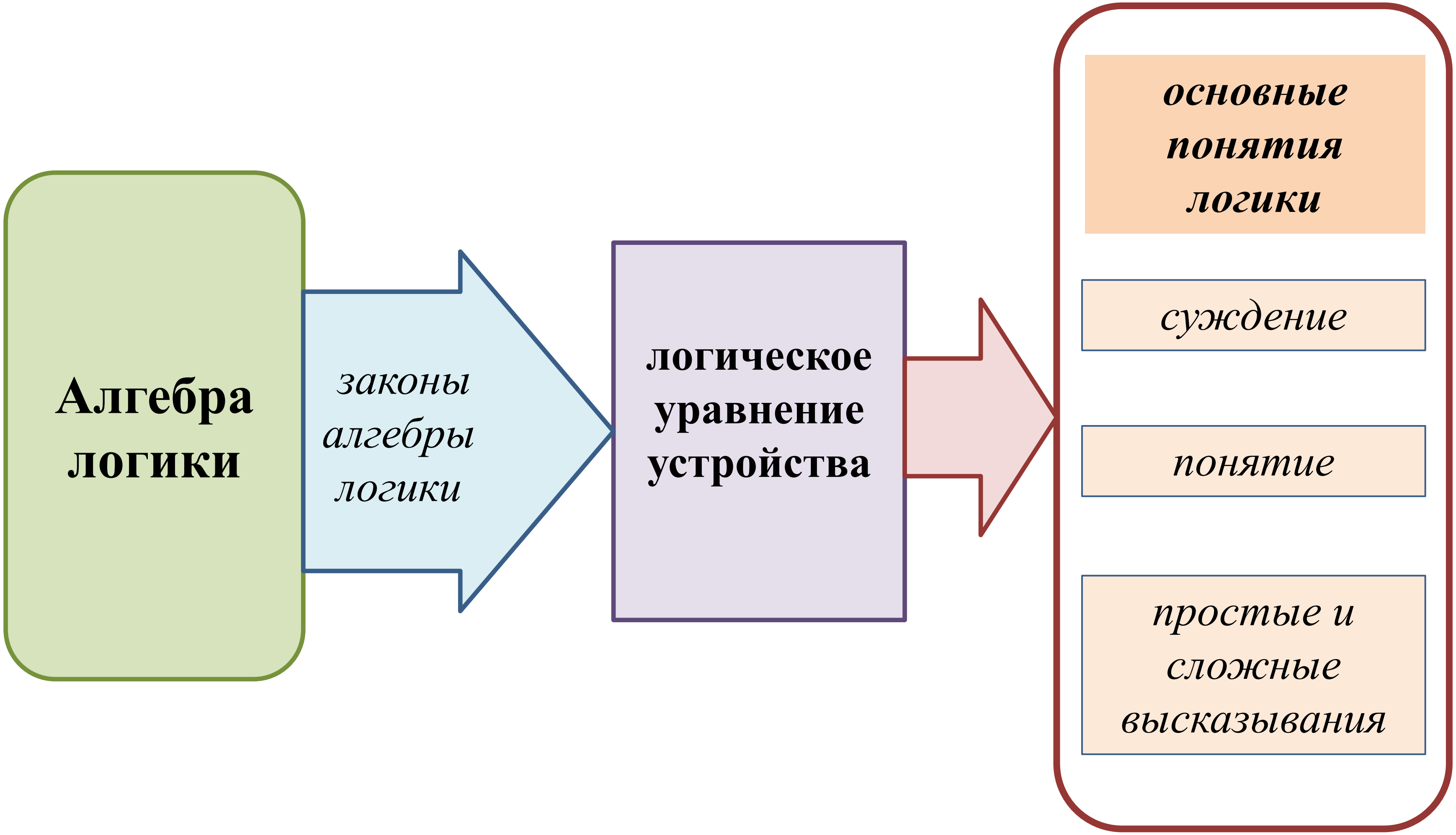
Лекция 10. Алгебра логики

Логические основы ЭВМ

Это *формальная логика (математическая логика)*. Раздел математической логики, изучающий связи между логическими переменными, имеющими только два значения, называется ***алгеброй логики***.

Лекция 10. Алгебра логики



Суждения

Суждение может быть ***истинным , ложным или неопределённым***

Суждение простым , если ни одна его часть не может рассматриваться как суждение

Состав

субъекта суждения (S) – класс вещей , о котором нечто утверждается

предиката суждения (P) – класс вещей; предикат выражает то, что утверждается относительно S;

утвердительной или отрицательной связки ***« есть »*** *или* ***« не есть »,*** *которая ставится между S и P*

слов ***« все »***, ***« некоторые »***, ***« ни один »,*** *которые ставятся перед субъектом*

Выска́зывание

Когда суждение рассматривается в связи с какой-то конкретной формой его языкового выражения, оно называется *высказыванием.* Термин «суждение» употребляют, когда отвлекаются от того, какова именно его знаковая форма

Логические связки

- знак ┐ или □ – аналог частицы «НЕ»;
- знак $\wedge$ – аналог союза «И»;
- знак $\vee$ – аналог союза «ИЛИ»;
- знак $\rightarrow$ – аналог словосочетания «ЕСЛИ ...ТО»;
- знак $\leftrightarrow$ – аналог словосочетания «ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА».

Сложные высказывания, как и сложные предложения, также составляются из простых, а роль знаков препинания, союзов или оборотов при этом играют ***логические связки***

Логические операции и функции

В **алгебре логики** *логическая переменная может принимать только одно из двух возможных значений – 0 (заменяет словесное обозначение "лжи") или 1 (синоним "истины").*

Логическая функция, аналогом которой можно считать *составное высказывание,* принимает только значения 0 или 1, причём последние "вычисляются" в результате выполнения логических операций, входящих в соответствующую логическую формулу, на основе таблиц истинности

В таблице истинности отображаются все возможные сочетания (комбинации) входных переменных и соответствующие им значения функции y, получающиеся в результате выполнения какой-либо логической операции.

Основные положения алгебры логики

Основные логические функции двух переменных

Инверсия (отрицание)

NOT

A	Не A
0	1
1	0

Дизъюнкция

OR

A	B	A ∨ B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Основные положения алгебры логики

Основные логические функции двух переменных

Конъюнкция

AND

A	B	A ∧ B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Исключающее ИЛИ

XOR

A	B	A ⊕ B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Основные положения алгебры логики

Основные логические функции двух переменных

Стрелка Пирса

A	B	$\overline{A \vee B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Штрих Шеффера

A	B	$\overline{A \wedge B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Основные положения алгебры логики

Сложные логические функции двух переменных

Сложной является логическая функция, значение истинности которой зависит от истинности других функций - аргументов сложной функции.

Импликация

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Эквиваленция

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Лекция 10. Алгебра логики

Основные положения алгебры логики

Правила старшинства логических операций

Для указания порядка выполнения логических действий используют круглые скобки.

Убывание приоритета

Отрицание → конъюнкция → дизъюнкция → сильная дизъюнкция → импликация → эквиваленция

Основные положения алгебры логики

Получение логической формулы по таблице истинности

Алгоритм:

Для каждого набора аргументов, на котором функция равна 1, записываем логическое произведение переменных, причём, если какой-то аргумент в этом наборе равен 0, берется его отрицание, затем все полученные произведения логически складываются.

Законы и тождества алгебры логики

Переместительный закон

$$X \vee Y = Y \vee X;$$
$$X \wedge Y = Y \wedge X$$

Сочетательный закон

$$X \vee Y \vee Z = (X \vee Y) \vee Z = X \vee (Y \vee Z)$$

Закон идемпотентности

$$X \vee X = X; \quad X \wedge X = X$$

Продолжение

Законы и тождества алгебры логики

Распределительный закон

$$(X \vee Y)\cdot \wedge Z =$$
$$X\cdot\wedge Z \vee Y\cdot\wedge Z\ X$$

Закон двойного отрицания

$$\overline{\overline{(X)}} = X$$

Закон двойственности (Правило де Моргана)

$$\overline{X \vee Y} = \overline{X} \wedge \overline{Y}$$
$$\overline{X \wedge Y} = \overline{X} \vee \overline{Y}$$

Лекция 10. Алгебра логики

Продолжение

Законы и тождества алгебры логики

Закон исключённого третьего

$$X \vee \overline{X} = 1$$

Правило поглощения

$$X \vee (X \wedge Y) = X$$
$$X \wedge (X \vee Y) = X$$

Правило склеивания

$$(X \wedge Y) \vee (X \wedge \overline{Y}) = X$$
$$(X \vee Y) \wedge (X \vee \overline{Y}) = X$$

Свойства конъюнкции и дизъюнкции

Все логические операции можно выразить через отрицание , конъюнкцию и дизъюнкцию

Коммутативность

Ассоциативность

Дистрибутивность

Операции отрицания , конъюнкции и дизъюнкции образуют ***полную систему логических операций***

Логические элементы

Преобразование информации в компьютере осуществляется электронными устройствами двух классов

Комбинационные схемы

Цифровой автомат

Логические элементы

Комбинационные схемы

В ***комбинационных схемах*** совокупность выходных сигналов y в каждый дискретный момент времени t_i однозначно определяется *комбинацией* входных сигналов x, поступивших на входы схемы в этот же момент времени. Соответствие между входом и выходом задается табличным способом или в аналитической форме

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$
$$y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$
$$\ldots$$
$$y_m = f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Логические элементы

Цифровой автомат

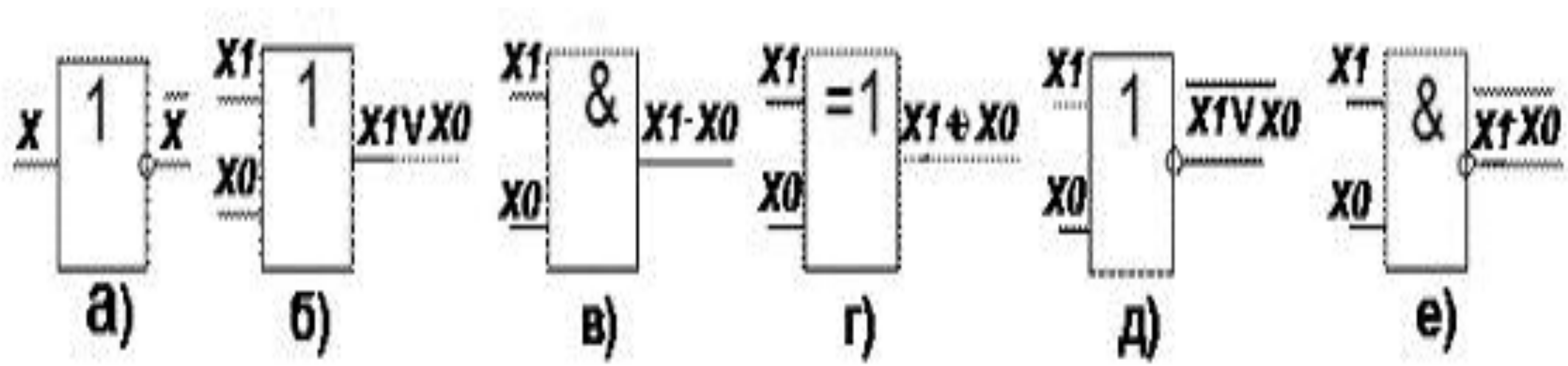
Имеет конечное число различных внутренних состояний, причем может переходить из одного из них в другое под воздействием входного слова с получением соответствующих выходных слов. Переход от заданных условий работы цифрового автомата к его функциональной схеме осуществляется с помощью аппарата алгебры логики

Обязательно содержит память.

Лекция 10. Алгебра логики

Логические элементы

Условные графические обозначения (УГО)



а) Инвертор, б) ИЛИ, в) И, г) Исключающее ИЛИ, д) ИЛИ-НЕ, е) И-НЕ