ДИСКРЕТНЫЕ СТРУКТУРЫ
ТЕОРИЯ ГРАФОВ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

ЛЕКЦИЯ 13

Математический факультет. Кафедра математического моделирования

Цель лекции – овладеть основными понятиями теории графов

Термины

Базовые понятия:

- множество,
- бинарное отношение

Ключевые слова:

- граф,
- вершина,
- ребро,
- дуга,
- смежность,
- инцидентность,
- степень вершины,
- мультиграф,
- псевдограф,
- связность

Литература

- Кристофидес Н. Теория графов. Апгоритмический подход. М.: Мир, 1978. 432 с.
- Глускин Л.М., Шор Л.А., Шварц В.Я. Задачи и алгоритмы комбинаторики, и теории графов. Донецк, ДПИ, 1982. 368 с.
- Харари Ф. Теория графов: Пер. с англ. В.П. Козырева / Под ред. Г.П. Гаврилова. М.: Мир, 1973. 300 с.
- Новиков Ф.А. Дискретная математика длшя программистов. С.-П., 2001. С. 263-268.
  Хаханов В.І., Хаханова І.В., Кулак Е.М., Чумаченко С.В. Методичні вказівки до практичних занять з курсу "Дискретна математика". Харків, ХНУРЕ. 2001. 47-62 с.

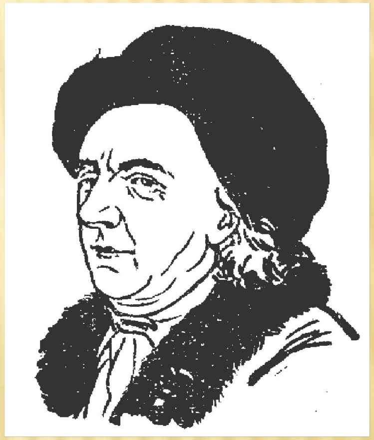
Теория графов – раздел дискретной математики. 1

Природа говорит языком математики: буквы этого языка – круги, треугольники и иные математические фигуры
Г. Галилей

Теория графов связана с проектированием вычислительных машин, комбинаторным анализом, служит математической моделью для всякой системы, содержащей бинарное отношение

Теория графов – раздел дискретной математики. 2

- В теории графов решалось много проблем, достойных внимания самых искушенных математиков
- Основоположником теории графов считается Леонард Эйлер, который доказал невозможность маршрута прохождения всех четырех частей суши в задаче о кенигсбергских мостах (1736)
- Графы обладают эстетической привлекательностью благодаря их представлению в виде диаграмм



Леонард Эйлер

Связь теории графов с теорией множеств

- Граф имеет теоретико-множественное представление
- Граф определяется как множество вершин и множество ребер
- Множество ребер является бинарным отношением на множестве вершин

Множество M

Декартово произведение множеств $M_1 \times M_2$

Декартов квадрат множества M^2

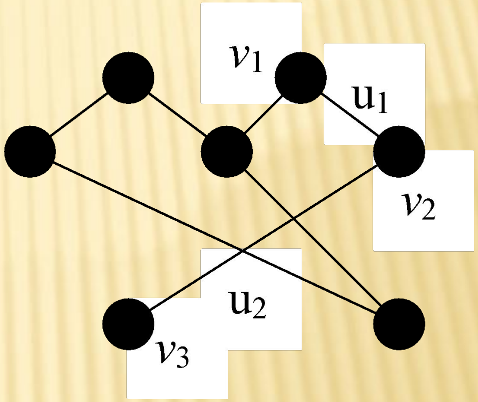
Бинарное отношение $R_2 \subseteq M^2$

Граф

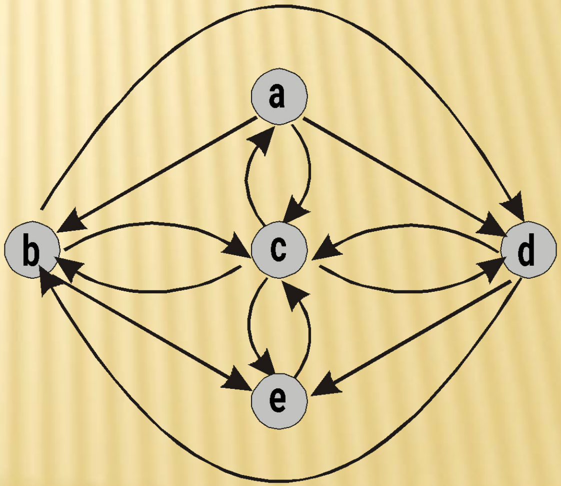
$G = \langle V, U \rangle,\ U \subseteq V^2$

Определение графа

- **Граф G=<V,E > –** совокупность вершин **V** и ребер **E** , где множество **E** представляет собой бинарное отношение на множестве вершин: **$|V|=n$, $E \subseteq V^{(2)}$**

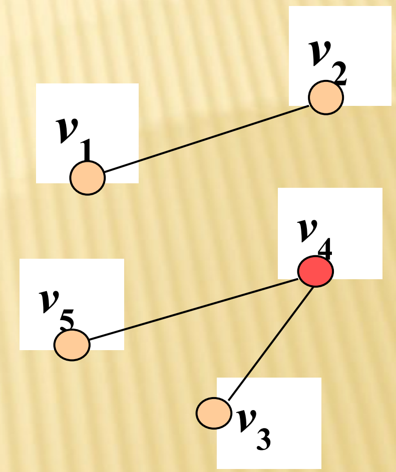


- Графом часто называют диаграмму, которой он представляется



Смежность и инцидентность

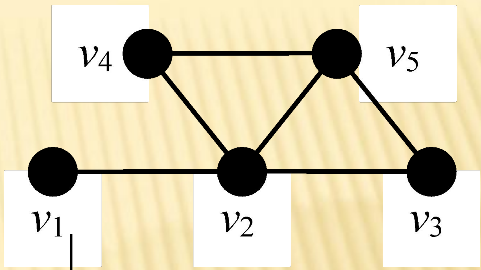
- **Вершины**, соединяемые некоторым ребром, называются **смежными**
- **Ребра**, имеющие общую вершину, называются **смежными**
- **Вершина** называется **инцидентной** ребру, если она является его началом или концом
- **Ребра**, инцидентные одной и той же вершине, называются **смежными**
- Понятие смежности относится к однородным объектам (вершинам или ребрам)
- Понятие инцидентности – к разнородным (вершинам и ребрам)
- Количество ребер, инцидентных данной вершине, называется **степенью** вершины и обозначается **deg v**



$$(v_5,v_4)\mathrm{adj}(v_4,v_3)$$

$$\deg v_4=2$$

Маршруты на графах



- **Маршрут** или **путь** на графе – последовательность вида $v_1, u_1, v_2, u_2, \ldots \ldots \ldots u_n, v_{n+1}$, где стоящие рядом ребра и вершины инцидентны
- **Цепь** – маршрут, в котором нет повторяющихся ребер
- **Простая цепь** – маршрут, в котором нет повторяющихся вершин и ребер
- **Цепь**, у которой первая и последняя вершины совпадают, называется **замкнутой**
- Замкнутая цепь называется **циклом**
- Замкнутый маршрут называется **простым циклом**, если все его n вершин различны и n≥3

маршрут v_1, v_2, v_5, v_2, v_3 не является цепью;

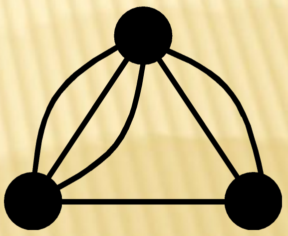
$v_1, v_2, v_5, v_4, v_2, v_3$ – непростая цепь;

v_1, v_2, v_5, v_4 – простая цепь;

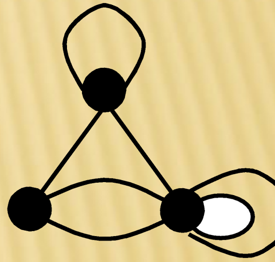
v_2, v_4, v_5, v_2 – простой цикл

Типы графов

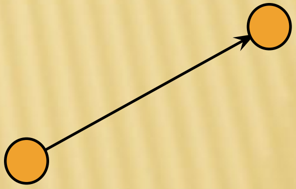
- **Мультиграф** – граф, в котором нет петель, но пары вершин могут соединяться более, чем одним ребром. Эти ребра называются **кратными**



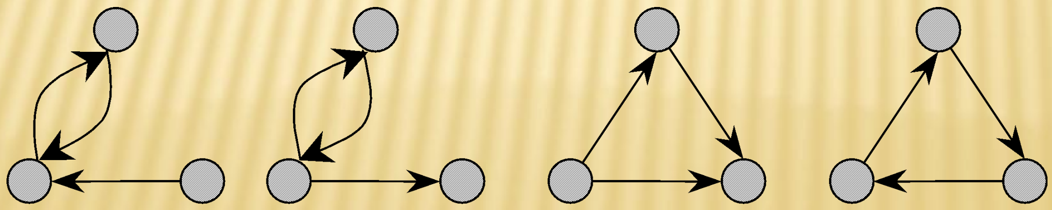
- **Псевдограф** – граф с петлями и кратными ребрами, т.е. мультиграф с петлями



- **Ориентированный граф (орграф)** состоит их конечного непустого множества вершин V и заданного набора U упорядоченных пар различных вершин (ребер)
- **Дуга** – ориентированное ребро

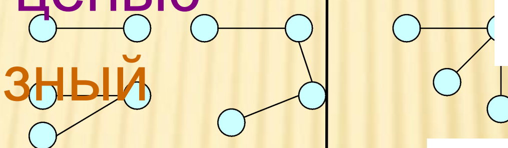


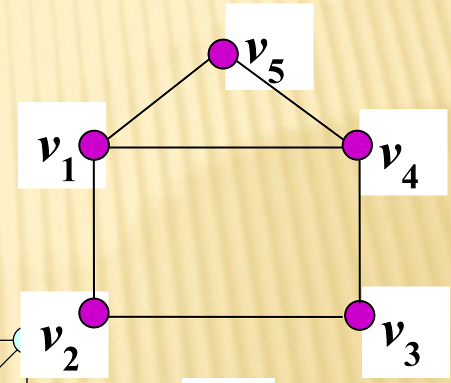
- **Направленный граф** – это орграф, не имеющий симметричных пар ориентированных ребер

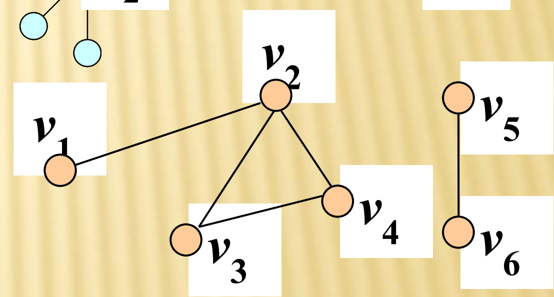


Связность и деревья

- Граф называется **связным**, если любые две его вершины можно соединить простой цепью
- Максимальный связный подграф графа называется **компонентой связности**
- Связный граф без циклов называется **деревом**

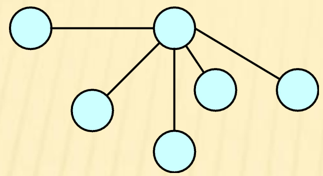


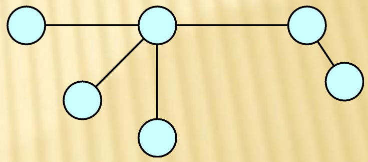




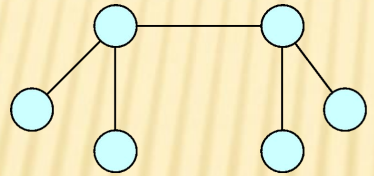
Деревья – пример

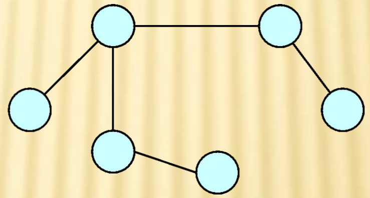
- Описать все деревья, содержащие 6 вершин

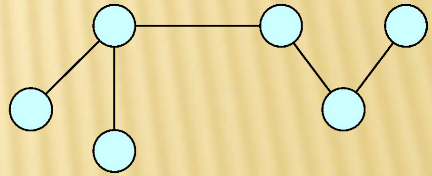




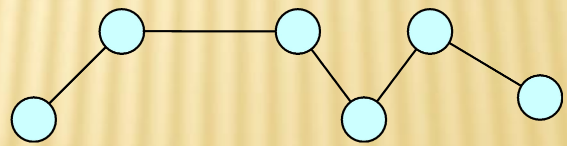
- Максимальная степень вершины 5
- Максимальная степень вершины 4







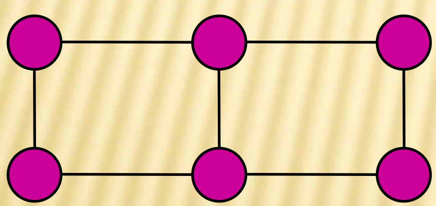
- Максимальная степень вершины 3



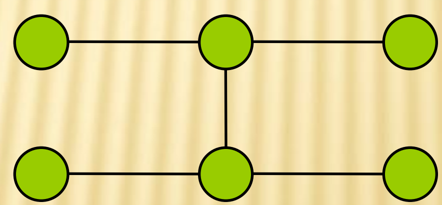
- Максимальная степень вершины 2

Подграфы графов

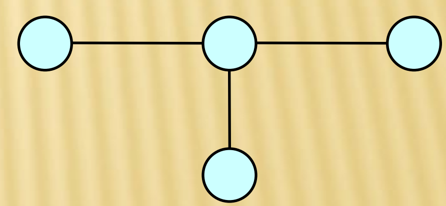
- **Подграфом** T графа G называется граф, у которого все вершины и ребра принадлежат графу G;
  G – **надграф** графа T
- **Остовный подграф** (**остов** или **частичный граф**) – связный подграф графа G, содержащий все его вершины
- Для любого подмножества **S⊆V** вершин графа **порожденным подграфом <S>** называется максимальный подграф графа **G**, множеством вершин которого является **S**



G

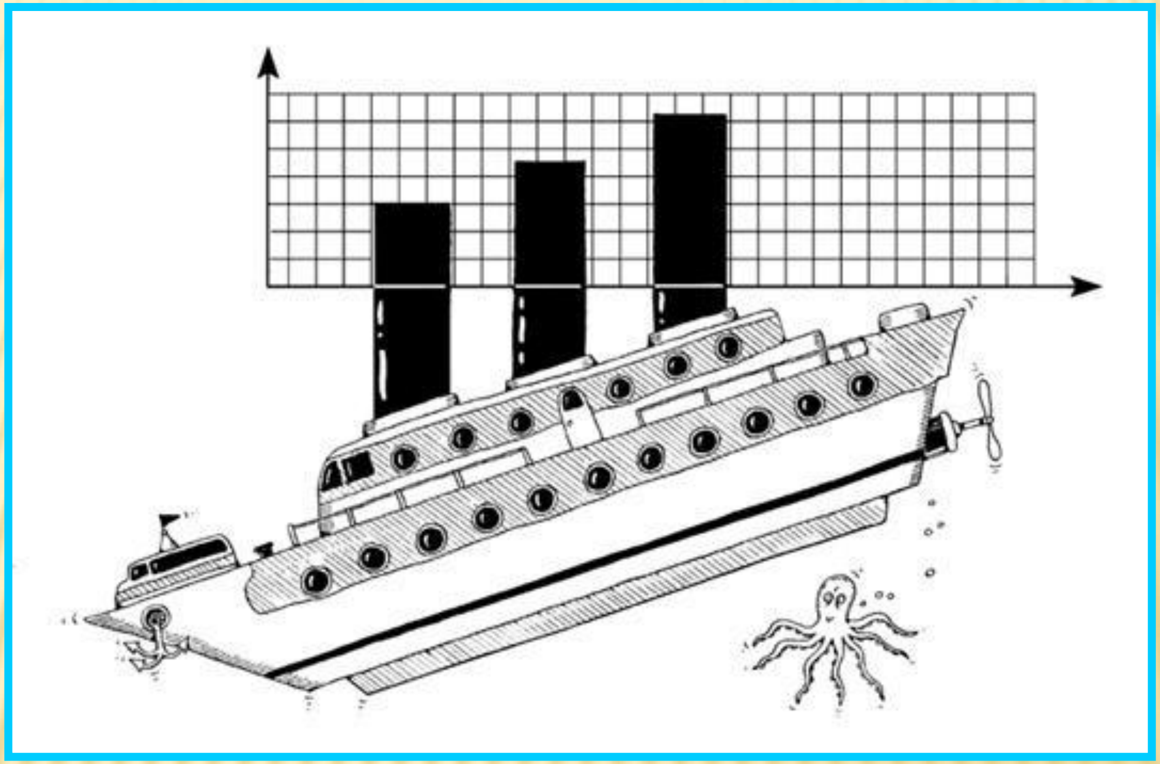


T



< S >

TIME-OUT



Изоморфизм графов. 1

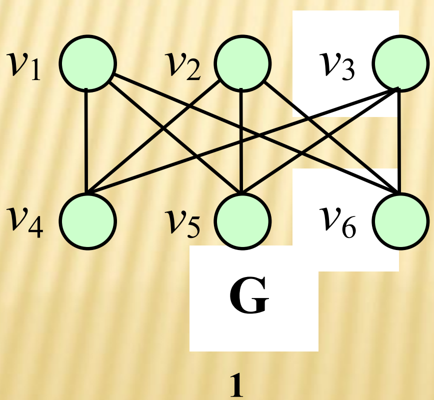
- **Изоморфизм** – взаимно-однозначное соответствие, сохраняющее свойства объектов
- Известны: изоморфизм множеств, изоморфизм упорядоченных множеств, изоморфизм алгебр
- **Изоморфизм графов** – взаимно-однозначное соответствие между множествами вершин и множествами ребер, сохраняющее смежность

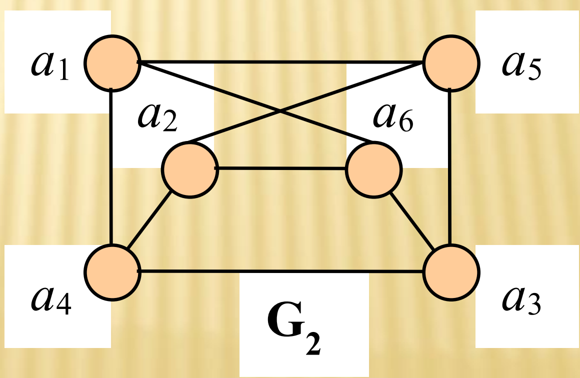
Изоморфизм графов. 2

- **Def:** два графа **G_1=<V_1,U_1>, G_2=<V_2,U_2>** называются **изоморфными**, если между множествами их вершин **V_1** и **V_2** существует взаимно-однозначное соответствие, сохраняющее смежность:

$$f: V_1 \xrightarrow{bi} V_2\ ,\ \{a,b\} \in U_1 \Leftrightarrow \{f(a), f(b)\} \in U_2$$

- **Пример:** графы G_1 и G_2 изоморфны. Изоморфизм устанавливается при помощи соответствия $f: v_i \leftrightarrow a_i,\ i = \overline{1,6}$





Операции над графами

- Для графов $G_1=\langle V_1,U_1\rangle$, $G_2=\langle V_2,U_2\rangle$ с непересекающимся множествами вершин (носителей графов) $V_1\cap V_2=\varnothing$ и ребер (сигнатур графов) $U_1\cap U_2=\varnothing$ вводятся операции:

объединение

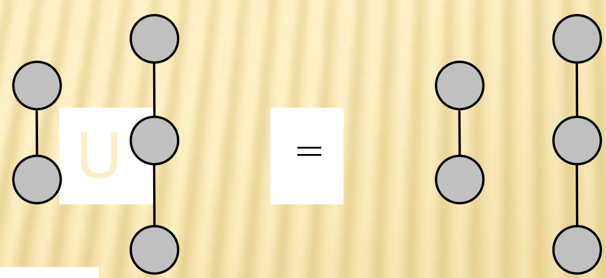
соединение

декартово произведение

композиция

Операции над графами: объединение

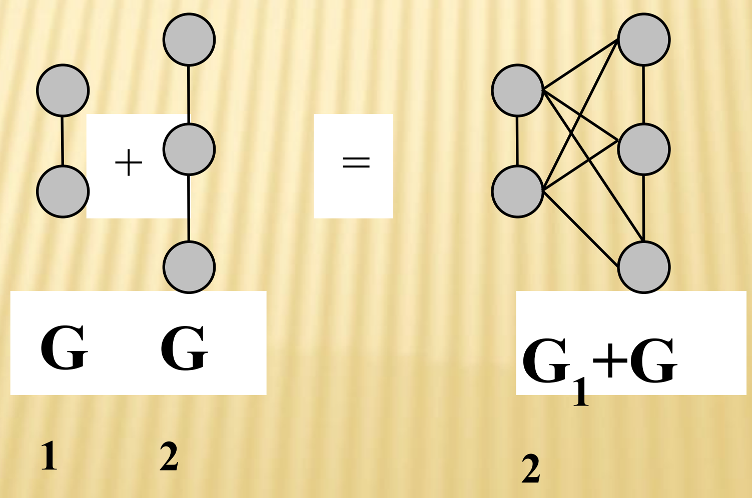
- Для графов $G_1 = \langle V_1, U_1 \rangle$, $G_2 = \langle V_2, U_2 \rangle$ с непересекающимся множествами вершин (носителей графов) $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ и ребер (сигнатур графов) $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ операция объединение $G_1 \cup G_2$ понимается в смысле теоретико-множественного объединения носителей и сигнатур $V_1 \cup V_2$, $U_1 \cup U_2$



G_1 G_2 $G_1 \cup G_2$

Операции над графами: соединение

- Для графов $G_1=<V_1,U_1>$, $G_2=<V_2,U_2>$ с непересекающимся множествами вершин (носителей графов) $V_1 \cap V_2=\varnothing$ и ребер (сигнатур графов) $U_1 \cap U_2=\varnothing$ операция соединение G_1+G_2 заключается в объединении носителей и сигнатур $V_1 \cup V_2$, $U_1 \cup U_2$ и всех ребер, соединяющих вершины множеств V_1, V_2 :

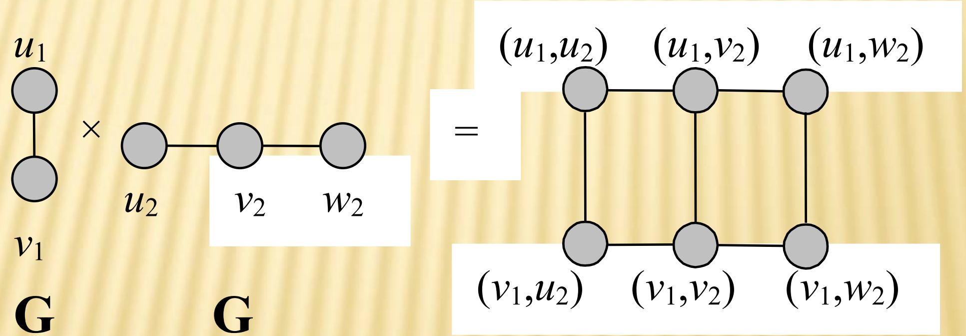


Операции над графами: декартово произведение

- Для графов $G_1=\langle V_1,U_1\rangle$, $G_2=\langle V_2,U_2\rangle$ с непересекающимся множествами вершин (носителей графов) $V_1\cap V_2=\varnothing$ и ребер (сигнатур графов) $U_1\cap U_2=\varnothing$ операция **декартово произведение $G_1\times G_2$** определяется следующим образом:

$$G_1\times G_2 = \langle V,U\rangle,\ V=V_1\times V_2,\ \forall\ u=(u_1,u_2),\ v=(v_1,v_2)\in V,$$

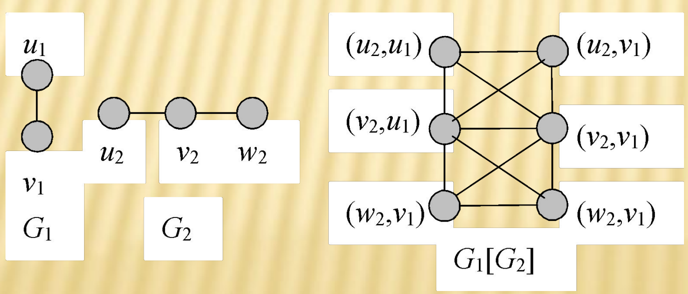
$$u \text{ adj } v \Leftrightarrow (\ u_1=v_1,\ u_2 \text{ adj } v_2\ ) \text{ или } (\ u_2=v_2,\ u_1 \text{ adj } v_1)$$



G_1 G_2 $G_1\times G_2$

Операции над графами: композиция

- Для графов $G_1=<V_1,U_1>$, $G_2=<V_2,U_2>$ с непересекающимся множествами вершин (носителей графов) $V_1 \cap V_2=\varnothing$ и ребер (сигнатур графов) $U_1 \cap U_2=\varnothing$ результат композиции $G=G_1[G_2]$ имеет в качестве множества вершин $V_1 \times V_2$ и вершина $u=(u_1,u_2)$ смежна с $v=(v_1,v_2)$ тогда и только тогда, когда $[u_1 \text{ adj } v_1]$ или $[u_1=v_1 \text{ и } u_2 \text{ adj } v_2]$:



$G=G_2[G_1]$

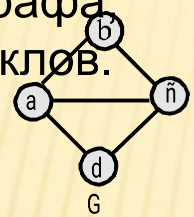
Операции над графами: количество вершин и ребер

- Если $G_1=<V_1,U_1>$, $G_2=<V_2,U_2>$ – это (p_1, q_1)- и (p_2, q_2)-графы соответственно, то для каждой из определенных выше операций можно найти число вершин и ребер в получающемся графе:

Операции	Число вершин	Число ребер
$G_1 \cup G_2$	$p_1 + p_2$	$q_1 + q_2$
$G_1 + G_2$	$p_1 + p_2$	$q_1 + q_2 + p_1 p_2$
$G_1 \times G_2$	$p_1 \cdot p_2$	$p_1 q_2 + p_2 q_1$
$G_1[G_2]$	$p_1 \cdot p_2$	$p_1 q_2 + p_2 q_1$

Тест-вопросы

1. Дерево есть:
А) связный граф,
Б) граф без циклов,
В) остовный подграф графа,
Г) связный граф без циклов.



2. Простая цепь это:
А) маршрут, где нет повторяющихся вершин,
Б) маршрут, где нет повторяющихся ребер,
В) маршрут, где нет повторяющихся вершин и ребер.

3. Если любые две вершины графа можно соединить простой цепью то граф называется:
А) связным,
Б) несвязным,
В) деревом,
Г) остовом.

4. Две вершины графа, соединенные одним ребром, называются:
А) инцидентными;
Б) смежными.

5. Какие из графов являются подграфами данного графа G: