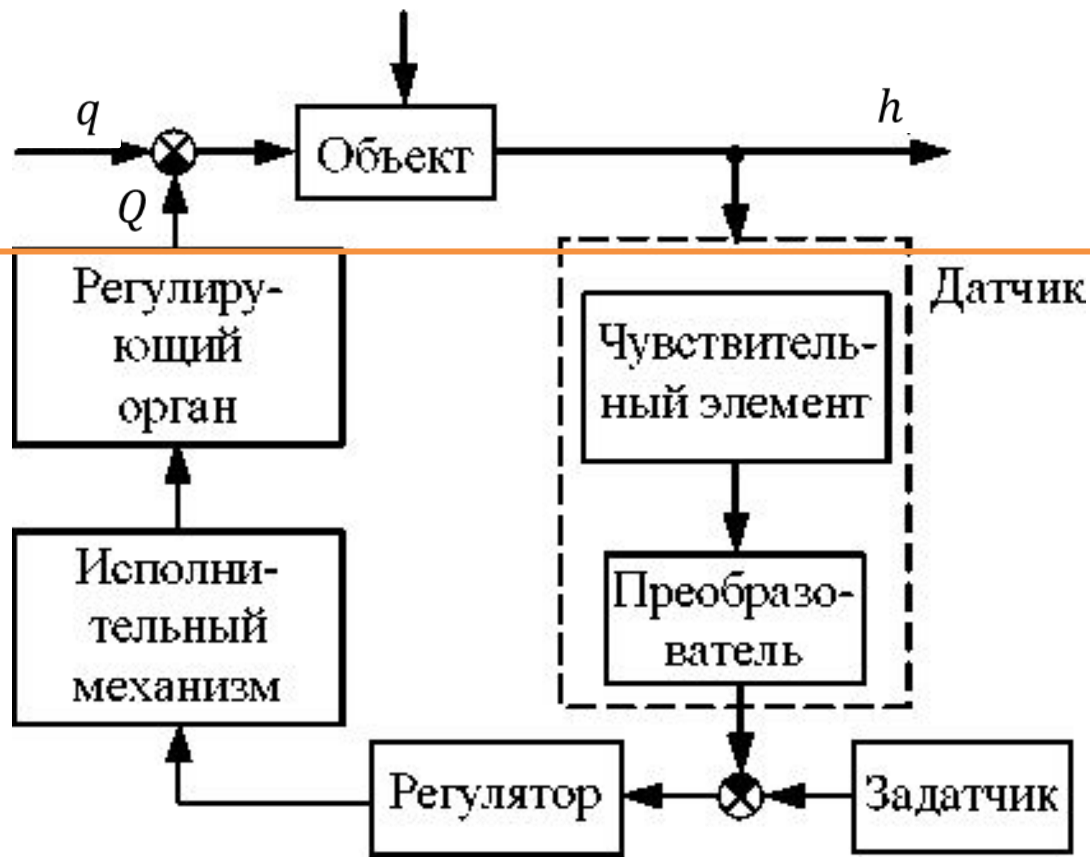
Вернемся к модели для бака с водой, но с учетом расхода и пополнения воды.

Для поддержания уровня воды используется насос, который подкачивает воду в бак с производительностью Q .

Для такого объекта *входом* является Q, а *выходом* – *изменение уровня* h.

Для маленького интервала Δt

$$\Delta h = \frac{Q - q}{S} \Delta t.$$


q
Объект
h
Q
Регулирующий орган
Датчик
Чувствительный элемент
Исполнительный механизм
Преобразователь
Регулятор
Задатчик

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{S}[Q(t) - q(t)].$$

Эта модель учитывает, что уровень воды и расходы изменяются во времени.

Выше было отмечено, что

$$q(t) = \alpha \cdot \sqrt{h(t)}.$$

Поэтому уравнение можно записать в виде

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{S}Q(t) - \frac{\alpha}{S}\sqrt{h(t)}. \qquad (6)$$

Нужна линеаризация.

Для рабочей точки $Q = Q_0$ и выхода $h = h_0$

$$Q = Q_0 + \Delta Q \quad \text{и} \quad h = h_0 + \Delta h,$$

где ΔQ и Δh – малые отклонения входа и выхода от рабочей точки.

Дальше для линеаризации используется разложение функций в *ряд Тейлора*.

Для некоторой функции $f\,(x,\, y)$ в окрестности точки $(x_0,\, y_0)$ этот ряд имеет вид:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y + F(x,y). \quad (7)$$

При малых значениях Δx и Δy можно считать, что $F(x, y)$ очень мал, примерно равен нулю, поэтому

$$f\ (x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y. \qquad (8)$$

Применим формулу (8) для линеаризации правой части уравнения (6), где в роли x выступает расход Q, а в роли y – уровень h. Выполняя дифференцирование, находим

$$\frac{\partial}{\partial Q}\left[\frac{1}{S}Q - \frac{\alpha}{S}\sqrt{h}\right] = \frac{1}{S}$$

$$\frac{\partial}{\partial h}\left[\frac{1}{S}Q - \frac{\alpha}{S}\sqrt{h}\right] = \frac{\alpha}{2S\sqrt{h}}$$

Тогда с помощью формулы (8) получаем

$$\frac{1}{S}Q - \frac{\alpha}{S}\sqrt{h} \approx \frac{1}{S}Q_0 - \frac{\alpha}{S}\sqrt{h_0} + \frac{1}{S}\Delta Q - \frac{\alpha}{2S\sqrt{h_0}}\Delta h.$$

Подставим $Q = Q_0 + \Delta Q$ и $h = h_0 + \Delta h$ в уравнение (6) и учтем, что $\frac{d(h+\Delta h)}{dt} = \frac{d\Delta h}{dt}$. Тогда

$$\frac{d\Delta h}{dt} = \frac{1}{S}\,Q_0 - \frac{\alpha}{S}\sqrt{h_0} + \frac{1}{S}\Delta Q - \frac{\alpha}{2S\sqrt{h_0}}\Delta h.$$

Так как Q_0 и h_0 соответствуют статическому режиму, то $\frac{1}{S}\,Q_0 - \frac{\alpha}{S}\sqrt{h_0} = 0.$ В результате получаем *линеаризованное уравнение* в отклонениях от рабочей точки:

$$\frac{d\Delta h}{dt} + k_h \cdot \Delta h \approx k_Q \cdot \Delta Q\,, \qquad (9)$$

где $k_h = \frac{\alpha}{2S\sqrt{h}}$ и $k_Q = \frac{1}{S}$.

Заметим, что коэффициент k_h зависит от h_0, то есть от выбора рабочей точки. В этом проявляется нелинейность объекта.

Обычно при записи линеаризованного уравнения знак Δ (обозначающий отклонение) не пишут. Поэтому

$$\frac{dh(t)}{dt} + k_h \cdot h(t) \approx k_Q \cdot Q(t), \qquad (10)$$

Но нужно помнить, что это *уравнение в отклонениях*, и оно справедливо только при малых отклонениях от рабочей точки (Q_0, h_0).

При выборе другой рабочей точки коэффициент k_h получится другой.