ДИСКРЕТНЫЕ СТРУКТУРЫ

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

СПОСОБЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРАФОВ

ЛЕКЦИЯ 14

Математический факультет. Кафедра математического моделирования

Цель лекции – исследование способов представления графов для анализа графовых отношений и их аналитического описания

Термины

Базовые понятия:

- множество
- граф
- бинарное отношение
- смежность
- инцидентность
- цикл
- матрица

Ключевые слова:

- матрица смежностей
- матрица инциденций
- матрица циклов
- алгебраическая форма представления графов (АФПГ)
- кубическая форма представления графов (КФПГ)

Литература

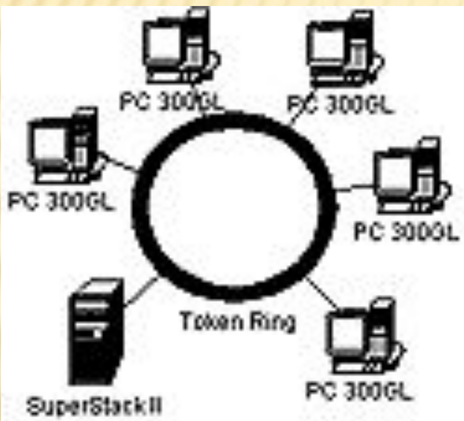
- **Кристофидес Н.** Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978. **С. 25-27.**
- **Харари Ф.** Теория графов: Пер. с англ. / под ред. Гаврилова. М.: Мир, 1973. **С. 54-57, 178-184.**
- **Новиков Ф.А.** Дискретная математика для программистов. С.-П., 2001. **С. 201-205.**
- **Хаханов В.І., Хаханова І.В., Кулак Е.М., Чумаченко С.В.** Методичні вказівки до практичних занять з курсу "Дискретна математика". Харків, ХНУРЕ. 2001. 87с.
- **Свами М., Тхуласираман К.** Графы, сети и алгоритмы. М.: Мир, 1984. **С. 64-77, 100-102.**

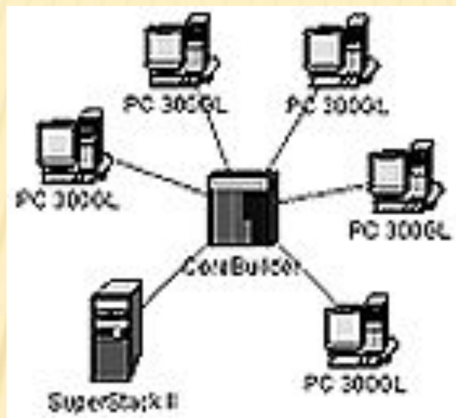
Актуальность и практическая направленность. 1

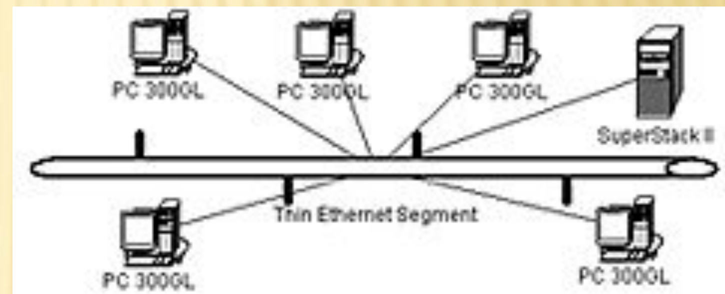
- Основные принципы теории графов используются при построении математической модели для проектирования и анализа сетей ЭВМ
- Наиболее удобной моделью сети является графовая структура
- Описание графовой структуры должно быть технологичным для машины
- Матричная форма является удобной для представления графов
- Матрицы позволяют раскрыть структуру графа
- Матрицы инциденций и циклов используются при исследовании электрических цепей, входят в качестве коэффициентов в уравнение Кирхгофа, описывающее цепь
- Матрицы смежностей служат основой подхода к описанию и анализу модели компьютерной сети

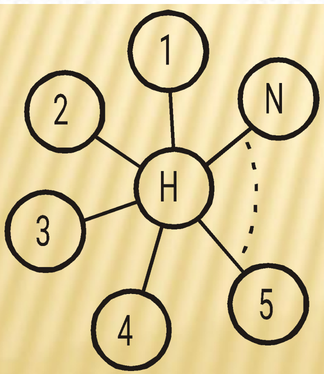
Актуальность и практическая направленность. 2

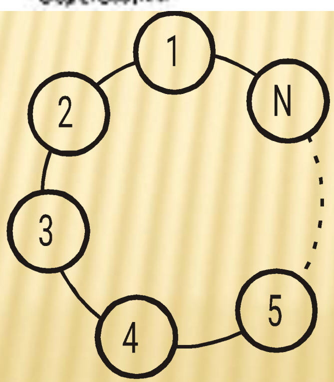
- Базовые сетевые топологии типа «кольцо», «звезда», «шина» и соответствующие им графы









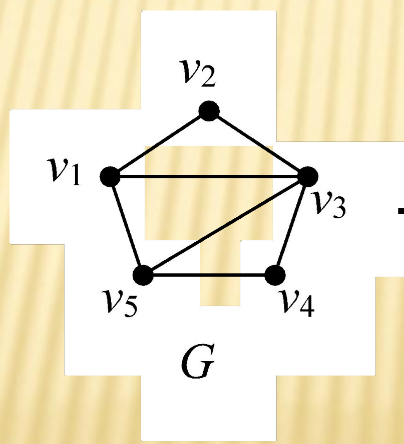


Матрица смежностей

- **Матрица смежностей** – двумерная таблица C=||c_{ij}|| размера n×n, где n – число вершин, элемент которой определяется как

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \operatorname{adj} v_j; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

- **Пример**



$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right\| \end{array}$$

Матрица смежностей: свойства

- **Для неориентированного графа матрица смежностей является симметричной**
- **Для ориентированного свойство симметрии не обязательно. Элемент матрицы определяется как**

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \exists\,(v_i, v_j); \\ 0, & \nexists\,(v_i, v_j). \end{cases} \qquad (v_i, v_j) \neq (v_j, v_i)$$

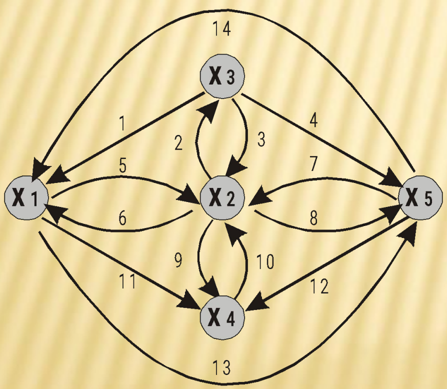
- **Суммы элементов матрицы смежностей по строкам равны степеням соответствующих вершин графа**

Матрица инциденций

- **Матрица инциденций $B=\|b_{ij}\|$ ориентированного графа $G=\langle V,U\rangle$ без петель, где $|V|=p$, $|U|=q$, есть матрица размера $p\times q$, элемент которой определяется следующим образом:**

$$b_{ij}=\begin{cases} 1, \text{ если } v_i - \text{начало дуги } u_j; \\ -1, \text{ если } v_i - \text{конец дуги } u_j; \\ 0, \text{ если } v_i - \text{не инцидентна дуге } u_j. \end{cases}$$

- **Пример**



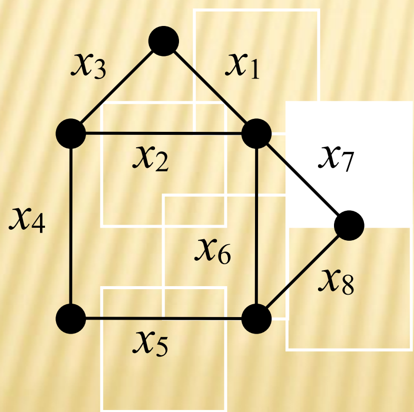
$$S=\begin{array}{c|cccccccccccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ \hline x_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ x_2 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}$$

Матрица циклов

- **Матрица циклов $Z=\|z_{ij}\|$** графа – матрица размерности $m \times n$, m – количество циклов, n – число ребер, элемент z_{ij} которой определяется так

$$z_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i\text{–й цикл содержит ребро } x_j; \\ 0, \text{ если } i\text{–й цикл не содержит ребро } x_j. \end{cases}$$

- **Пример**

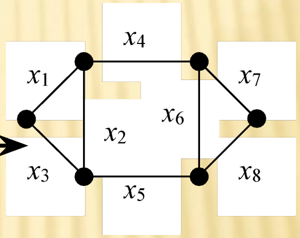


$$\begin{array}{c} \\ Z = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right\| \end{array} \begin{array}{c} \\ Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \\ Z_6 \end{array}$$

Неоднозначность представления графа матрицей циклов

- **Пример**

$$Z = \begin{array}{cc} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \end{matrix} & \\ \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix} & \begin{matrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \\ Z_6 \end{matrix} \end{array}$$



$$Z_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$$

$$Z_4 = \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_6\}$$

$$Z_2 = \{x_2, x_4, x_5, x_6\}$$

$$Z_5 = \{x_2, x_4, x_5, x_7, x_8\}$$

$$Z_3 = \{x_6, x_7, x_8\}$$

$$Z_6 = \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_7, x_8\}$$

Сравнение матричных способов представления графов

- **По матрице смежностей можно однозначно восстановить граф:**

Матрица смежности ⇄ Граф

- **Матрица инциденций однозначно представляет граф:**

Матрица инциденций ⇄ Граф

- **По матрице циклов нельзя однозначно восстановить граф: если ребро не принадлежит ни одному циклу, то по матрице циклов нельзя сказать, принадлежит ли оно графу**

Матрица циклов ← Граф

Сложность матричных способов представления графов

- Выбор наилучшего представления определяется требованиями конкретной задачи
- Используются комбинации или модификации известных представлений
- Способы представления графов в памяти компьютера различаются объемом занимаемой памяти и скоростью выполнения операций
- Для матрицы смежностей сложность представления определяется как $O(n^2)$, где n – количество вершин в графе
- Для матрицы инциденций сложность определяется как $O(nm)$, где n,m – число вершин и ребер соответственно

Time-Out

Алгебраическая форма представления графов (АФПГ)

Свойства модели:

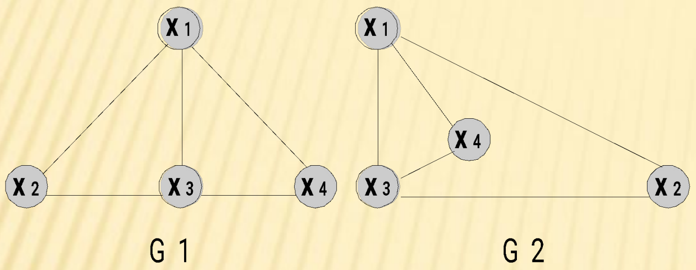
- компактность представления информации о графе;
- привязка к распространенному математическому аппарату;
- наличие эффективных методов анализа графовых отношений;
- возможность аналитического описания функций и структур.

Вершины графа и переменные в булевой алгебре связаны между собой системой отношений

Аппарат булевой алгебры может быть применен для описания графовых структур

Тест-вопросы

1. Являются ли графы равными:



2. Если две вершины соединены одной дугой, они называются
а) инцидентными
б) смежными