ДИСКРЕТНЫЕ СТРУКТУРЫ

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ СООТВЕТСТВИЯ. ФУНКЦИИ. ОТОБРАЖЕНИЯ

ЛЕКЦИЯ 2

Математический факультет. Кафедра математического моделирования

Тема: Соответствия. Функции. Отображения

Цель лекции – ознакомиться и овладеть понятием «соответствие», изучить свойства соответствий для применения в задачах компьютерной инженерии

Содержание:

- Понятие упорядоченной пары и вектора
- Декартово произведение множеств
- Определение соответствия
- Свойства соответствий
- Взаимно-однозначное соответствие
- Функции
- Отображения

Литература

- **Горбатов В.А.** Основы дискретной математики. М.: Высш. шк., 1986. 9-12 с.
- **Лавров И.А., Максимова Л.Л.** Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. 4-10 с.
- **Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М.** Дискретная математика для инженера. М.: Энергия, 1980. 344 с.
- **Богомолов А.М., Сперанский Д.В.** Аналитические методы в задачах контроля и анализа дискретных устройств. Саратов: Изд-во Саратовкого ун-та, 1986. 240с.
- **Новиков Ф.А.** Дискретная математика для программистов. С.-П., 2001. С. 4-24.
- **Хаханов В.I., Хаханова I.В., Кулак Е.М., Чумаченко С.В.** Методичні вказівки до практичних занять з курсу “Дискретна математика”. Харків, ХНУРЕ. 2001. 87с.

Термины

Базовые понятия:

- множество,
- упорядоченная пара,
- подмножество

Ключевые слова:

- декартово (прямое) произведение множеств,
- соответствие,
- всюду определенность,
- сюръективность,
- инъективность,
- функциональность,
- биекция (взаимная однозначность)

Основные понятия: упорядоченная пара, вектор

- Упорядоченная пара является одним из **первичных** понятий в теории множеств
- Под **упорядоченной парой** следует понимать двухэлемен-тное упорядоченное множество
- **Вектор (кортеж)** представляет собой упорядоченный набор элементов

  $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где **$x_i$** – **координаты (компоненты)**
- **Длина (размерность)** вектора определяется количеством его координат

Проекция вектора на ось

Два вектора **x, y** одинаковой размерности **равны**, если их соответствующие компоненты равны:

$$x=y \Leftrightarrow \forall i \quad x_i=y_i$$

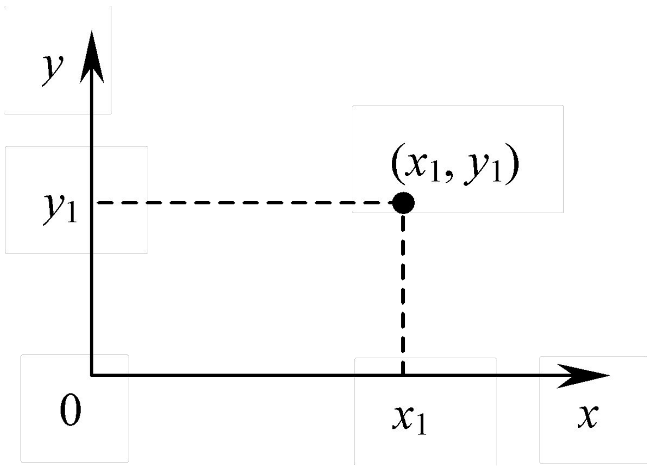
Def: **проекцией вектора** $\mathbf{x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ на i-ю ось называется его i-й компонент $\mathbf{Pr_i\, x = x_i}$

Def: пусть **V** – множество векторов одинаковой длины, тогда **проекцией множества V на i-ю ось** называется множество проекций всех векторов из V:

$Pr_i V = \{Pr_i v \mid v \in V\}$

Примеры

- Координаты точки плоскости образуют упорядоченную пару: на первой позиции – абсцисса, на второй – ордината. Они являются проекциями на первую и вторую оси соответственно



- Дано множество V векторов размерности 3:

  V = { (a,b,c), (c,b,d), (b,b,d) }

  Можно найти проекции множества V на оси

$$Pr_1V=\{a,c,b\}$$

$$Pr_2V=\{b\}$$

$$Pr_3V=\{c,d\}$$

Декартово (прямое) произведение множеств 1

- **Def: прямое (декартово) произведение множеств** **A** и **B** есть множество всех упорядоченных пар **(a,b)** таких, что **a∈A, b∈B**:

$$A\times B=\{\ (a,b)\ |\ a\in A,\ b\in B\ \}$$

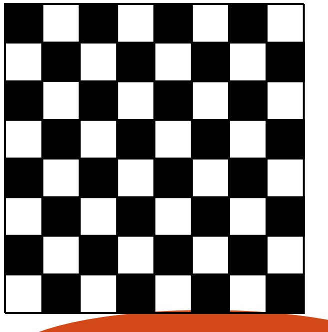
- **Примеры**

1. Декартово произведение множеств **A={1,2}, B={3,4,5}** есть

$$A\times B = \{\ (1,3),\ (1,4),\ (1,5),\ (2,3),\ (2,4),\ (2,5)\ \}$$

2. A={1,2,3,4,5,6,7,8}, B={a,b,c,d,e,f,g,h}

A×B – обозначение клеток шахматной доски



Декартово (прямое) произведение множеств 2

- **Декарту принадлежит координатное представление точек плоскости**
- **Множество точек плоскости** $R \times R = R^2$ **есть множество пар вида** (a,b), $a \in R$, $b \in R$:

$$R^2 = \{(a,b) \mid a \in R,\ b \in R\}$$

- **Декартов квадрат** $(A=B)$:

$$A \times A = A^2 = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in A\}$$

- **Def:** **прямое произведение n множеств**

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n) \mid a_i \in A_i,\ i = \overline{1,n}\}$$

- **Мощность декартова произведения множеств:**

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \bullet |A_2| \bullet \ldots \bullet |A_n|$$

Рене Декарт XVI-XVII вв.

Соответствия

- **Def: соответствие** – подмножество декартова произведения двух множеств:

$$G \subseteq A \times B$$

- A – **область определения** (**множество отправления**) соответствия G :

$$Pr_1 G = \{ x \mid (x,y) \in G \}$$

- B – **область значений (множество прибытия)** соответствия G :

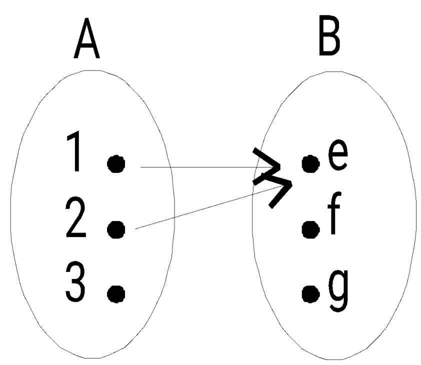
$$Pr_2 G = \{ y \mid (x,y) \in G \}$$

Образы и прообразы

- **Def:** множество всех элементов $y \in B$, соответствующих элементу $x \in A$, называется **образом** элемента x в множестве B при соответствии G.
- **Def:** множество всех элементов $x \in A$, которым соответствует элемент $y \in B$, называется **прообразом** элемента y в множестве A при соответствии G.
- **Пример**

  $A=\{1,2,3\}$, $B=\{e,f,g\}$

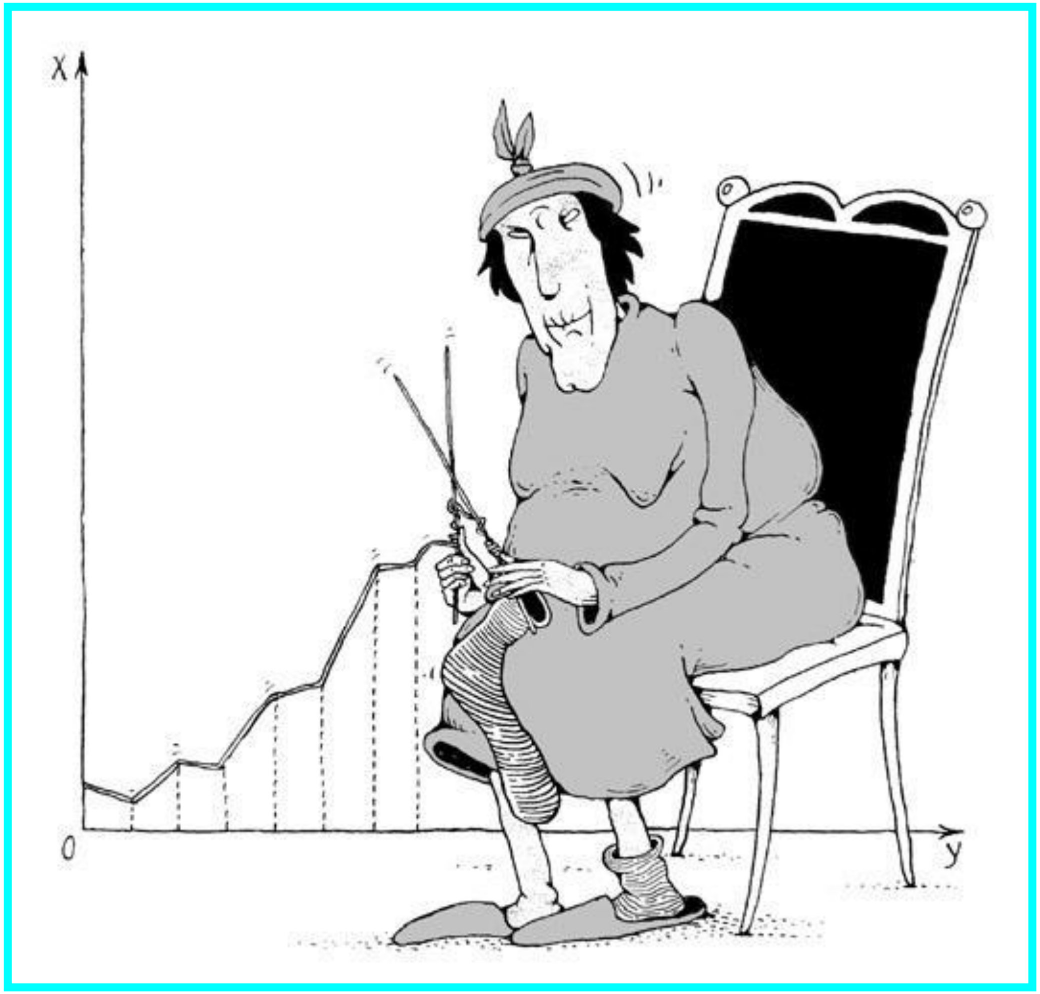
  $G=\{(1,e), (2,e)\} \subseteq A \times B$



G

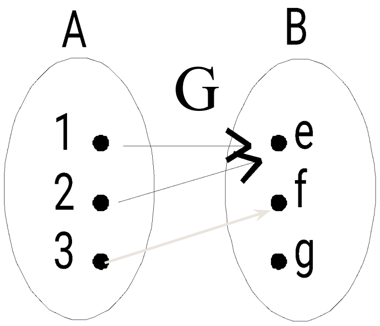
прообразы образы

Time Out

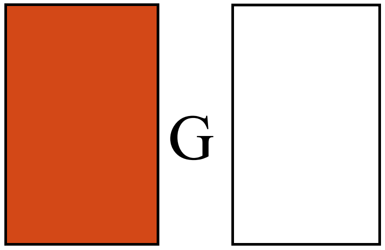


Свойства соответствий. 1

- **Всюду определенность:** $\mathbf{Pr_1 G = A}$

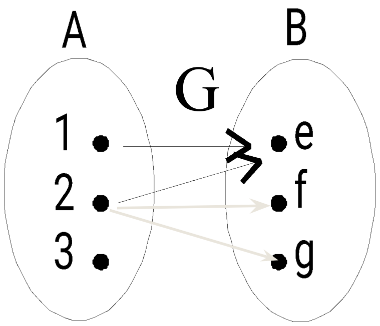


Пример

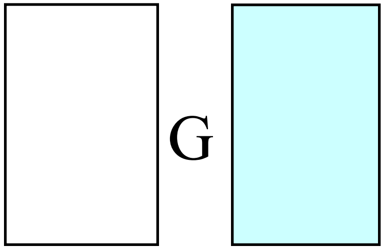


Схема

- **Сюръективность:** $\mathbf{Pr_2 G = B}$



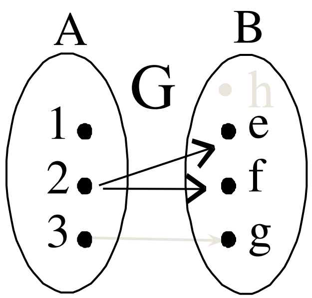
Пример



Схема

Свойства соответствий. 2

- **Инъективность**: $\text{in } G: A \to B \Leftrightarrow \forall y \in Pr_2 G \subset B \ \exists! x \in Pr_1 G \subset A$



Пример

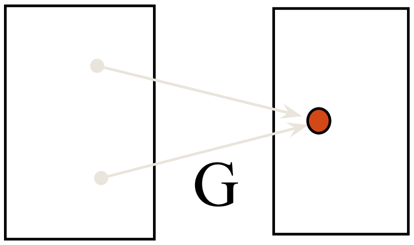
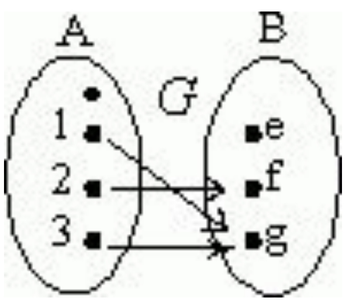


Схема (контрпример)

- **Функциональность**: $G: A \to B \Leftrightarrow \forall x \in Pr_1 G \subset A \ \exists! y \in Pr_2 G \subset B$



Пример

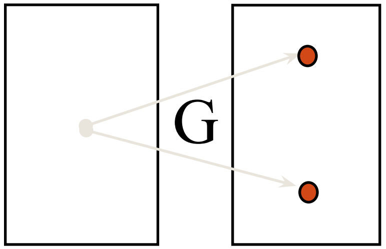
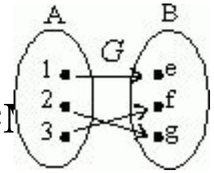


Схема (контрпример)

Взаимно-однозначное соответствие (биекция). Функция. Отображение

Биекция = Всюду определенность + Sur + In + Функциональность

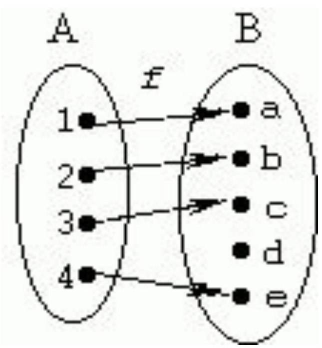
- Соответствие **взаимно-однозначно** (**биективно**), если оно обладает одновре



  всеми названными свойствами
- **Функция** – функциональное соответствие

$$f: A \to B \Leftrightarrow \forall x \in Pr_1 \subset A\ \exists! y \in Pr_2 \subset B:\ f(x) = y$$

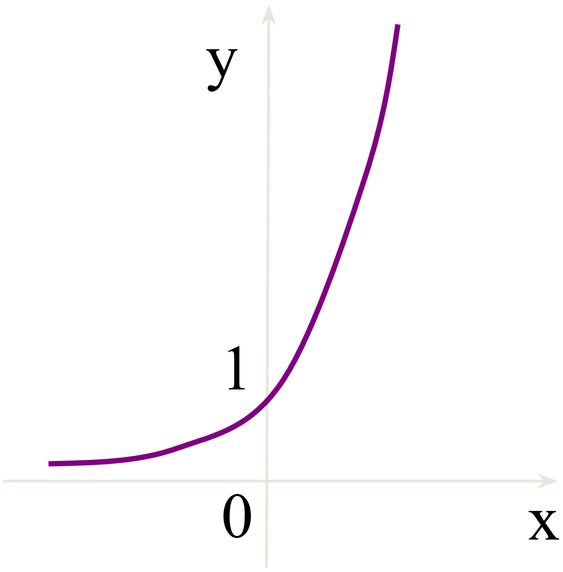
x – аргумент, y – значение функции



- **Отображение** – всюду определенная функция

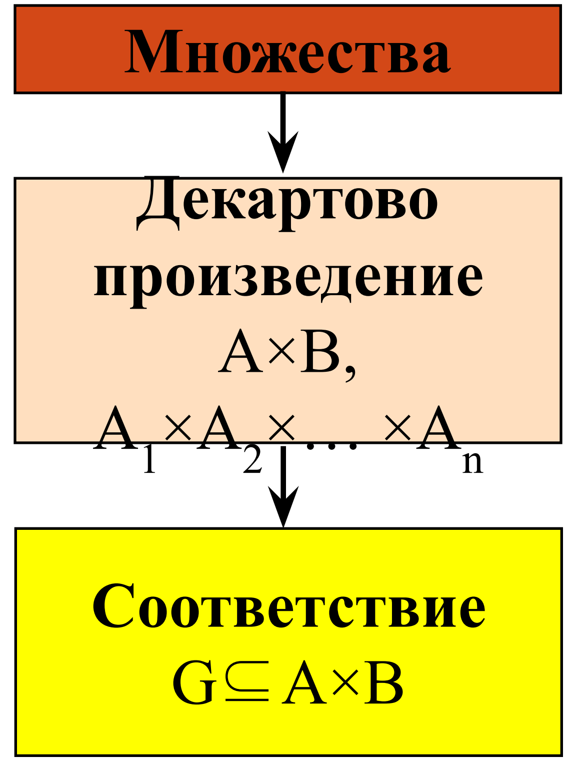
Пример

- Соответствие $G=\{ (x,y) \mid y = \exp x \} \subset$ **R**×**R**
- всюду определено: $Pr_1G = (-\infty; \infty) =$ **R**
- не **sur**: $Pr_2G = (0; \infty) \neq$ **R**
- **in:** образ имеет единственный прообраз
- функционально: каждому прообразу соответствует единственный образ
- не является **bi**



Выводы

- Соответствие представляет собой произвольное подмножество декартова произведения двух множеств
- Если множества имеют одинаковое количество элементов, то между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие
- Классификация соответствий применяется в задачах компьютерной инженерии и управления



Тест-вопросы. 1

1. Могут ли повторяться компоненты вектора?
а) да;
б) нет.

2. Длина вектора определяется:
а) числом различных элементов;
б) числом координат.

3. Какое из соответствий называется взаимно-однозначным:
а) сюръективное, инъективное и функциональное?
б) сюръективное и инъективное?
в) всюду определенное, сюръективное, инъективное и функциональное?

Тест-вопросы. 2

4. Является ли отображение биективным, если оно сюрьективно и инъективно?
а) да;
б) нет.

5. Отображение А в В это:
а) частично определенная функция;
б) всюду определенная функция;
в) сюрьективное соответствие;
г) инъективное соответствие.

Тест-вопросы. 3

6. Верно ли: $\forall A,B \;\; A\times B=B\times A$?
а) да;
б) нет.

7. Указать проекцию множества A={(3,3,5), (3,3,6), (3,5,5), (3,5,6), (8,3,5), (8,3,6), (8,5,5), (8,5,6)} на третью ось
а) ПРА={3,8},
б) ПРА={3,5},
в) ПРА={5,6}.

8. Верно ли: $|A^n| = |A|^n$?
а) да
б) нет.

9. Соответствие является подмножеством
а) объединения двух множеств;
б) пересечения двух множеств;
в) теоретико-множественной разности двух множеств;
г) декартова произведения нескольких множеств;
д) декартова произведения двух множеств.