Аналитическое задание многогранников

Неравенства $ax + by + cz + d \geq 0$ и $ax + by + cz + d \leq 0$ определяют полупространства, на которые плоскость, заданная уравнением $ax + by + cz + d = 0$, разбивает пространство.

Если грани выпуклого многогранника лежат в плоскостях, задаваемых уравнениями

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$a_nx + b_ny + c_nz + d_n = 0,$$

то сам многогранник задается системой неравенств

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 \geq 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_nx + b_ny + c_nz + d_n \geq 0. \end{cases}$$

Упражнение 1

Два полупространства задаются неравенствами $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 \quad 0$, $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 \geq 0$. Как будет задаваться пересечение этих полупространств?

Ответ: Системой этих неравенств.

Упражнение 2

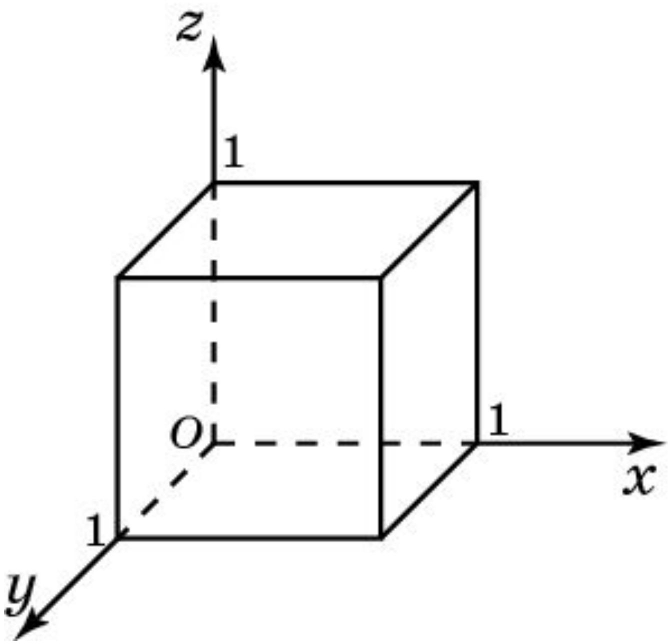
Определите, какому полупространству $5x + 3y - z - 2 \geq 0$ или $5x + 3y - z - 2 \leq 0$ принадлежит точка: а) $A(1, 0, 0)$; б) $B(0, 1, 0)$; в) $C(0, 0, 1)$.

Ответ: а) Первому; б) первому; в) второму.

Упражнение 3

Какой многогранник задается системой неравенств

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 1, \\ 0 \le z \le 1? \end{cases}$$



Ответ: Куб.

Упражнение 4

Какую фигуру в пространстве задает следующая система неравенств

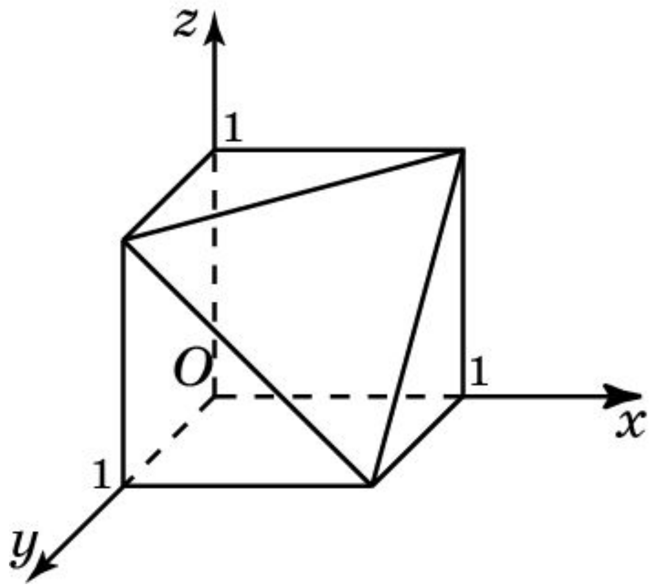
$$\begin{cases} 0 \le x \le 3, \\ 0 \le y \le 5, \\ 0 \le z \le 4? \end{cases}$$

Ответ: Прямоугольный параллелепипед.

Упражнение 5

Изобразите многогранник, задаваемой системой неравенств

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 1, \\ 0 \le z \le 1, \\ x + y + z \le 2? \end{cases}$$

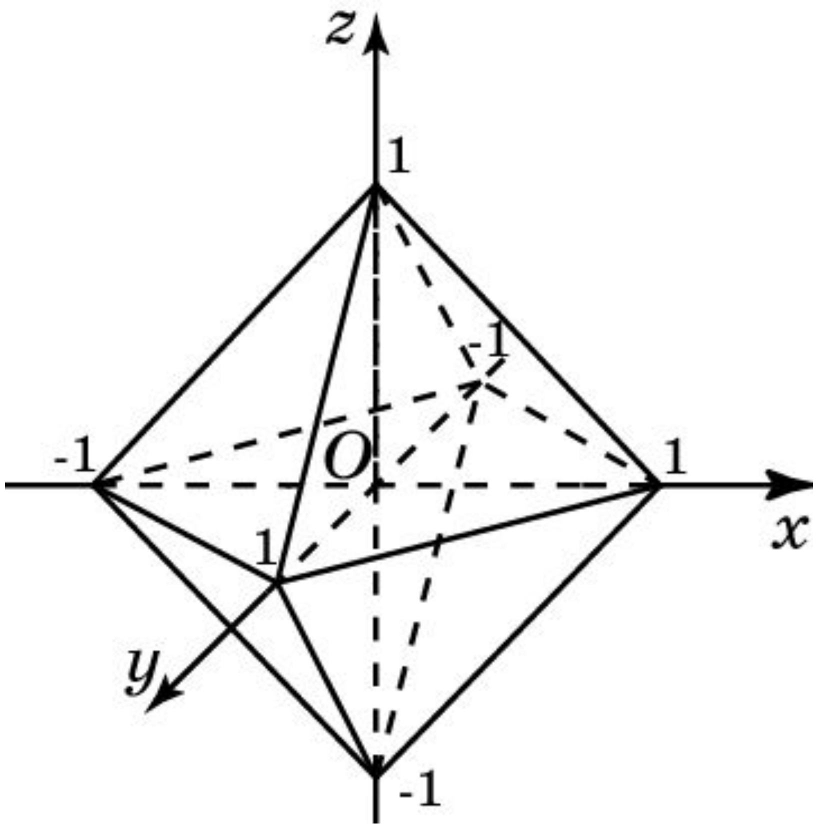


Ответ: Многогранник, получающийся из куба отсечением пирамиды.

Упражнение 6

Какой многогранник задается неравенством

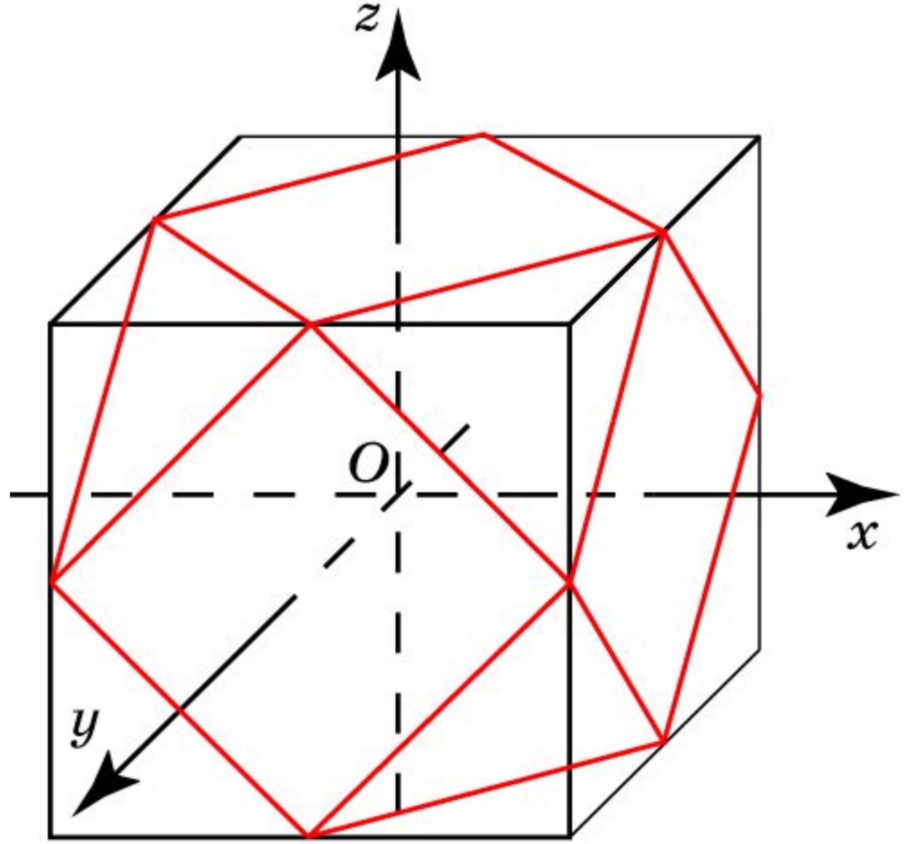
$$|x|+|y|+|z| \le 1?$$



Ответ: Октаэдр.

Упражнение 7

Какой многогранник задается неравенствами
$|x| \le 1, |y| \le 1, |z| \le 1, \; |x|+|y|+|z| \le 2$?



Ответ: Кубооктаэдр.

Упражнение 8

Какие неравенства, задают правильный тетраэдр, вершины которого имеют координаты: (1, 1, -1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1), (-1, -1,-1).

Ответ: $|x+y|+z\leq 1$, $|x-y|-z\leq 1$.

Упражнение 9

Какая фигура в пространстве задается системой неравенств?

$$\begin{cases} x^2 + z^2 \le R^2, \\ 0 \le y \le h? \end{cases}$$

Ответ: Цилиндр.

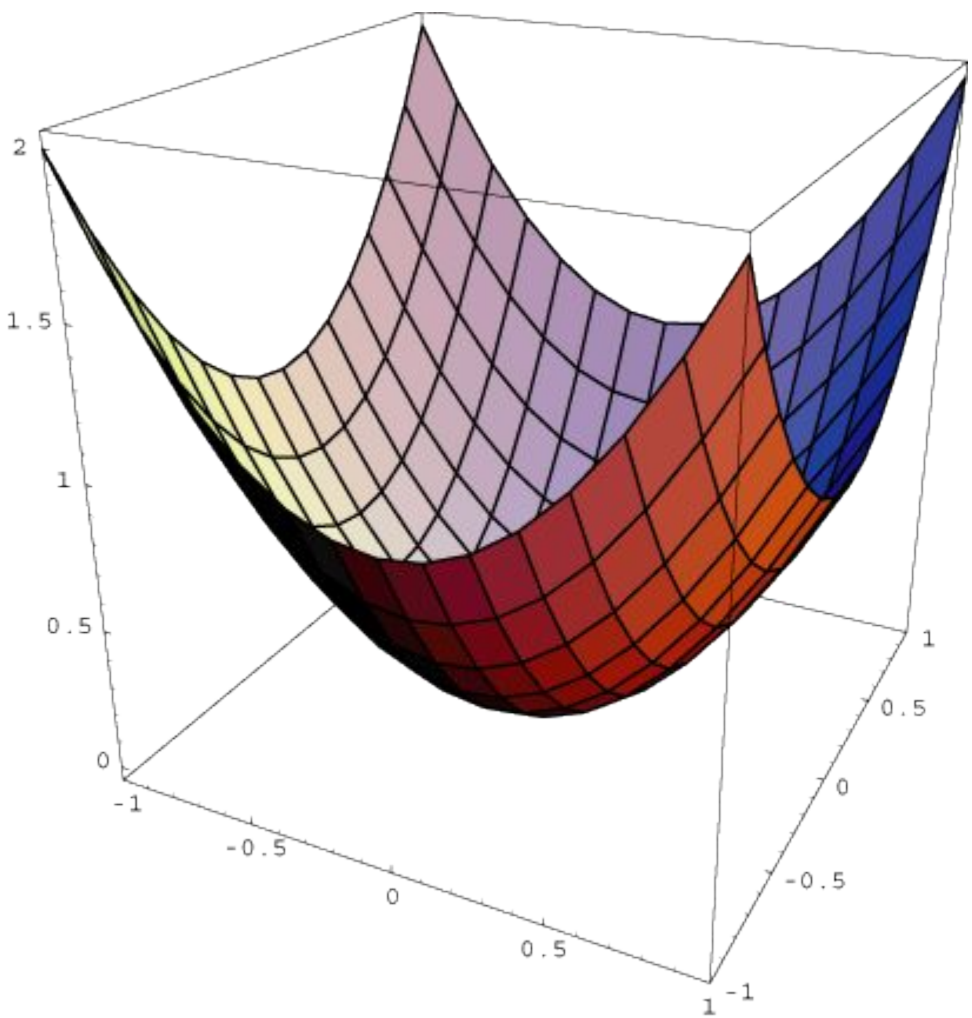
Упражнение 10

Напишите неравенства, определяющие конус с вершиной в точке $S(0,0,h)$ и основание которого - круг радиуса R, лежащий в плоскости Oxy.

Ответ: $x^2 + y^2 \le (R\frac{h-z}{h})^2, \quad 0 \le z \le h.$

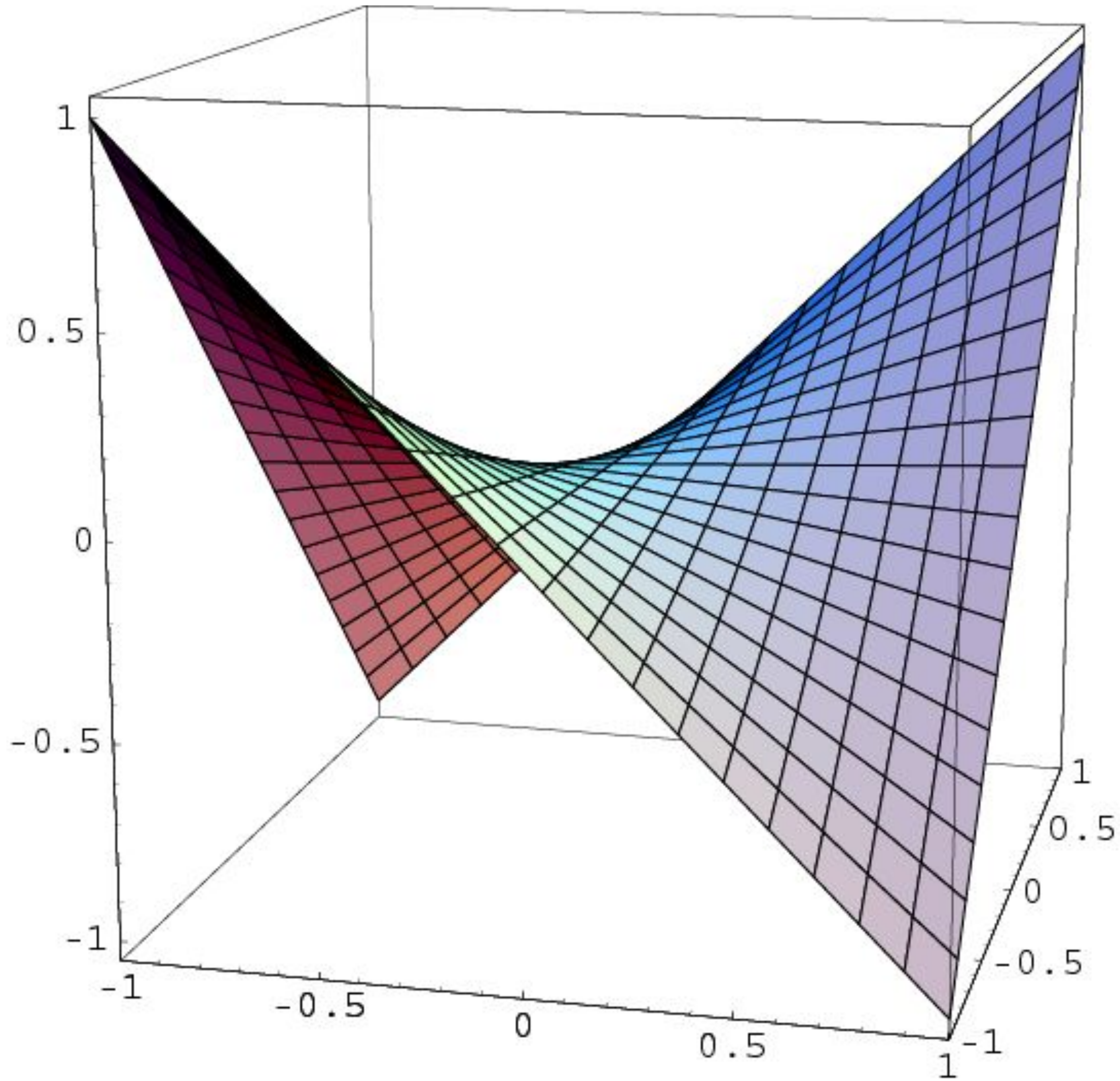
Уравнение $z = f(x, y)$ задает поверхность в пространстве. Здесь мы приведем примеры таких поверхностей.

Пример 1 $$z = x^2 + y^2$$



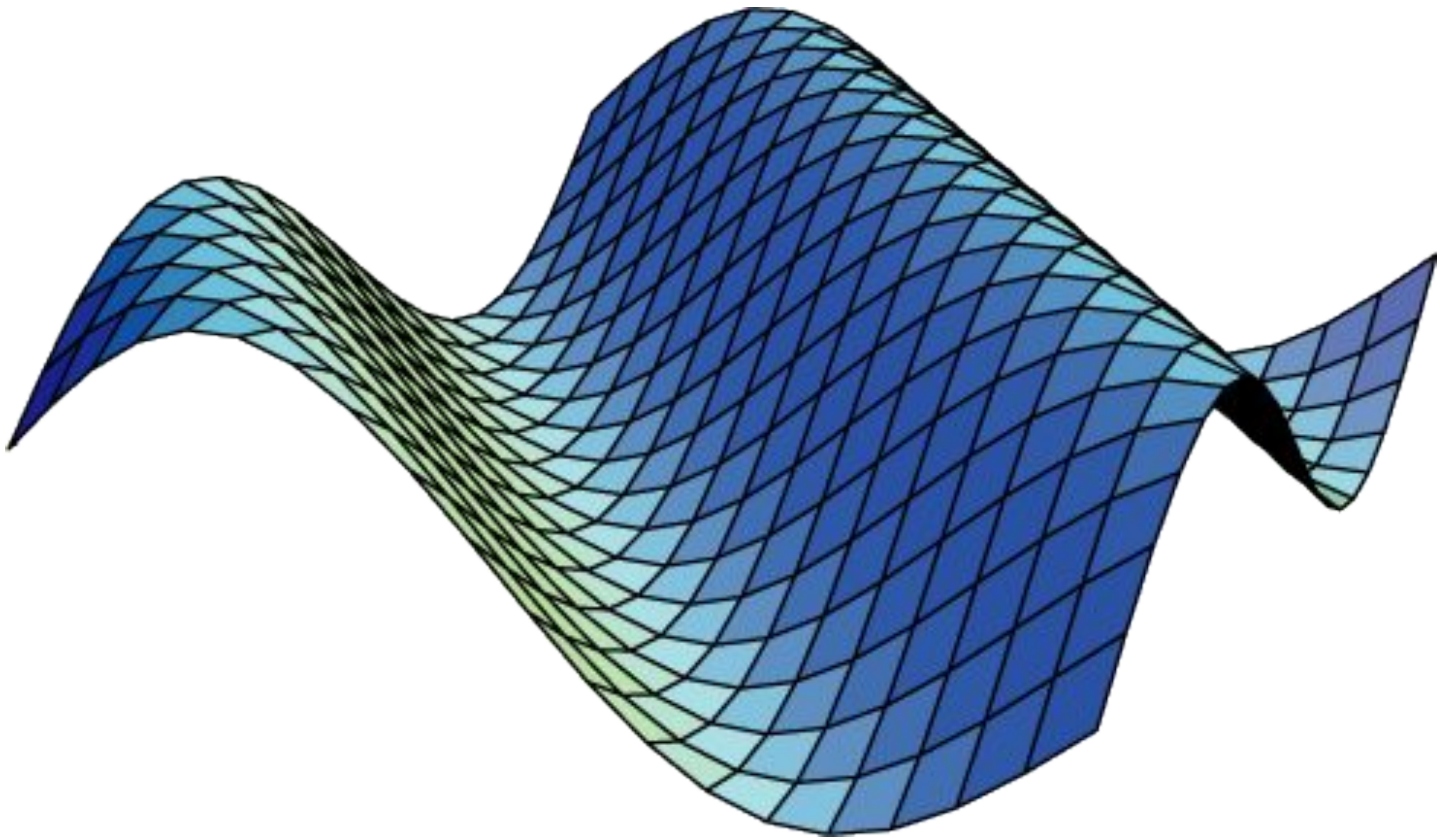
Пример 2

$$z = x \cdot y$$



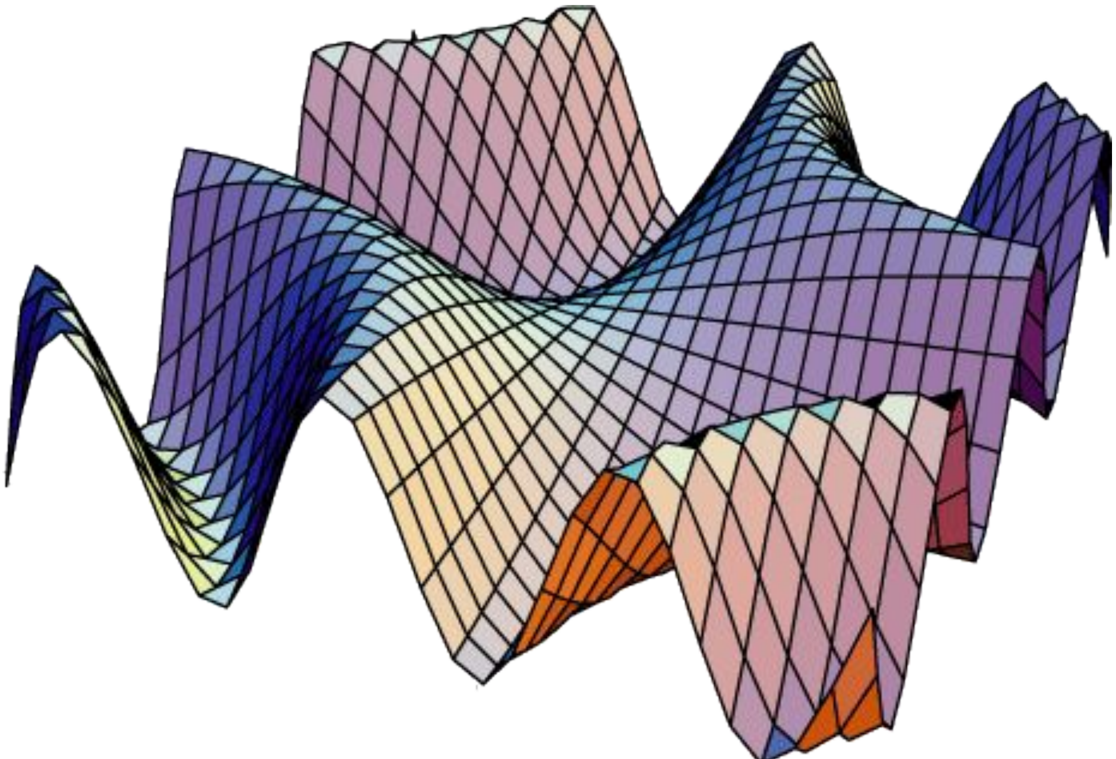
Пример 3

$$z = \sin(x + y)$$



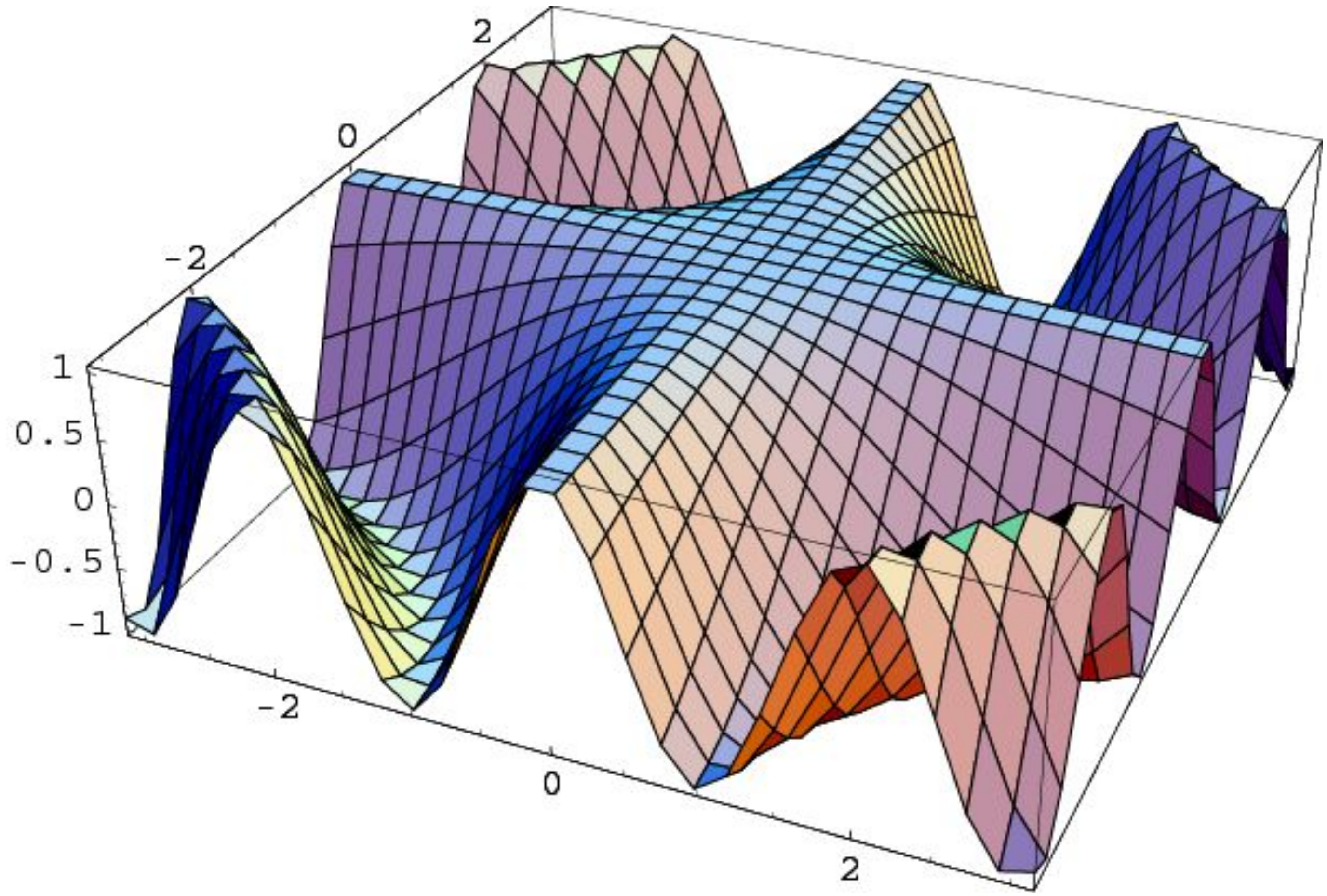
Пример 4

$$z = \sin(x \cdot y)$$



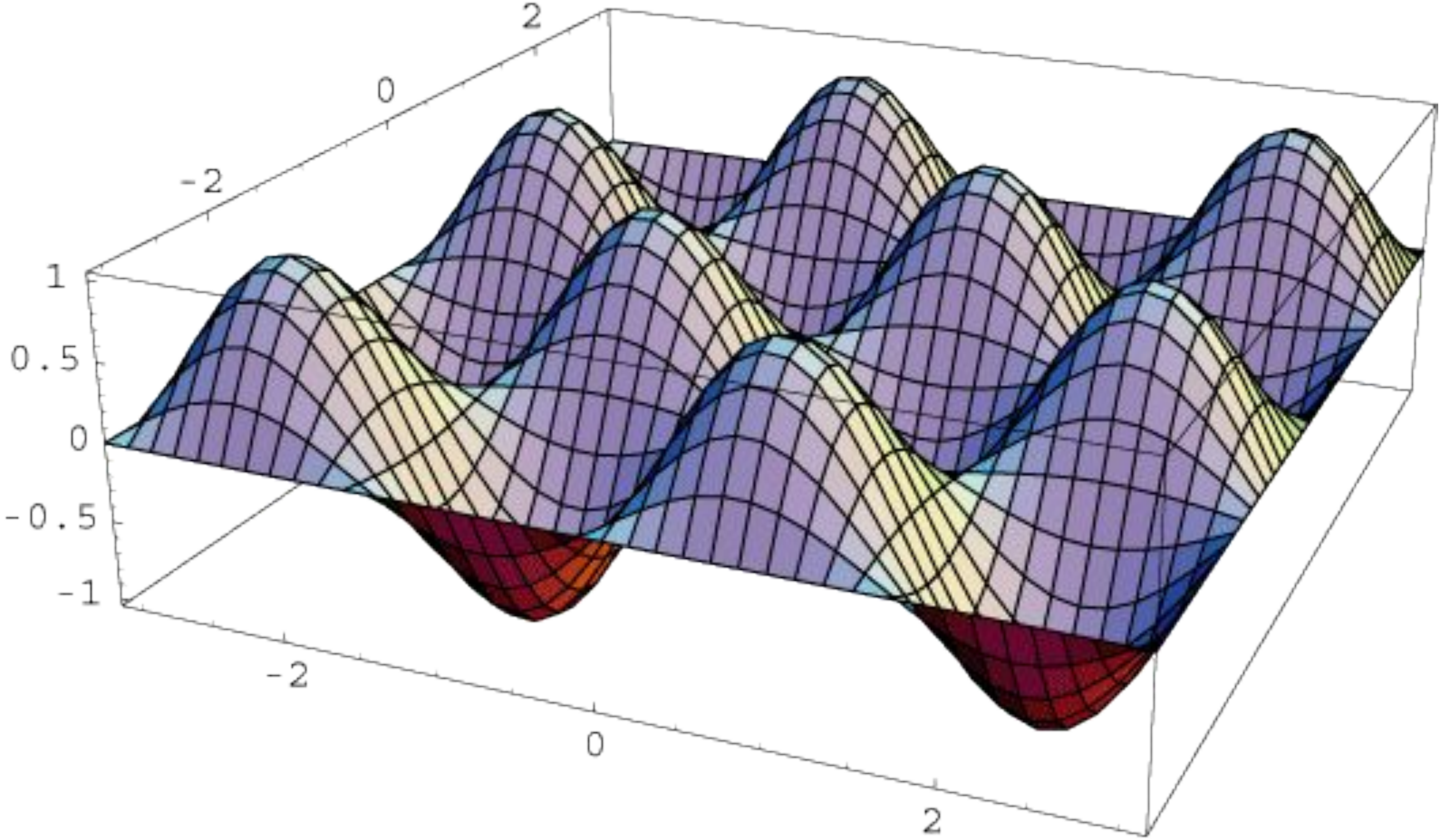
Пример 5

$$z = \cos(x \cdot y)$$



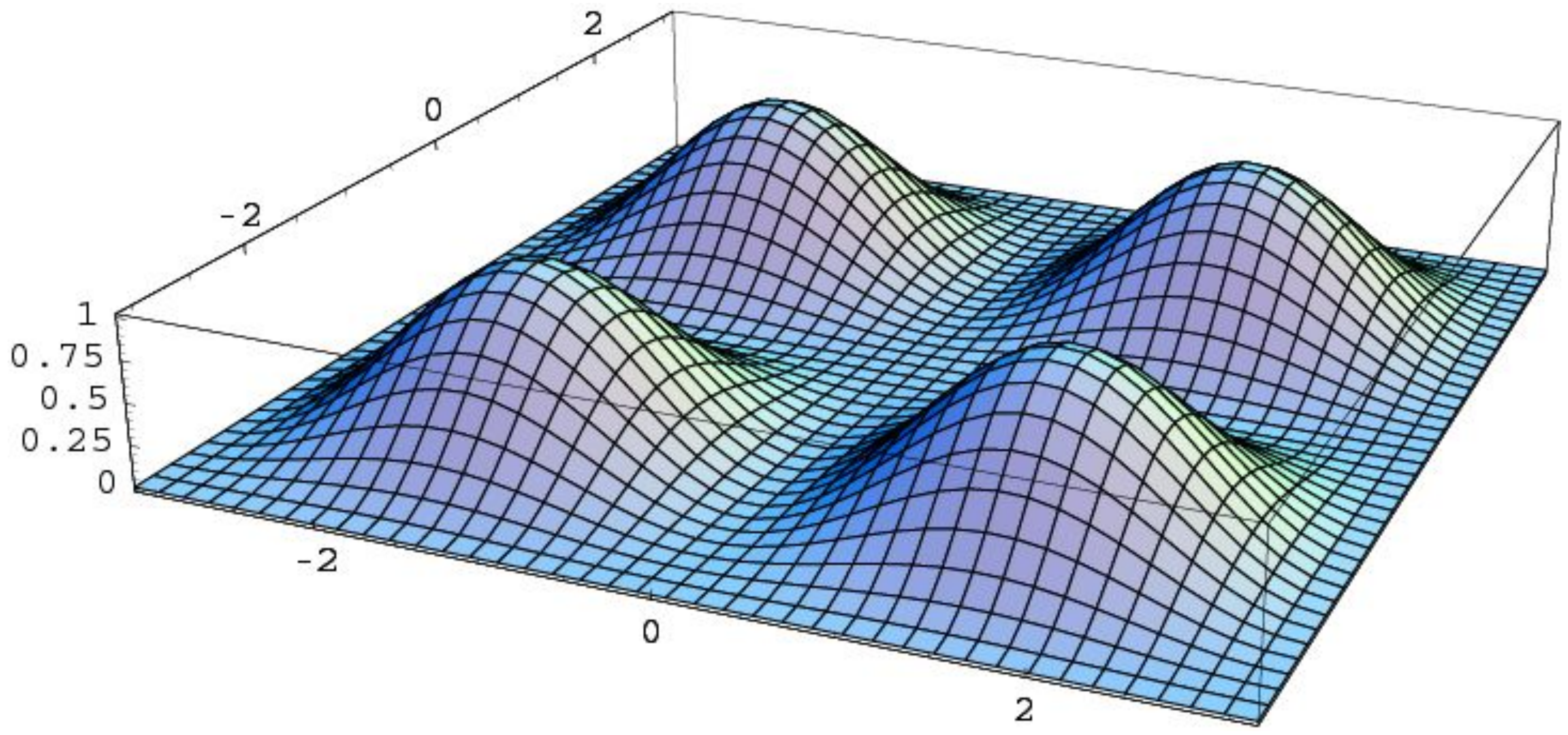
Пример 6

$$z = \sin x \cdot \sin y$$



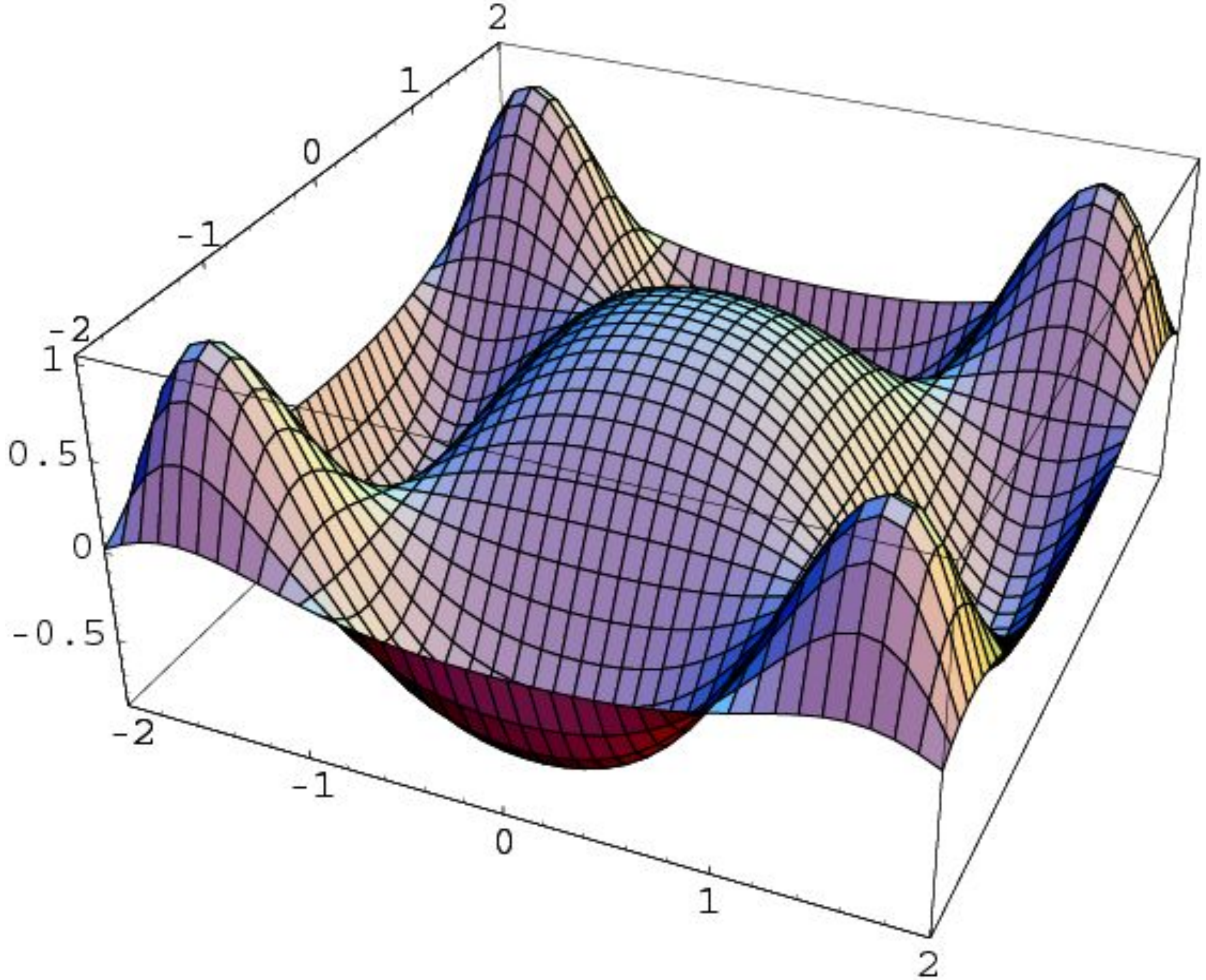
Пример 7

$$z = \sin^2 x \cdot \sin^2 y$$



Пример 8

$$z = \sin(x^2 - 1) \cdot \sin(y^2 - 1)$$



Упражнение 11

Найдите объем многогранника, координаты (x, y) точек которого удовлетворяют системе неравенств

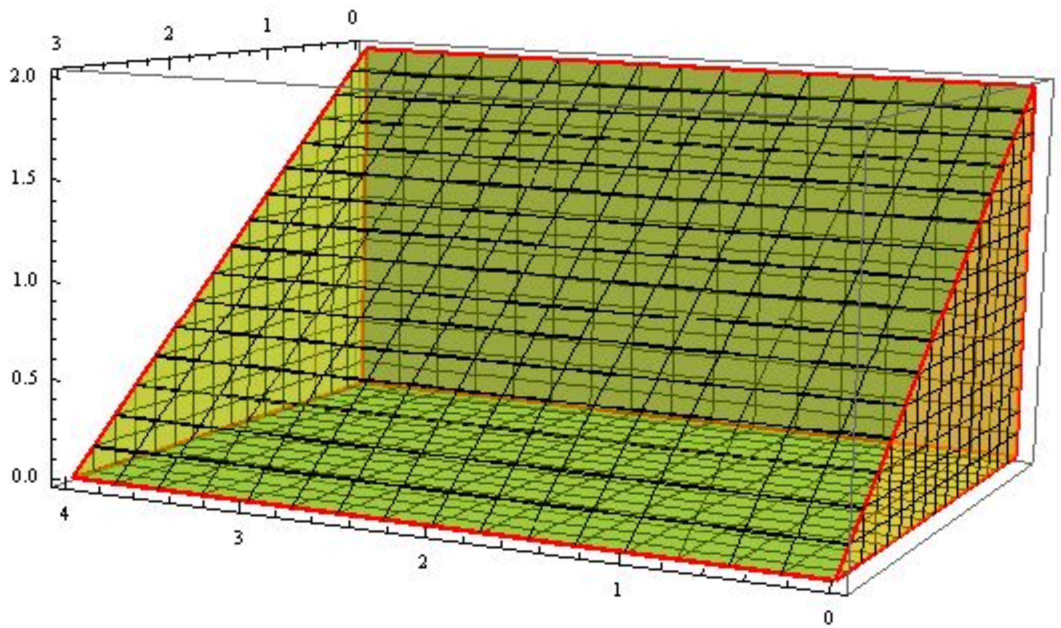
$$\begin{cases} 0 \le x \le 2, \\ 0 \le y \le 3, \\ 0 \le z \le 4. \end{cases}$$

Ответ: 24.

Упражнение 12

Найдите объем многогранника, координаты (x, y) точек которого удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} 0 \le x \le 4, \\ 0 \le y, \\ 0 \le z, \\ 2y + 3z \le 6. \end{cases}$$

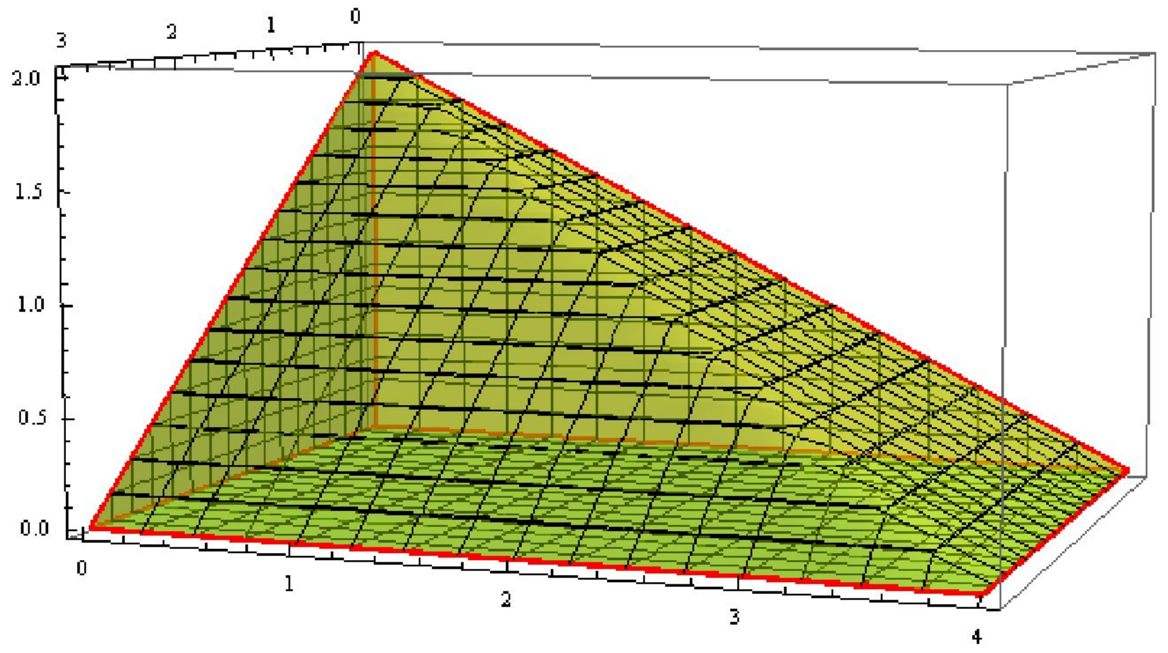


Ответ: 12.

Упражнение 13

Найдите объем многогранника, координаты (x, y) точек которого удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} 0 \le y, \\ 0 \le z, \\ 0 \le x + 2z \le 4, \\ 2y + 3z \le 6. \end{cases}$$

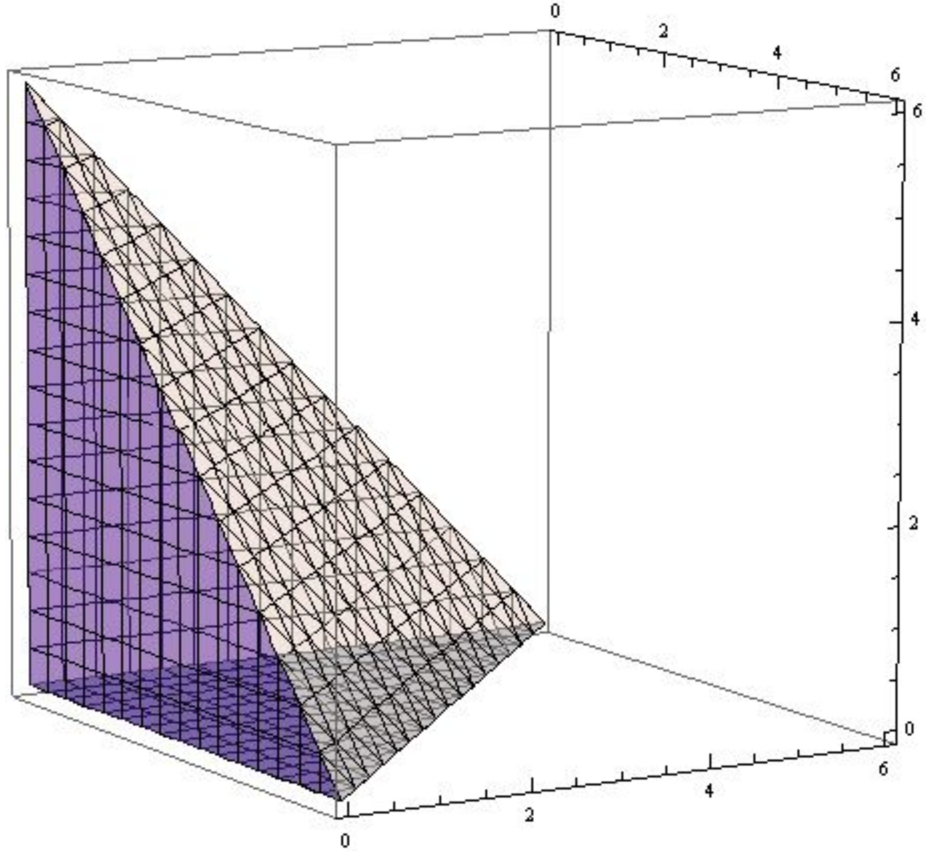


Ответ: 8.

Упражнение 14

Найдите объем многогранника, координаты (x, y) точек которого удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x + y + z \le 6, \\ 0 \le x, \\ 0 \le y, \\ 0 \le z. \end{cases}$$



Ответ: 36.

Упражнение 15

Найдите прямую, проходящую через центр куба, для которой сумма квадратов расстояний от вершин данного куба до этой прямой: а) максимальна; б) минимальна.

Решение. Пусть вершины куба имеют координаты (1, 1, 1), (-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1), (-1, -1, 1), (-1, 1, -1), (1, -1, -1), (-1, -1, -1) .

Единичный направляющий вектор прямой, проходящей через центр куба с координатами (0, 0, 0) имеет координаты (x, y, z).

Тогда квадраты расстояний от вершин куба до этой прямой равны соответственно $3 – (x + y + z)^2$, $3 – (– x + y + z)^2$, $3 – (x – y + z)^2$, $3 – (x + y – z)^2$, $3 – (– x – y + z)^2$, $3 – (– x + y – z)^2$, $3 – (x – y – z)^2$, $3 – (– x – y – z)^2$.

Возводя в квадрат, складывая и учитывая, что $x^2 + y^2 + z^2 =1$, получим, что сумма квадратов расстояний равна 16 и не зависит от выбора прямой.