ОГЭ 2018 г

Модуль «Геометрия»

Характеристика модуля:

Модуль «Геометрия» состоит из 2-х частей.

Часть 1. **6** заданий (15-20) с кратким ответом.

Каждое задание оценивается в **1 балл**.

Часть 2. 3 задания (24-26) с развёрнутым ответом.

Задание 24.

Баллы	Содержание критерия
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

Задание 25.

Баллы	Содержание критерия
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

Задание 26.

Баллы	Содержание критерия
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

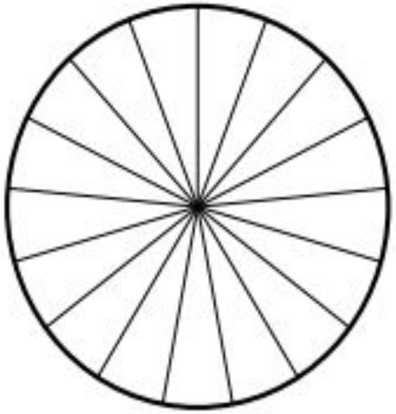
Часть 1

Задание 15

Характеристика задания: задание 15 ОГЭ по математике представляет собой практическую задачу с геометрической составляю- щей. Как правило, это текстовая задача (иногда с рисунком), которая предполагает достаточно очевидную геометрическую интерпретацию и решение полученной несложной планиметрической задачи, связанной с вычислением углов, расстояний, площадей

Пример задания

Пример задания Колесо имеет 18 спиц. Углы между соседними спицами равны. Найдите угол, который образуют две соседние спицы. Ответ дайте в градусах.



Р е ш е н и е. 18 спиц делят окружность колеса на 18 равных центральных углов, сумма которых равна 360°. Поэтому величина одного такого угла будет равна $360^\circ : 18 = 20^\circ$.

Ответ: 20.

Задание 16

Характеристика задания: задание 15 ОГЭ по математике открывает блок геометрических задач в типовом экзаменационном варианте. Это несложная планиметрическая задача в одно-два действия, проверяющая владение базовыми знаниями по теме «Треугольники». Для успешного решения задачи достаточно знать, чему равна сумма углов треугольника, что такое медиана, биссектриса, высота, средняя линия треугольника, какова связь между длинами средней линии треугольника и параллельной ей стороны, уметь применять теорему Пифагора для вычисления одной из сторон

Методические рекомендации с разбором задач сторон прямоугольного треугольника по двум другим его сторонам, понимать, что такое равнобедренный и равносторонний треугольники, и уметь применять их простейшие свойства к решению задач.

Напомним основные факты, связанные с треугольниками:

— сумма углов треугольника равна 180◦ ;

— внешний угол треугольника равен сумме двух не смежных с ним внутренних углов треугольника;

— высоты треугольника пересекаются в одной точке;

— биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке (эта точка является центром вписанной окружности треугольника);

— серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке (эта точка является центром описанной окружности треугольника);

— медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2 : 1, считая от вершин треугольника;

— средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна её половине.

Если a, b, c — стороны треугольника, h_a, h_b, h_c — соответственно высоты, проведённые к этим сторонам, α, β, γ — противолежащие этим сторонам углы, r и R — соответственно радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника, $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр треугольника, S — его площадь, то справедливы следующие формулы:

1) $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$;

2) $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta$;

3) $S = \frac{abc}{4R}$;

4) $S = pr$;

5) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

В прямоугольном треугольнике один из катетов можно считать высотой, а другой — основанием. Поэтому площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов. Разумеется, все остальные формулы площади треугольника применимы и к прямоугольному треугольнику.

Пример задания

В треугольнике ABC угол C равен 107°, AD — биссектриса, угол CAD равен 7°. Найдите угол B. Ответ дайте в градусах.

Решение. Поскольку AD — биссектриса угла A, он вдвое больше угла CAD, т. е. равен 14°. Но тогда

$$\angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C = 180^\circ - 14^\circ - 107^\circ = 59^\circ.$$

Ответ: 59.

Задание 17

Характеристика задания: задание 16 ОГЭ по математике представляет собой задачу, связанную с окружностями и их элементами.

Приведём основные факты по теме «Окружность и круг:

— центральный угол окружности измеряется дугой этой окружности, на которую он опирается;

— вписанный угол окружности равен половине центрального угла и измеряется половиной дуги, на которую он опирается;

— вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности, равен 90° ;

— касательная к окружности перпендикулярна радиусу этой окружности, проведённому в точку касания;

— отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны;

— центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла;

— угол между двумя секущими к окружности, пересекающимися внутри окружности, равен полусумме дуг, высекаемых на окружности вертикальными углами, образованными этими секущими;

— угол между двумя секущими к окружности, пересекающимися вне окружности, равен полуразности дуг, высекаемых на окружности углом, образованным этими секущими;

— две окружности не имеют общих точек в том и только том случае, если расстояние между их центрами больше суммы радиусов этих окружностей или меньше разности большего и меньшего радиусов;

— две окружности имеют ровно две общие точки (пересекаются в двух точках) в том и только том случае, если расстояние между их центрами меньше суммы радиусов этих окружностей, но больше разности большего и меньшего радиусов;

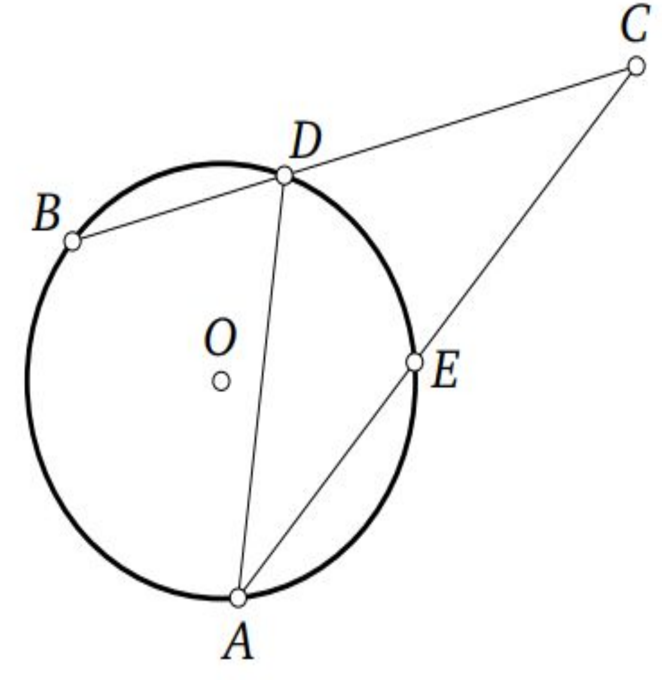
— две окружности имеют ровно одну общую точку (касаются) в том и только том случае, если расстояние между их центрами равно сумме радиусов этих окружностей (внешнее касание) либо равно разности большего и меньшего радиусов этих окружностей (внутреннее касание);

— длина окружности равна $2\pi r$, где r — радиус окружности;

— площадь круга равна πr 2 , где r — радиус круга.

Пример задания Окружность пересекает стороны угла величиной 44° с вершиной C в точках A, E, D и B, как показано на рисунке. Найдите угол ADB, если угол EAD равен 33°. Ответ дайте в градусах.

Р е ш е н и е. Рассмотрим треугольник ACD. Угол ADB является для него внешним при вершине D, значит, он равен сумме двух других углов треугольника, не смежных с ним:



$$\angle ADB = \angle C + \angle EAD = 44^\circ + 33^\circ = 77^\circ.$$

Ответ: 77.

Задание 18

Характеристика задания Задание 11 ОГЭ по математике представляет собой задачу по теме «Четырёхугольники». Напомним свойства и теоремы, связанные с четырёхугольниками, изучаемыми в основной школе.

Сначала приведём основные факты, связанные с параллелограммом:

— противоположные стороны параллелограмма параллельны и равны;

— противоположные углы параллелограмма равны;

— сумма углов параллелограмма равна 360°;

— сумма двух углов параллелограмма, прилежащих к одной из его сторон, равна 180°;

— диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

Пусть a и b — длины двух смежных сторон параллелограмма, h_a и h_b — соответственно высоты, проведённые к этим сторонам, γ — угол между этими сторонами, S — площадь параллелограмма. Основные формулы для вычисления площади параллелограмма: $S = ah_a = bh_b$; $S = ab\sin\gamma$.

Кроме того, для параллелограмма, разумеется, справедлива и формула площади произвольного выпуклого четырёхугольника: если d_1 и d_2 — длины диагоналей выпуклого четырёхугольника, γ — угол между ними, то площадь S этого четырёхугольника равна полупроизведению диагоналей четырёхугольника на синус угла между ними, т. е. $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\gamma$.

Важнейшими частными случаями параллелограмма являются прямоугольник, ромб, квадрат. Они обладают всеми свойствами параллелограмма, но для них справедливы и некоторые дополнительные свойства, которыми произвольные параллелограммы не обладают:

— диагонали прямоугольника (а значит, и квадрата) равны;

— диагонали ромба (а значит, и квадрата) взаимно перпендикулярны;

— диагонали ромба (а значит, и квадрата) являются биссектрисами его углов.

Площадь S прямоугольника равна произведению двух его смежных сторон a и b, т. е. $S = ab$. Площадь S квадрата равна квадрату его стороны a, т. е. $S = a^2$. Для вычисления площадей прямоугольника и ромба можно использовать формулу площади выпуклого четырёхугольника. Поскольку диагонали d_1 и d_2 ромба взаимно перпендикулярны, из последней следует, что площадь ромба равна полупроизведению его диагоналей: $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\gamma$.

Трапеция является более сложным четырёхугольником по сравнению с параллелограммом, поскольку у неё параллельны только две стороны (основания трапеции), а две другие не параллельны (боковые стороны трапеции).

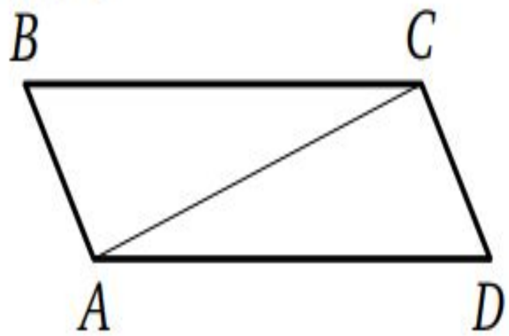
Трапеция, у которой одна из боковых сторон перпендикулярна основаниям, называется прямоугольной; трапеция, боковые стороны которой равны, называется равнобедренной (диагонали такой трапеции равны, углы при любом из оснований также равны).

Средняя линия трапеции параллельна её основаниям и равна их полусумме.

Если a и b — длины оснований трапеции, h — её высота, то площадь трапеции вычисляется по формуле $S = \frac{a+b}{2} h$.

Пример задания Диагональ параллелограмма образует с двумя его сторонами углы 111°и 11°. Найдите меньший угол параллелограмма. Ответ дайте в градусах.

Р е ш е н и е. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$, в котором $\angle BAC = 111°$, $\angle CAD = 11°$. Тогда $\angle BAD = \angle BAC + \angle DAC = 111° + 11° = 122°$, Следовательно, $\angle ABC = 180° - 122° = 58°$. Значит, меньший угол параллелограмма равен 58°.

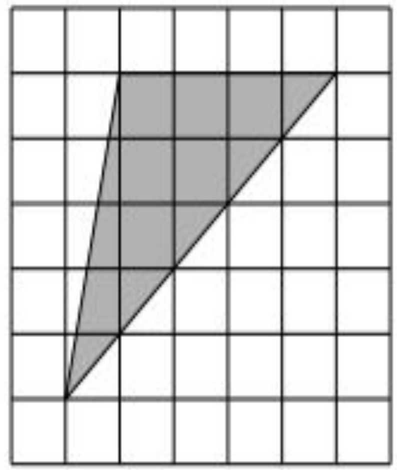


Ответ: 58.

Задание 19

Характеристика задания Задание 12 ОГЭ по математике представляет собой задачу по планиметрии на вычисление по готовому чертежу, изображённому на клетчатой бумаге. В таких задачах данные представлены в виде чертежа на бумаге в клетку, причём размеры клеток одинаковы и заданы условием. Это задачи на вычисление углов, расстояний, площадей, связанные со всеми изучаемыми в школьном курсе фигурами. Клетки в таких задачах по сути выполняют роль линейки: посчитав «по клеточкам» необходимые длины и используя известные геометрические факты и свойства, можно довольно быстро получить ответ на вопрос задачи. К этим задачам вплотную примыкают задания на вычисление элементов плоских фигур по готовому чертежу, на котором указаны координаты некоторых точек фигуры (например, вершин треугольника или четырёхугольника), позволяющие после выполнения несложных вычислений ответить на вопрос задачи. При этом, как правило, не требуется применения дополнительных формул метода координат.

Пример задания Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Р е ш е н и е. Длина стороны треугольника, расположенной на горизонтальной линии сетки, равна 4 см, а длина проведённой к ней высоты (заметим, что основание высоты будет расположено на продолжении указанной стороны) равна 5 см. Поэтому искомая площадь равна $0{,}5 \cdot 4 \cdot 5 = 10$ см^2.

Ответ: 10.

Задание 20

Характеристика задания: одного или нескольких верных утверждений из множества данных (в настоящее время — из трёх данных). В большинстве случаев правильный ответ на вопрос задачи связан со знанием простейших геометрических фактов и утверждений. Такие задачи позволяют организовать экспресс-повторение большинства определений и теорем с целью быстрой диагностики имеющихся пробелов в знаниях и последующего устранения этих пробелов.

Пример задания

Укажите в порядке возрастания без пробелов, запятых и прочих символов номера верных утверждений.

1) Существует параллелограмм, диагонали которого равны.
2) В любом параллелограмме диагонали различны.
3) Существует ромб, диагонали которого равны.
4) В любом ромбе диагонали различны.
5) Существует трапеция, диагонали которой равны.
6) В любой трапеции диагонали различны.

Р е ш е н и е.

Первое и третье утверждения являются верными, примером в обоих случаях является квадрат. Поэтому второе и четвёртое утверждения ложны. Пятое утверждение верно, примером является равнобедренная трапеция. Следовательно, шестое утверждение ложно.

Ответ: 135.

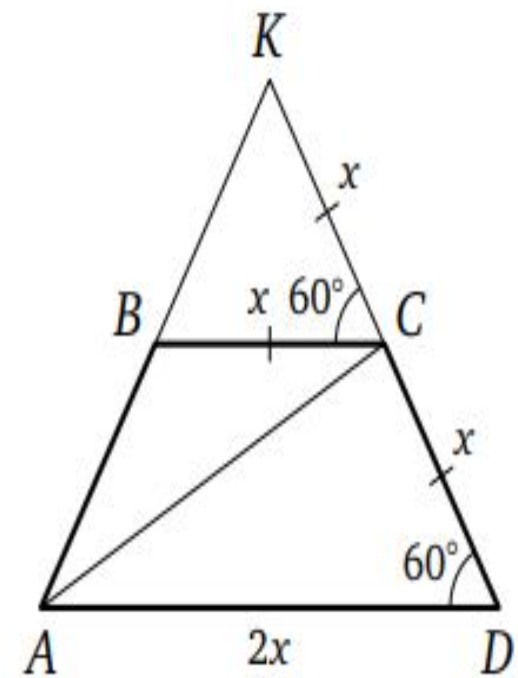
Часть 2

Задание 24

Характеристика задания: задание 24 ОГЭ по математике открывает условный блок из трёх геометрических задач с развёрнутым решением, традиционно представленных в качестве трёх последних заданий ОГЭ по математике. Это планиметрическая задача на вычисление, для решения которой нужно достаточно свобод- но ориентироваться в материале школьного курса планиметрии, в его теоремах, связанных с треугольниками, многоугольниками (преимущественно параллелограммами и трапециями) и окружностями.

Пример задания В трапеции $ABCD$ основание AD вдвое больше основания BC и вдвое больше боковой стороны CD. Угол ADC равен $60°$, $AC = 6\sqrt{3}$. Найдите периметр трапеции.

Решение. Пусть K — точка пересечения прямых AB и DC, и пусть $BC = CD = x$. Тогда $AD = 2x$ и BC — средняя линия треугольника AKD. Поэтому $KC = CD = x$ и треугольник AKD равносторонний. Следовательно, AC — его медиана и высота. Значит, $AD \sin 60° = AC$, то есть $2x\frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$, откуда $x = 6$. Но тогда $AB = BC = CD = 6$, $AD = 12$ и периметр трапеции равен 30.

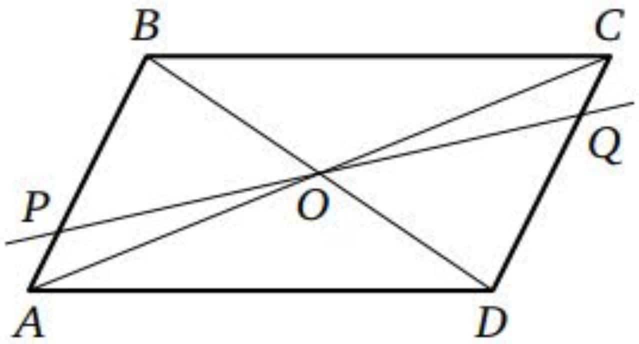


Ответ: 30.

Задание 25

Характеристика задания: задание 25 ОГЭ по математике представляет собой планиметрическую задачу на доказательство, связанную со свойствами треугольников, четырёхугольников, окружностей. Во многих случаях доказательство может быть проведено несколькими способами.

Пример задания Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны AB и CD в точках P и Q соответственно. Докажите, что отрезки OP и OQ равны.



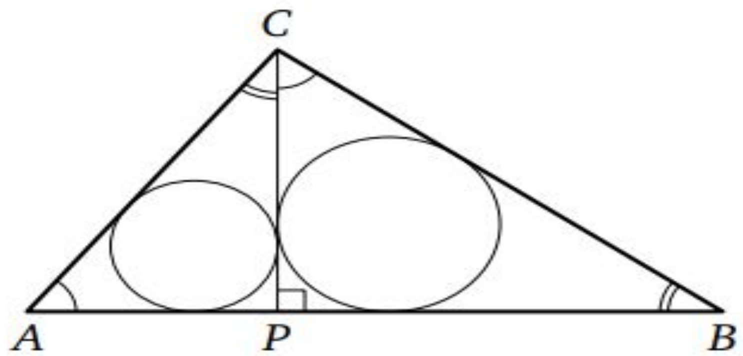
Доказательство. В треугольниках BPO и DQO стороны BO и DO равны по свойству диагоналей параллелограмма, $\angle PBO = \angle QDO$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых AB и CD и секущей BD, а $\angle POB = \angle QOD$ как вертикальные углы. Значит, треугольники BPO и DQO равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Следовательно, отрезки OP и OQ равны.

Задание 26

Характеристика задания: 26-е задание ОГЭ по математике представляет собой планиметрическую задачу на вычисление, более сложную по сравнению с задачей 24. Её можно рассматривать как своего рода подготовительную задачу: многие идеи и методы, необходимые для её решения, используются и при решении задания 26. Значительная часть задач связана с окружностью.

Пример задания Из вершины прямого угла C треугольника ABC проведена высота CP. Радиус окружности, вписанной в треугольник BCP, равен 16, $AC = 0{,}75BC$. Найдите радиус вписанной окружности треугольника ABC.

Решение. Обозначим радиусы вписанных окружностей треугольников ABC, BCP и ACP через r, r_1 и r_2 соответственно. Треугольники ABC, CBP и ACP подобны по двум углам. Поэтому отношение сходственных элементов любых двух из этих треугольников равно соответствующему коэффициенту подобия, т. е. отношению сходственных сторон. Значит, $\frac{r_1}{r} = \frac{BC}{AB}$, $\frac{r_2}{r} = \frac{AC}{AB}$, $\frac{r_1}{r_2} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{0{,}75} = \frac{4}{3}$. Возведя в квадрат и почленно сложив два первых равенства, получим $\frac{r_1^2 + r_2^2}{r^2} = \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2} = 1$, откуда $r^2 = r_1^2 + r_2^2$. Но $\frac{r_1}{r_2} = \frac{4}{3}$, следовательно, $r_2 = \frac{3}{4}r_1 = 12$. Тогда $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$.



Ответ: 20.

Шкала пересчёта суммарного балла за выполнение модуля «ГЕОМЕТРИЯ» в отметку по ГЕОМЕТРИИ

«2» - 0-2 баллов

«3» - 3 – 4 баллов;

«4» - 5 – 7 баллов;

«5» - 8 – 12 баллов.