ДИСКРЕТНЫЕ СТРУКТУРЫ

КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ

ПРАВИЛА СУММЫ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ. ПЕРЕСТАНОВКИ И ПОДСТАНОВКИ

ЛЕКЦИЯ 12

Математический факультет. Кафедра математического моделирования

Цель лекции – ознакомится с предметом и основными понятиями комбинаторного анализа

Литература

- Глускин Л.М., Шор Л.А., Шварц В.Я. Задачи и алгоритмы комбинаторики, и теории графов. Донецк, ДПИ, 1982. 368 с.
- Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Сборник задач по дискретной математике. М.: Наука, 1977. С.170-184.
- Ежов И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Элементы комбинаторики: Пер. с укр. М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства Наука, 1977. 80 с.
- Виленкин Н.Я. Индукция. Комбинаторика. М.: Просвещение, 1976. 48 с.
- Хаханов В.І., Хаханова І.В., Кулак Е.М., Чумаченко С.В. Методичні вказівки до практичних занять з курсу "Дискретна математика". Харків, ХНУРЕ. 2001. С.63-67.

Термины

Базовые понятия:

- Множество
- Подмножество
- Упорядоченность
- Мощность
- Факториал

Ключевые слова:

- Перестановка
- Подстановка
- Инверсия
- Четность подстановки
- Цикл
- Симметрическая группа подстановок

Комбинаторный анализ как раздел дискретной математики

- Во многих математических исследованиях встречаются комбинаторные задачи – задачи выбора и расположения элементов некоторого, обычно конечного, множества в соответствии с заданными правилами.
- Каждое такое правило определяет способ построения некоторой конструкции из элементов исходного множества, называемой комбинаторной конфигурацией.
- **Целью комбинаторного анализа** является изучение комбинаторных конфигураций, в частности, вопросы их существования, алгоритмы построения, решение задач на перечисление. Примерами комбинаторных конфигураций являются перестановки, размещения и сочетания.

Комбинаторный анализ как раздел дискретной математики

Без учета влияния случайных явлений человек становится бессильным направлять развитие интересующих его процессов в желательном для него направлении

Б.В.Гнеденко

Комбинаторный анализ как раздел дискретной математики

- Комбинаторика занимается различного рода сочетаниями (соединениями), которые можно образовать из элементов некоторого конечного множества.
- Термин «комбинаторика» происходит от латинского слова combina – сочетать, соединять.
- Некоторые элементы комбинаторики были известны в Индии еще во II веке до н.э. Предполагают, что индусы изучали соединения в связи с применением их в поэтике – науке о структуре поэтических произведений. Они подсчитывали возможные сочетания ударных и безударных слогов стопы, состоящей из n слогов.
- В древней Индии, Средней Азии и Китае была известна частично таблица биномиальных коэффициентов.

Комбинаторный анализ как раздел дискретной математики

- Как научная дисциплина комбинаторика сформировалась лишь в XVII веке.
- Термин «комбинаторика» стал употребляться после опубликования немецким ученым Г.В. Лейбницем в 1666 г. работы «Рассуждение о комбинаторном искусстве», в котором впервые дано научное обоснование теории сочетаний и перестановок.
- Изучением размещений занимался швейцарский математик Якоб Бернулли. Результаты он опубликовал в своей книге «Искусство предугадывания» (1713). Он ввел также термин «перестановка».
- Термин «сочетание» применял французский математик и философ Блез Паскаль.

Правило суммы

- **Теоретико-множественная формулировка:**

пусть конечное множество **M** представлено объединением попарно непересекающихся подмножеств $\mathbf{M_1, M_2, \ldots, M_n}$.

Тогда $\mathbf{M = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n}$, $\mathbf{M_i \cap M_j = \varnothing,\ i \neq j}$.

- **Комбинаторная формулировка**: пусть

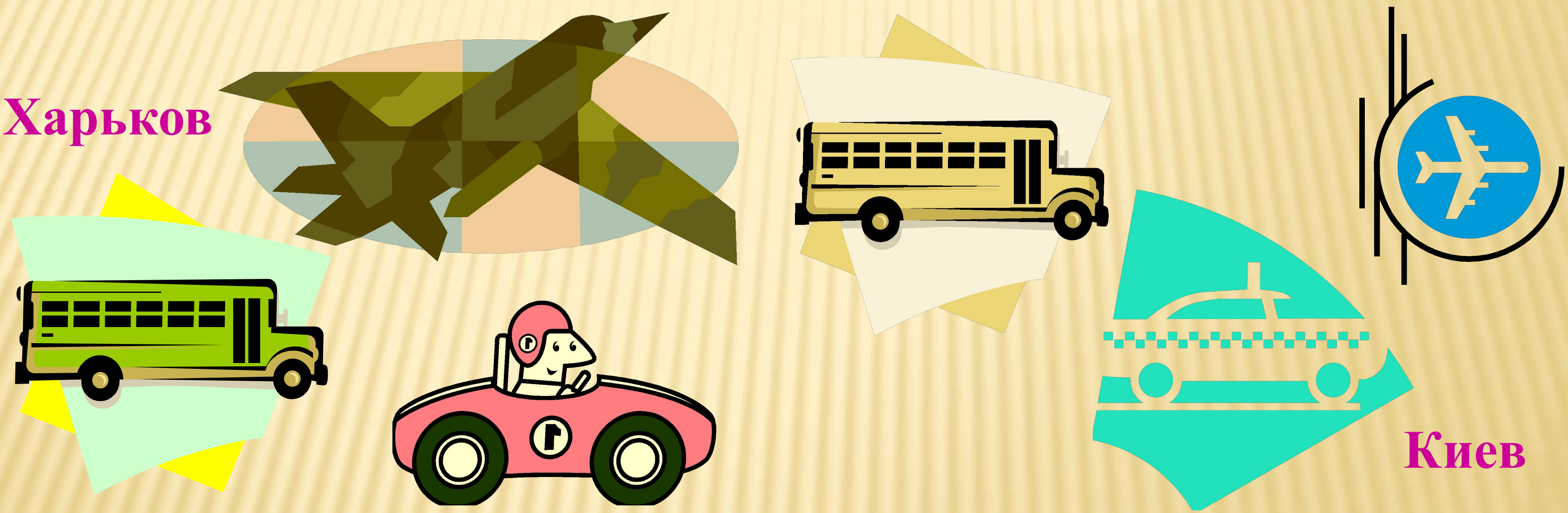
объект $\mathbf{a_1}$ может быть выбран $\mathbf{m_1}$ способами;
объект $\mathbf{a_2}$ может быть выбран $\mathbf{m_2}$ способами;
....
объект $\mathbf{a_n}$ может быть выбран $\mathbf{m_n}$ способами.

Тогда выбор объекта $\mathbf{a_1}$, либо объекта $\mathbf{a_2}$, … , либо объекта $\mathbf{a_n}$ может быть осуществлен $\mathbf{m_1+m_2+\ldots+m_n}$ способами.

Правило суммы: пример

Из Харькова в Киев в течение суток отправляются 6 поездов, 4 автобуса и 1 самолет.

Сколько существует способов добраться до Киева?



Решение. По правилу суммы всего существует 6+4+1=11 способов выехать из Харькова в Киев.

Правило произведения

- **Теоретико-множественная формулировка:**

пусть $M_1, M_2, \ldots, M_n$ – конечные множества,

$M=M_1\times M_2\times\ldots\times M_n$ – их декартово произведение.

Тогда $|M|=|M_1\times M_2\times\ldots\times M_n|=|M_1|\cdot|M_2|\cdot\ldots|M_n|$.

- **Комбинаторная формулировка**: пусть

объект a_1 выбирается m_1 способами;

объект a_2 выбирается m_2 способами;

……………………………………………..

объект a_n выбирается m_n способами,

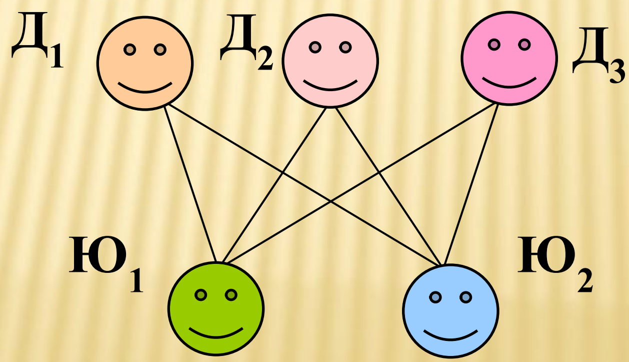
при этом выбор объекта a_i на влияет на число способов выбора остальных объектов.

Тогда выбор упорядоченного множества объектов $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ может быть осуществлен $m_1\cdot m_2\cdot\ldots\cdot m_n$ способами.

Правило произведения: пример

- На дискотеку пришли 3 девушки и 2 юноши.
- Сколько танцующих пар они могут составить (не одновременно)?
- По правилу произведения можно составить 3·2=6 пар. Решение можно представить в виде диаграммы (графа), иллюстрирующего декартово произведение множеств:

$$M = \{(Д_1, Ю_1), (Д_1, Ю_2), (Д_2, Ю_1), (Д_2, Ю_2), (Д_3, Ю_1), (Д_3, Ю_2)\}$$



Перестановки

- Пусть **M** – конечное множество, состоящее из **n** элементов.
- Они могут быть перенумерованы при помощи первых **n** натуральных чисел **1, 2, … , n**.
- Поскольку в интересующих нас вопросах индивидуальные свойства элементов не будут иметь значения, то можно рассматривать в качестве элементов сами числа **1, 2, … , n**: **M={1, 2, … , n}**.
- **Def:** каждая последовательность **n** различных элементов с учетом порядка называется перестановкой этих элементов (**перестановкой из n элементов**)

Пример

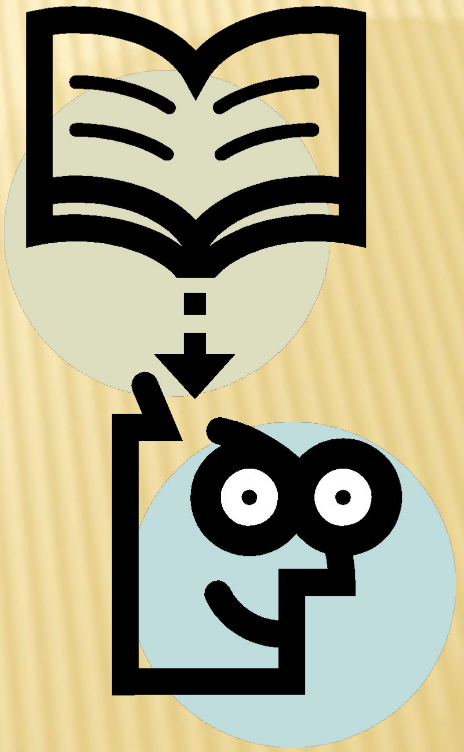
Числа 1, 2, 3 можно расположить следующими способами:

1, 2, 3
1, 3, 2
2, 1, 3
2, 3, 1
3, 1, 2
3, 2, 1

Количество перестановок из n элементов

Перестановки из n элементов множества М отличаются друг от друга только порядком входящих в них элементов.

Число всех различных перестановок из n элементов равно произведению $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$ (“эн-факториал”).



Пример

Сколькими способами можно расставить на полке 10 различных книг?

Существует 10! различных способов расстановки книг:

$$10! = 3\,628\,800$$

Подстановки

Def: взаимно-однозначное отображение π^n конечного упорядоченного множества $M=\{s_1,s_2,\ldots,s_n\}$ из **n** элементов на себя называется подстановкой степени **n**.

Пример

Запишем одну под другой две перестановки из 5 символов:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Под числом 3 стоит число 5; под 5 – 2; и т.д.

Говорят, что при отображении π^5 число 3 переходит в 5, 5 – в 2 и т.д., 4 остается на месте – неподвижная точка подстановки.

Тождественная подстановка

Def: подстановка, при которой на месте остаются все элементы, называется тождественной:

$$\pi_e^n \equiv e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Все точки тождественной подстановки неподвижные.

Произведение подстановок

Пусть **M={1,2,…,n}** – произвольное множество, **π^n** – подстановка элементов множества **M**:

$$\pi^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{pmatrix}$$

где **$\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$** – перестановка из элементов множества **M**, **$\pi^n(i)=s_i$**, **$\forall i \in \{1,2,\dots,n\}$**.

Определим произведение $\pi_1^n \cdot \pi_2^n$ двух подстановок из n элементов как последовательное проведение обоих преобразований:

$$\boxed{\pi_1^n \cdot \pi_2^n(i) = \pi_2^n(\pi_2^n(i)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{pmatrix}}$$

Time-Out

Пример

Найти произведение подстановок:

$$\pi_1^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \pi_2^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$\pi_1^4 \cdot \pi_2^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Определим произведение в обратном порядке:

$$\pi_2^4 \cdot \pi_1^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Совместимость подстановок

Def: подстановки одинаковых степеней называются **совместимыми.**
Можно перемножать только совместимые подстановки.
Умножение подстановок n-й степени при $n \geq 3$ не является коммутативным:

$$\boxed{\pi_1^n \cdot \pi_2^n \neq \pi_2^n \cdot \pi_1^n}$$

Симметрическая группа подстановок

1. Для любых двух подстановок из n элементов множества M произведение есть однозначно определенная подстановка:

$$\exists!\ \pi^n = \pi_1^n \cdot \pi_2^n$$

2. Произведение подстановок ассоциативно, но не коммутативно:

$$(\pi_1^n \cdot \pi_2^n) \cdot \pi_3^n = \pi_1^n \cdot (\pi_2^n \cdot \pi_3^n) \qquad \pi_1^n \cdot \pi_2^n \neq \pi_2^n \cdot \pi_1^n$$

3. Для тождественной подстановки имеют место равенства:

$$\forall \pi^n :\ \pi_e^n \cdot \pi^n = \pi^n \cdot \pi_e^n = \pi^n$$

4. Каждая подстановка имеет обратную:

$$\forall \pi^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{pmatrix} \quad \exists!\ (\pi^n)^{-1} = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} :\ (\pi^n)^{-1} \cdot \pi^n = \pi^n \cdot (\pi^n)^{-1} = \pi_e^n$$

Таким образом, все подстановки элементов множества M образуют группу, порядок которой n! (порядок определяет запас элементов). Эта группа называется **симметрической группой S_n**.

Пример симметрической группы подстановок

Элементы симметрической группы S_3 определяются как:

$$\pi_e^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \pi_1^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \pi_2^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi_3^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \pi_4^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \pi_5^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Инверсии. Четность подстановки

Def: если в матрице подстановки **π^n** элементов множества **M={1,2,…n}** встречаются два столбца

$$\pi^n = \begin{pmatrix} \dots & s_i & \dots & s_j & \dots \\ \dots & t_i & \dots & t_j & \dots \end{pmatrix}$$

для которых **$s_i<s_j$, $t_i>t_j$** (или **$s_i>s_j$, $t_i<t_j$**), то такая пара столбцов называется инверсией **подстановки π^n**.

Def: подстановка называется четной или нечетной в зависимости от того, четно или нечетно число встречающихся в ней инверсий.

Упражнение

Определить четность подстановок симметрической группы S_3

$$\pi_e^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \pi_1^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \pi_2^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi_3^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \pi_4^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \pi_5^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Подстановки с циклами

Если матрицу подстановки π^n перестановкой столбцов можно привести к виду

$$\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_{r-1} & s_r & s_{r+1} & \ldots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \ldots & s_r & s_1 & t_{r+1} & \ldots & t_n \end{pmatrix},$$

то π^n задает взаимно-однозначное отображение множества $\{s_1, s_2, \ldots, s_r\}$ на себя, которое называется циклом длины r.

Каждой неподвижной точке соответствует цикл длины 1.

Каждую подстановку можно однозначно представить в виде произведения циклов, не имеющих общих элементов.

Пример

Представить подстановки в виде разложения на независимые циклы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1,4,3,5)\cdot(2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} = (1,2,3)\cdot(4,5)\cdot(6)$$

Перестановки с повторениями. 1

Дано множество M, состоящее из n элементов. Требуется представить множество M в виде объединения m попарно непересекающихся подмножеств $\mathbf{M=M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_m}$

так, чтобы $\mathbf{|M_1|=k_1}$, $\mathbf{|M_2|=k_2}$, …, $\mathbf{|M_m|=k_m}$, где $\mathbf{k_i}$ – заданные числа, причем

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_m = \sum_{j=1}^{m} k_j = n$$

Сколькими способами можно получить такое разложение?

Перестановки с повторениями. 2

Теорема. Пусть $k_1, k_2, \ldots, k_m$ – натуральные числа такие, что $k_1+k_2+\ldots+k_m = n$. Число способов, которыми можно представить множество M из n элементов в виде объединения m попарно непересекающихся множеств , количество элементов которых составляет соответственно $k_1, k_2, \ldots, k_m$, равно

$$\boxed{C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}}$$

Выводы

- Таким образом, две перестановки, записанные друг под другом, определяют некоторое взаимно-однозначное отображение множества из n натуральных чисел на себя.
- Каждую подстановку можно однозначно представить в виде произведения циклов, не имеющих общих элементов.