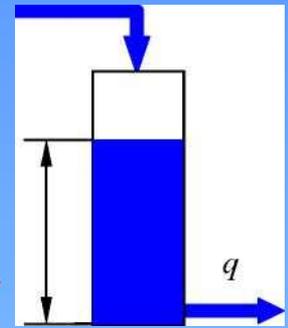


Лекция 5

Математические модели управления объектом

1. Управление

Нужно построить систему, которая автоматически поддерживает заданный уровень h_0 воды в цистерне (м).

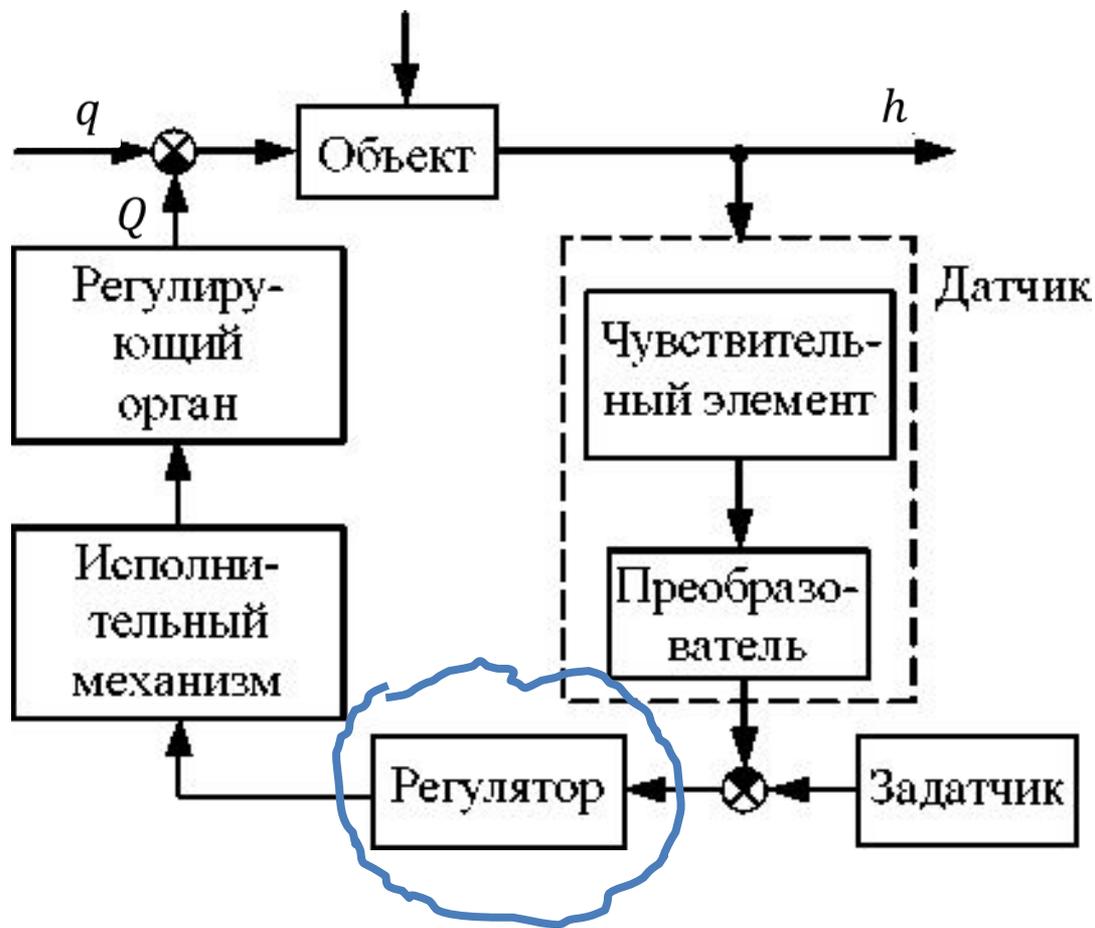


Уровень h – это *регулируемая величина*, а поток Q – *сигнал управления*.

Для обратной связи используем датчик, измеряющий уровень воды h в цистерне.

Поток на выходе q ($\text{м}^3/\text{с}$).

Изменение уровня Δh зависит от разности потоков $Q - q$ и площади сечения цистерны S .



9

Предположим что

$$Q(t) = Q_0 + \Delta Q(t), \quad q(t) = q_0 + \Delta q(t),$$

Тогда

$$\Delta h(t) = \frac{1}{S} \int_0^t (q_0 + \Delta Q(t) - q_0 - \Delta q(t)) dt.$$

$$\Delta h(t) = \frac{1}{S} \int_0^t (\Delta Q(t) - \Delta q(t)) dt.$$

Если опустить знак приращения Δ , то

$$h(t) = \frac{1}{S} \int_0^t (Q(t) - q(t)) dt.$$

Здесь $h(t)$, $Q(t)$ и $q(t)$ обозначают отклонения этих величин от номинальных значений.

Эта модель может быть записана как дифференциальное уравнение:

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{S} [Q(t) - q(t)].$$

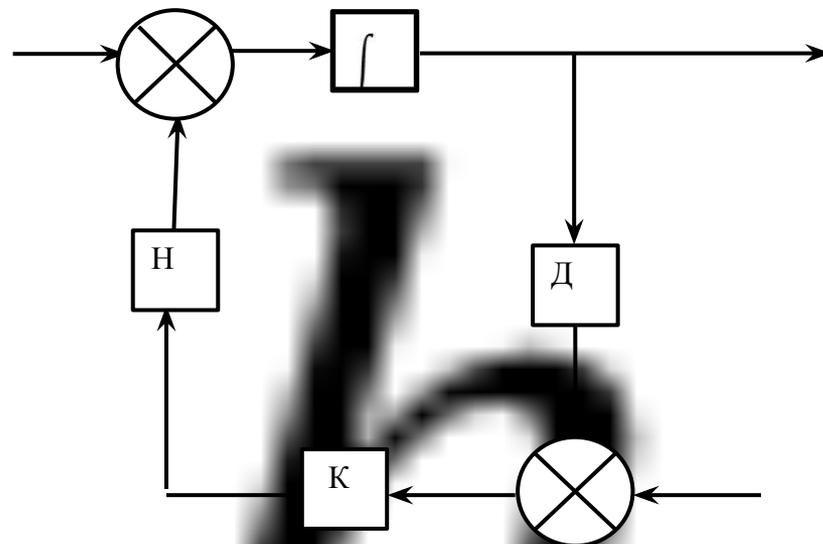
Для упрощения далее примем $S = 1 \text{ м}^2$.

Ошибка управления вычисляется как разница между заданным и измеренным уровнями воды:

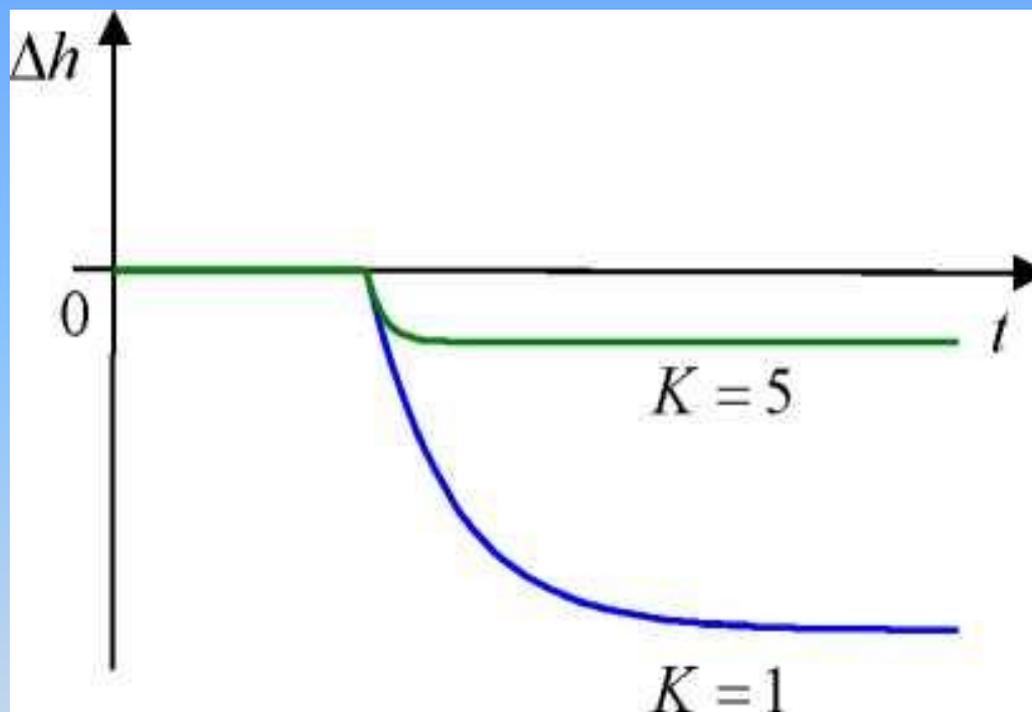
$$e(t) = h_0(t) - h(t) .$$

Применим самый простой регулятор – *усилитель* с коэффициентом K (или *пропорциональный регулятор*, *П-регулятор*), который управляет потоком по закону

$$Q(t) = K \cdot e(t) = K \cdot [h_0(t) - h(t)].$$



Работа этого регулятора при различных значениях коэффициента K .



2. Передаточная функция

Пусть модель объекта задана линейным дифференциальным уравнением второго порядка, связывающим вход $x(t)$ и выход $y(t)$:

$$b_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 y(t) = a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t). \quad (18)$$

Применим к левой и правой частям преобразование Лапласа, считая, что все начальные условия нулевые.

Получается уравнение в изображениях, связывающее преобразования Лапласа входа $X(p)$ и выхода $Y(p)$:

$$b_2 \cdot p^2 Y(p) + b_1 \cdot p Y(p) + b_0 \cdot Y(p) = a_1 \cdot p X(p) + a_0 \cdot X(p)$$

После преобразований получаем

$$(b_2 p^2 + b_1 p + b_0) \cdot Y(p) = (a_1 p + a_0) \cdot X(p).$$

Отсюда

$$Y(p) = \frac{a_1 p + a_0}{b_2 p^2 + b_1 p + b_0} X(p) = W(p) \cdot X(p).$$

Здесь

$$W(p) = \frac{a_1 p + a_0}{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}. \quad (30)$$

$W(p)$ – это *передаточная функция* объекта, записанная в виде функции от комплексной переменной p а в (22).

Таким образом, при нулевых начальных условиях *изображение выхода* линейного объекта вычисляется как произведение его *передаточной функции* на *изображение входного сигнала*.

Из (18) следует и другой важный вывод: *передаточная функция* равна отношению *изображений* по Лапласу *выхода* и *входа* при нулевых начальных условиях.