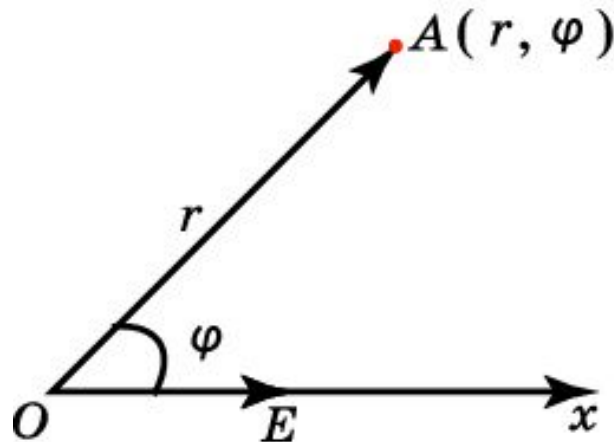


# Полярные координаты

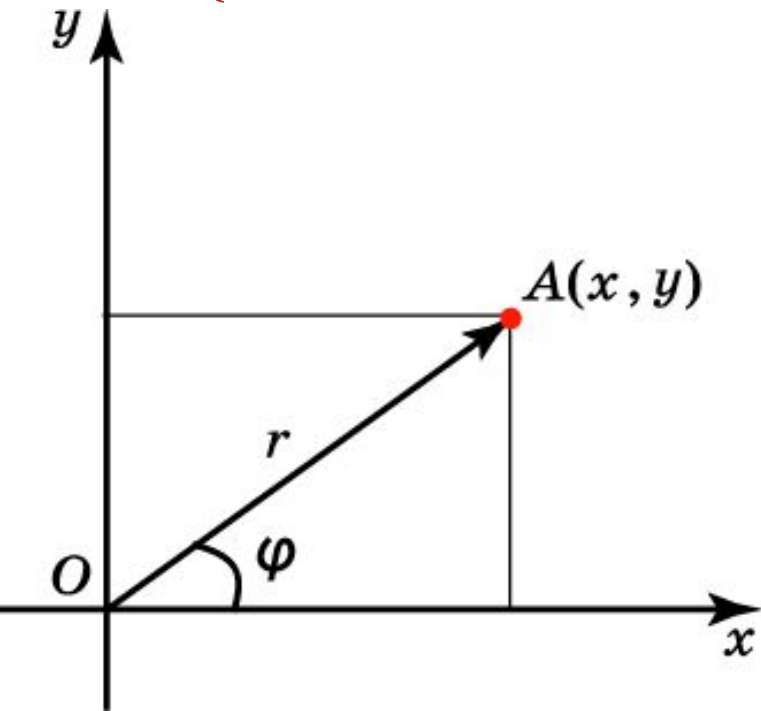
Пусть на плоскости задана координатная прямая с началом координат  $O$  и направляющим вектором. Эта прямая в данном случае будет называться **полярной осью**. **Полярными координатами** точки  $A$  на плоскости с заданной полярной осью называется пара  $(r, \varphi)$ , где  $r$  - расстояние от точки  $A$  до точки  $O$ ,  $\varphi$  - угол между полярной осью и вектором  $\vec{OA}$ , отсчитываемый в направлении против часовой стрелки. При этом первая координата  $r$  называется **полярным радиусом**, а вторая  $\varphi$  - **полярным углом**. Полярный угол  $\varphi$  можно задавать в градусах или радианах.



# Полярные координаты

Если на плоскости задана декартова система координат, то обычно за полярную ось принимается ось  $Ox$ . В этом случае каждой точке плоскости с декартовыми координатами  $(x, y)$  можно сопоставить полярные координаты  $(r, \varphi)$ . При этом декартовы координаты выражаются через полярные по формулам

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases}$$



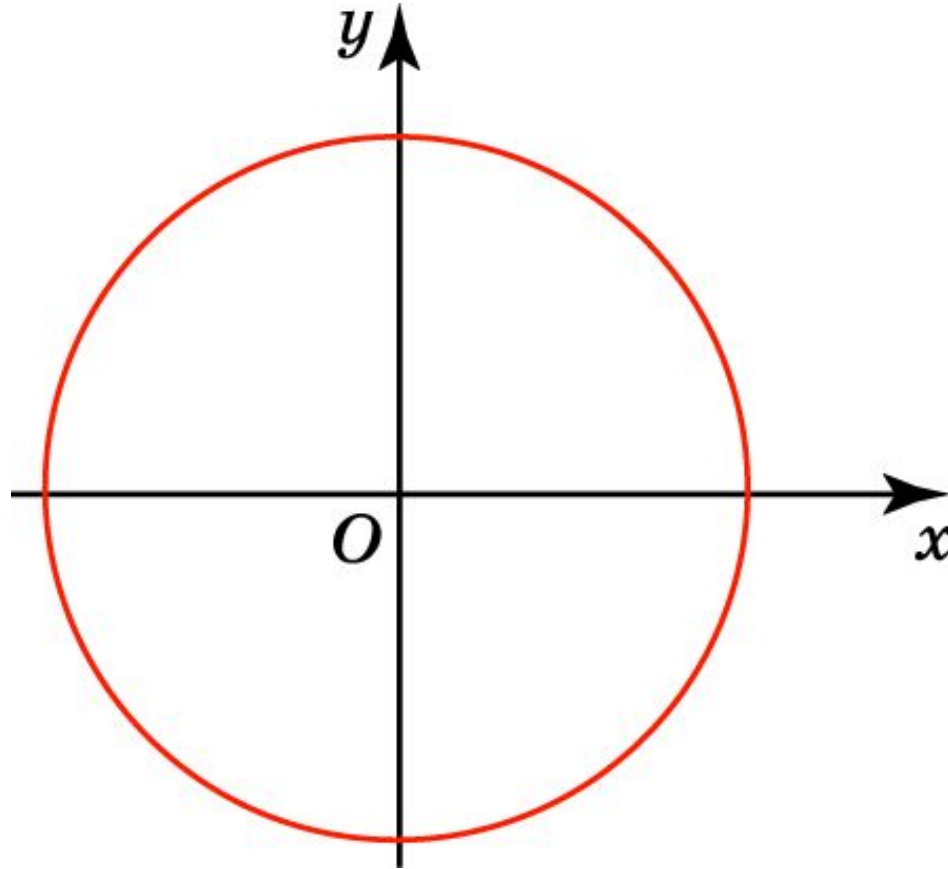
И, наоборот, полярные координаты выражаются через декартовы по формулам

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

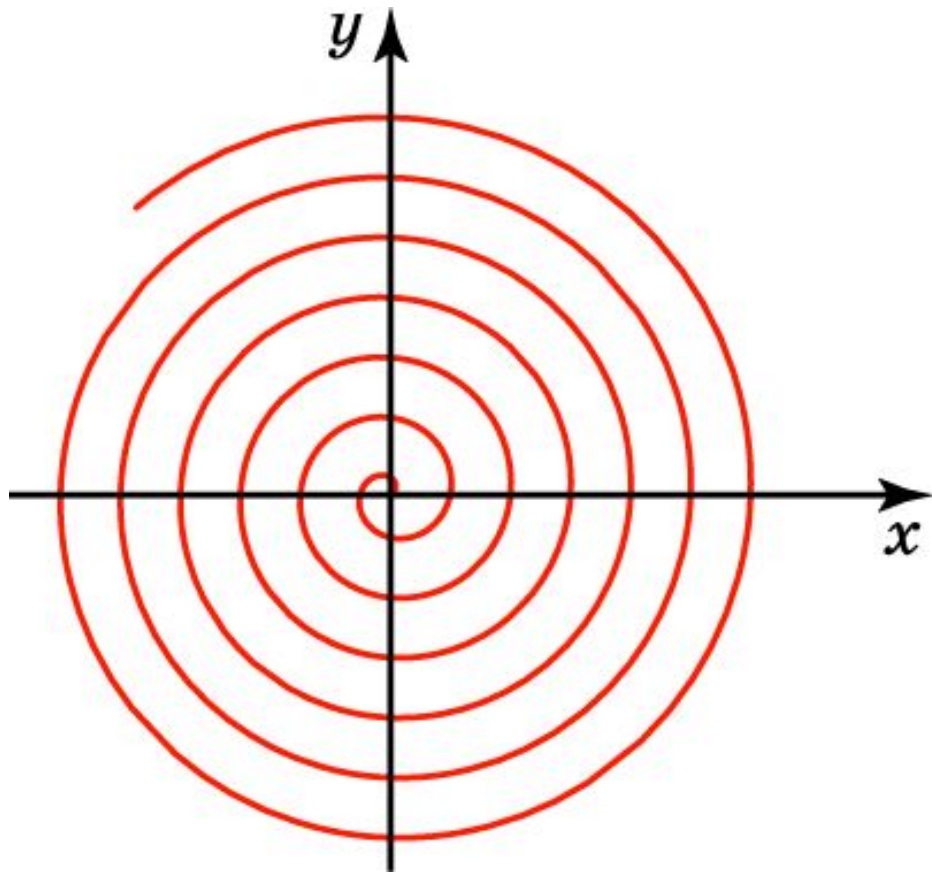
# Окружность

Окружность радиуса  $R$  и центром в точке  $O$  задается уравнением  $r = R$ .



# Спираль Архимеда

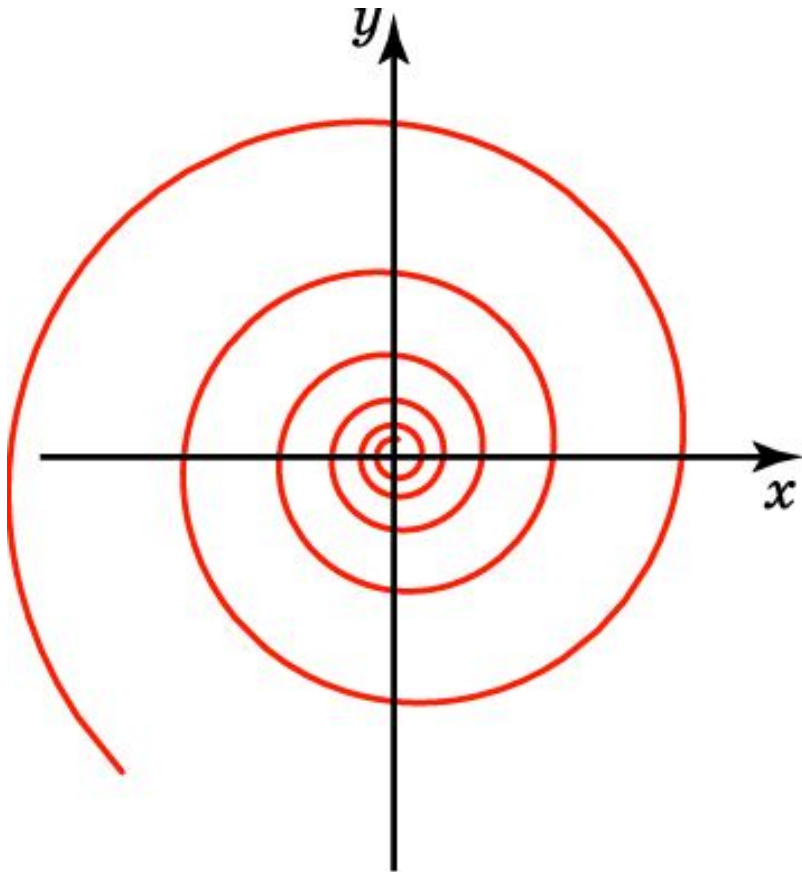
Спираль Архимеда - кривая, задаваемая уравнением  $r = a\varphi$ , где  $a$  - некоторое фиксированное число.



Геометрическим свойством, характеризующим спираль Архимеда, является постоянство расстояний между соседними витками. Каждое из них равно  $2\pi a$ . Действительно, если угол  $\varphi$  увеличивается на  $2\pi$ , т.е. точка делает один оборот против часовой стрелки, то радиус увеличивается на  $2\pi a$ , что и составляет расстояние между соседними витками.

# Логарифмическая спираль

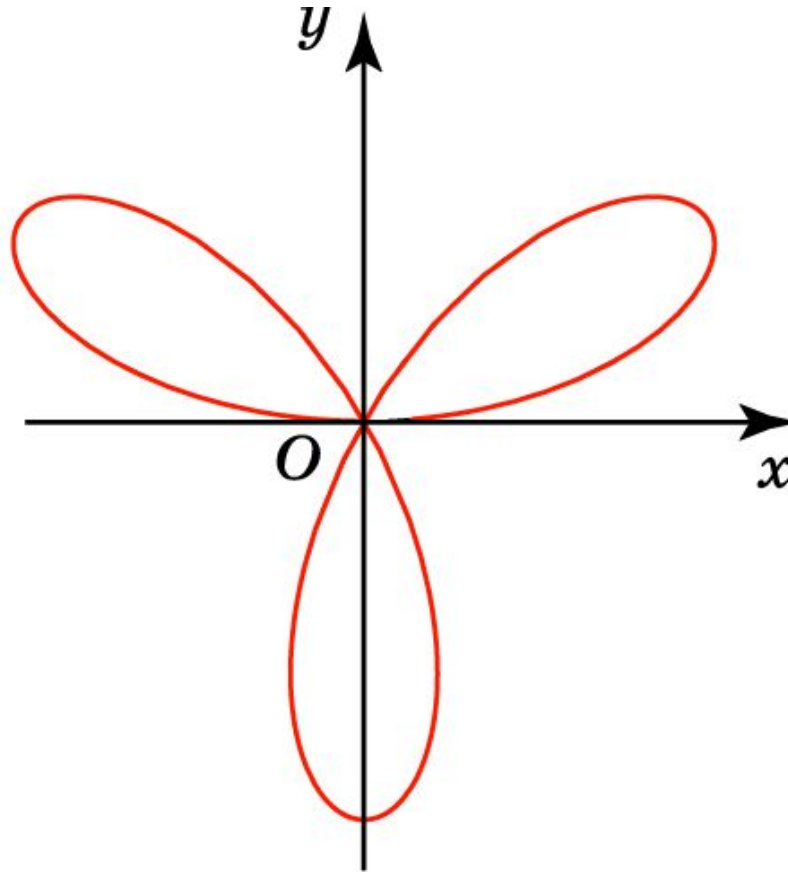
Логарифмическая спираль задается уравнением в полярных координатах  $r = a^\varphi$ , где  $a$  - некоторое фиксированное положительное число,  $\varphi$  - угол, измеряемый в радианах.



Геометрическим свойством этой спирали является то, что каждый следующий ее виток подобен предыдущему. Действительно, если угол увеличивается на  $2\pi$ , т.е. точка делает один оборот против часовой стрелки, то радиус увеличивается в  $a^{2\pi}$  раз. Это означает, что следующий виток подобен предыдущему, и коэффициент подобия равен  $a^{2\pi}$ .

# Трилистник

Трилистник – кривая, задаваемая уравнением  $r = \sin 3\varphi$ .



# Упражнение 1

Для следующих точек с заданными полярными координатами найдите их декартовы координаты:  $A(1, \frac{\pi}{3})$ ,  $B(2, -\frac{\pi}{4})$ .

**Ответ:**  $A(2, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ,  $B(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ .

## Упражнение 2

Для следующих точек с заданными декартовыми координатами найдите их полярные координаты:

а)  $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ , ;

б)  $B(-10, 0)$  ;

в)  $C(1, -\sqrt{3})$  ;

г)  $D(-\sqrt{3}, 1)$  .

**Ответ:** а)  $A(2, 45^\circ)$ ;

б)  $B(10, 180^\circ)$ ;

в)  $C(2, -60^\circ)$ ;

г)  $D(2, 150^\circ)$ .



## Упражнение 3

Могут ли разным полярным координатам соответствовать одинаковые точки на плоскости?

Ответ: Да.

## Упражнение 4

Найдите геометрическое место точек на плоскости, для которых:

- а) полярный радиус  $r$  постоянен и равен  $r_0$ ;
- б) полярный угол  $\varphi$  постоянен и равен  $\varphi_0$ .

**Ответ:** а) Окружность;

б) луч.

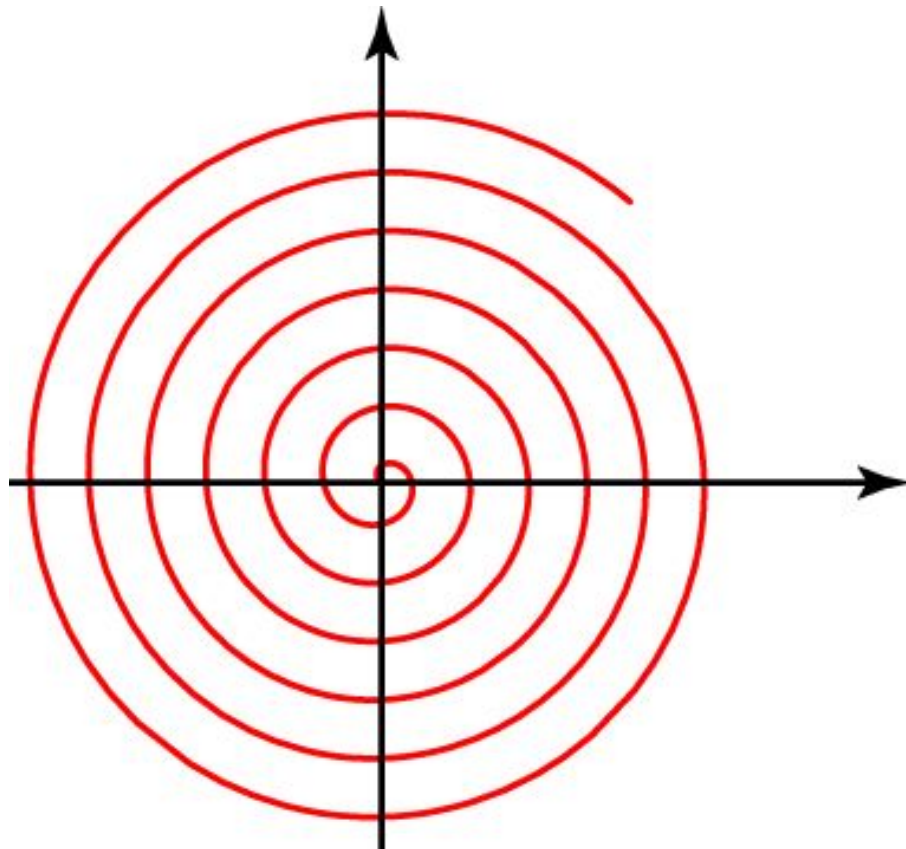
## Упражнение 5

Центром правильного шестиугольника является начало координат. Одна из его вершин имеет полярные координаты  $(1, 0)$ . Найдите полярные координаты остальных вершин.

**Ответ:**  $(1, 60^\circ)$ ,  $(1, 120^\circ)$ ,  $(1, 180^\circ)$ ,  $(1, 240^\circ)$ ,  $(1, 300^\circ)$ .

## Упражнение 6

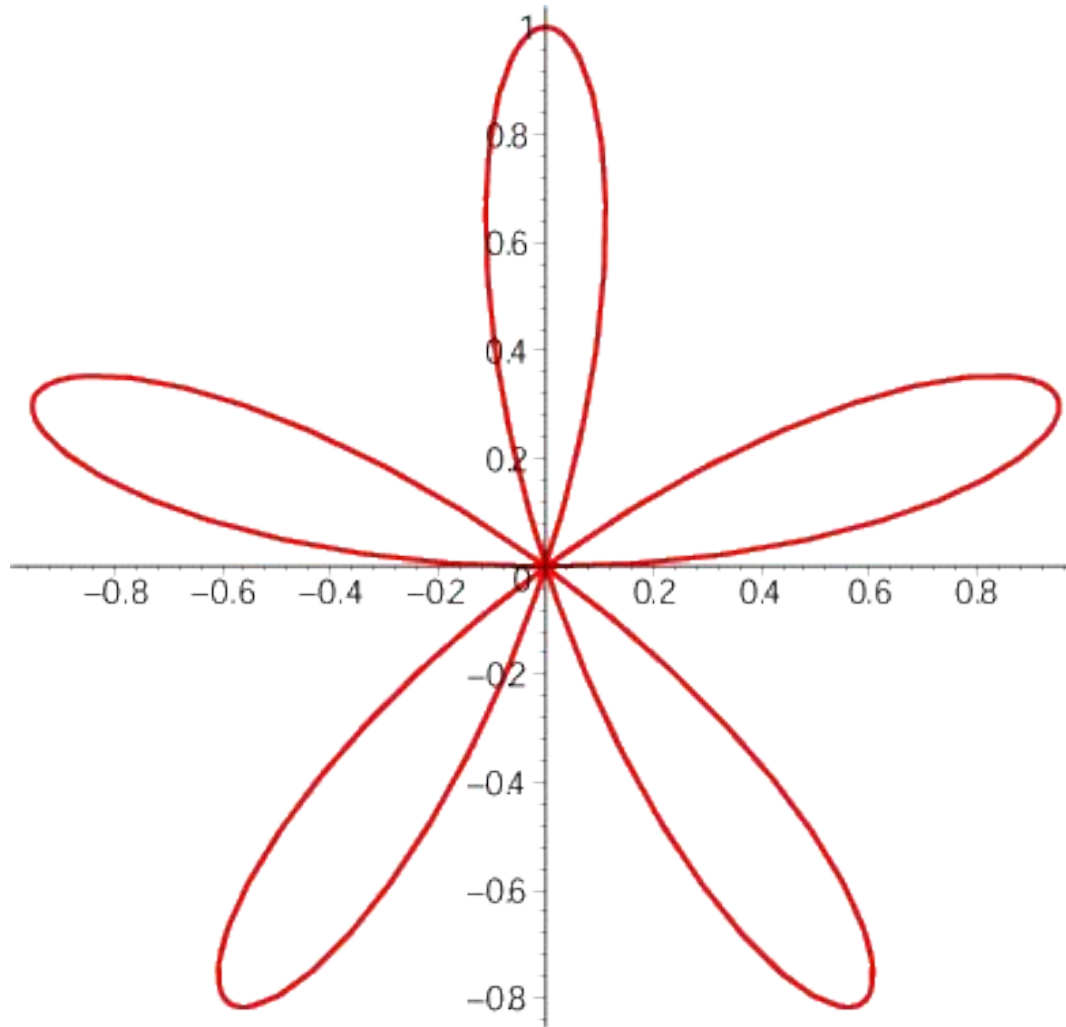
Нарисуйте спираль Архимеда, заданную уравнением  $r = -\varphi$ .



Ответ:

## Упражнение 7

Нарисуйте пятилепестковую розу - кривую, задаваемую уравнением  $r = \sin 5\varphi$ .

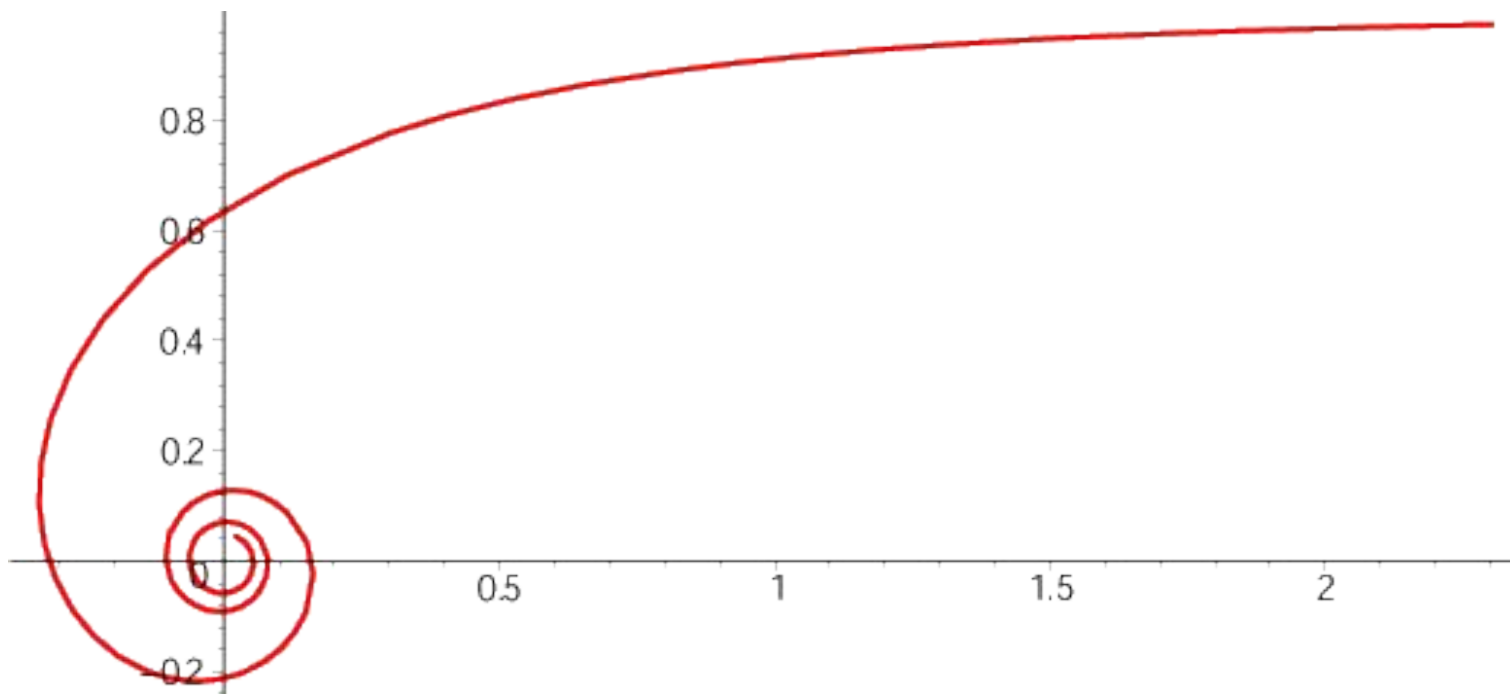


Ответ:

## Упражнение 8

Нарисуйте гиперболическую спираль - кривую, задаваемую уравнением  $r = \frac{1}{\varphi}$ .

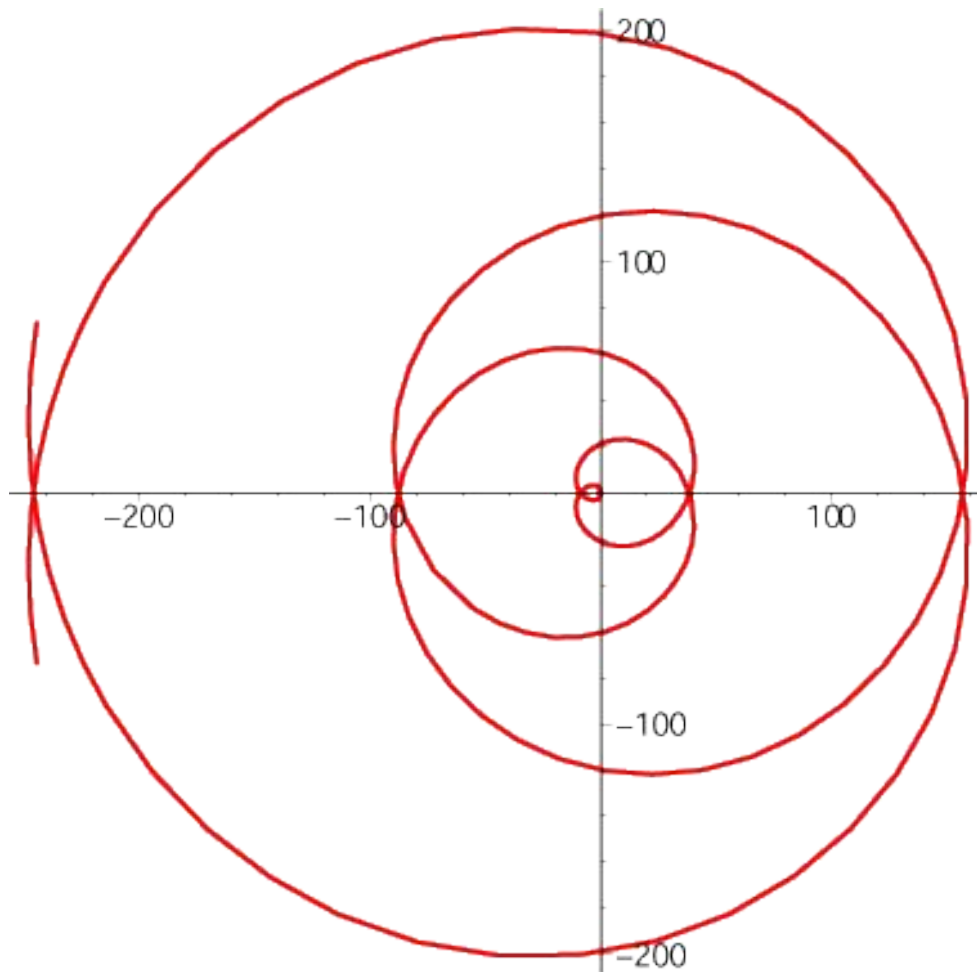
Ответ:



## Упражнение 9

Нарисуйте спираль Гилилея - кривую, задаваемую уравнением

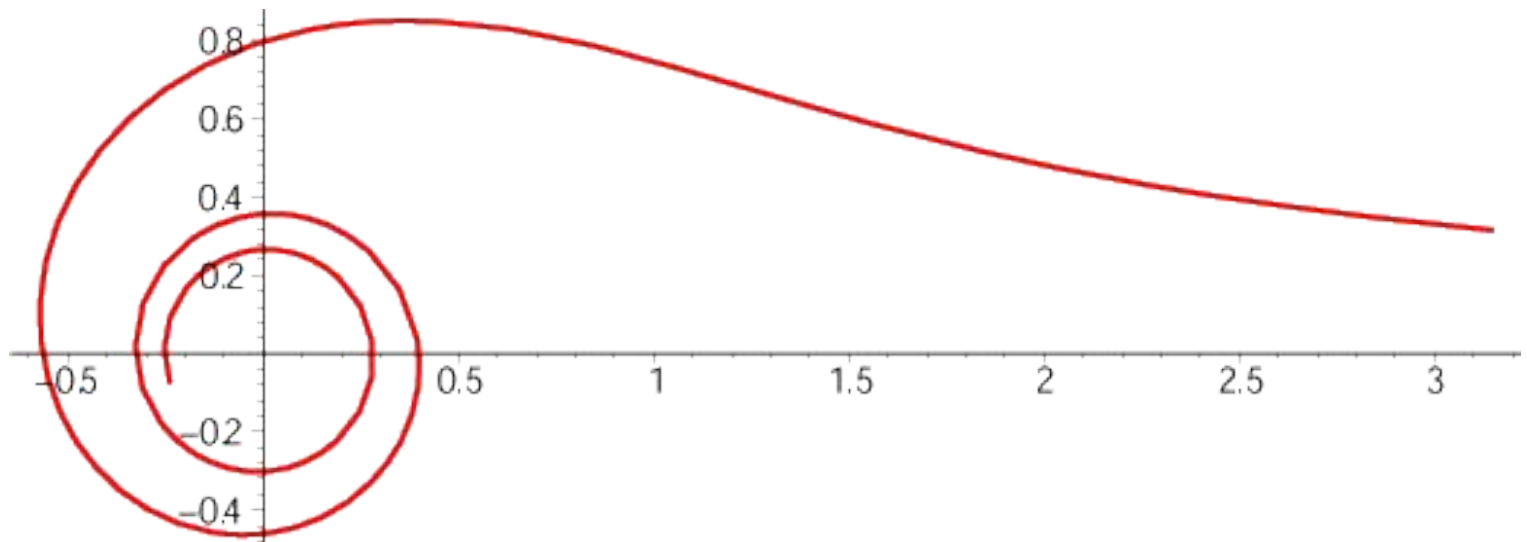
$$r = \varphi^2 - 1.$$



Ответ:

## Упражнение 10

Нарисуйте Жезл - кривую, задаваемую уравнением  $r = \frac{1}{\sqrt{\varphi}}$ .



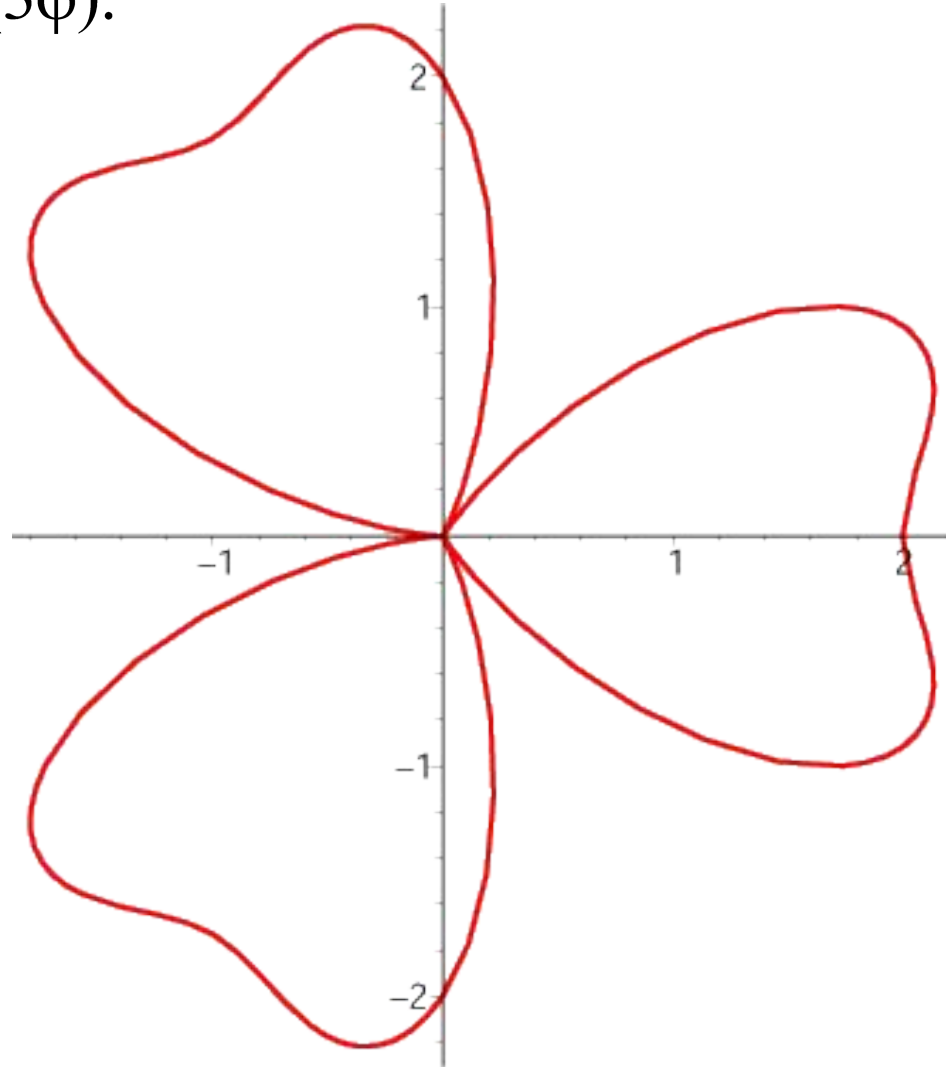
Ответ:



## Упражнение 11

Нарисуйте «заячью капусту»- кривую, задаваемую уравнением

$$r = \cos(3\varphi) + \sin^2(3\varphi).$$

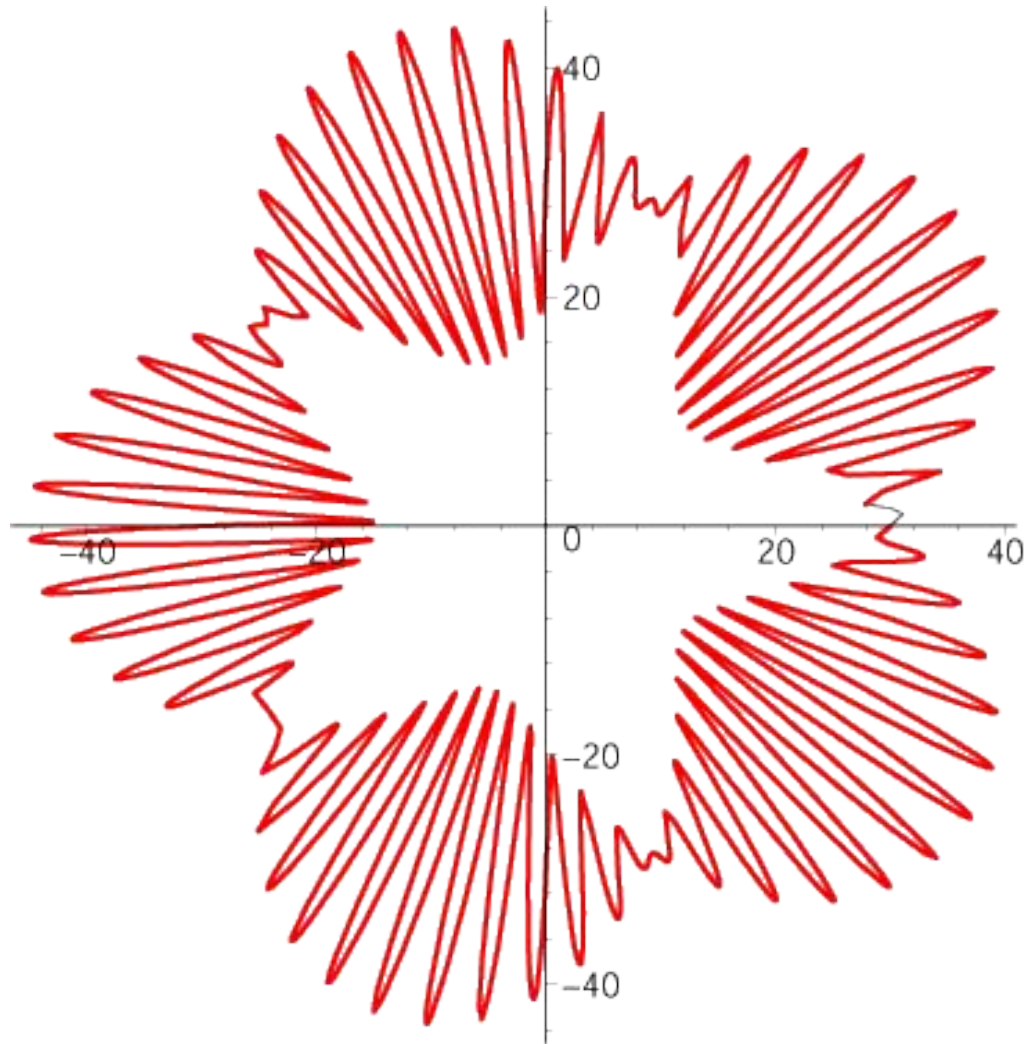


Ответ:

## Упражнение 12

Нарисуйте кривую, задаваемую уравнением

$$r = 30 + 15 \sin(60\varphi) \sin(2,5\varphi).$$



Ответ: