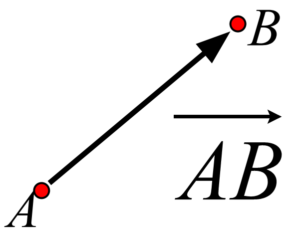
Векторы на плоскости и в пространстве.
Основные понятия.

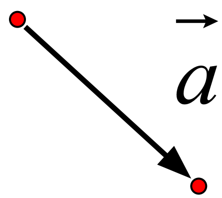
Понятие вектора в пространстве

Вектор(направленный отрезок) *–*

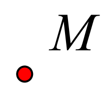
отрезок, для которого указано какой из его концов считается началом, а какой – концом.



$$\overrightarrow{AB}$$



$$\vec{a}$$



$$\overrightarrow{MM} = \vec{0}$$

Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ *– длина отрезка AB.*

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB \qquad \left|\vec{0}\right| = 0$$

Нулевым вектором называется вектор, начало и конец которого совпадают.

Единичным вектором называется вектор, длина которого равна единице.

Векторы называются ***коллинеарными***, если они лежат на одной прямой или параллельных прямых.

Векторы называются ***компланарными***, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

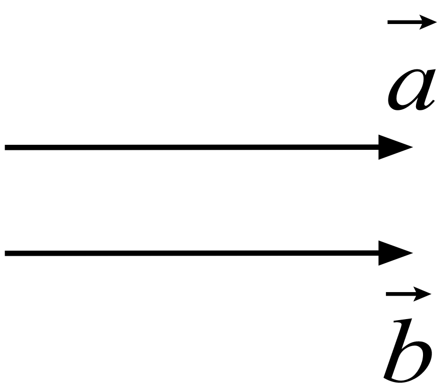
Коллинеарные векторы

Среди коллинеарных различают:

- Сонаправленные векторы
- Противоположно направленные векторы

Равные векторы

Равные векторы *- сонаправленные векторы, длины которых равны.*

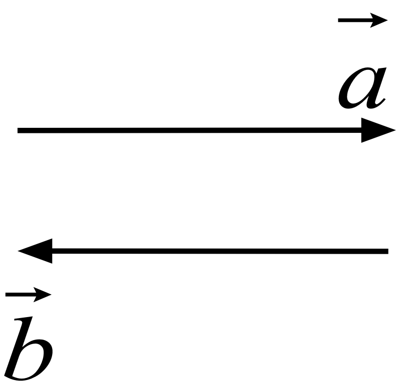


$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}, \left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right|$$

От любой точки можно отложить вектор, равный данному, и притом только один.

Противоположные векторы

***Противоположные векторы** – противоположно направленные векторы, длины которых равны.*



$$\vec{a} = -\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}, \left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right|$$

Вектором, противоположным нулевому, считается нулевой вектор.

Признак коллинеарности

Если существует такое число $\boldsymbol{k}$ *при котором выполняется равенство* $\vec{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{k}\vec{\boldsymbol{b}}$ *и при том вектор* $\vec{\boldsymbol{b}} \neq \vec{\boldsymbol{0}}$, *то векторы* $\vec{\boldsymbol{a}}$ *и* $\vec{\boldsymbol{b}}$ *коллинеарны.*

$$\text{вектор } \boldsymbol{k}\vec{\boldsymbol{a}} \uparrow\uparrow \vec{\boldsymbol{b}}, \text{если } \boldsymbol{k} \geq \boldsymbol{0}$$

$$\text{вектор } \boldsymbol{k}\vec{\boldsymbol{a}} \uparrow\downarrow \vec{\boldsymbol{b}}, \text{если } \boldsymbol{k} < \boldsymbol{0}$$

Действия с векторами

- Сложение
- Вычитание
- Умножение вектора на число

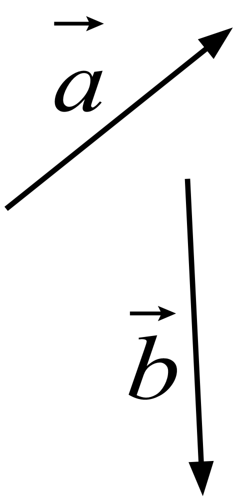
Сложение векторов

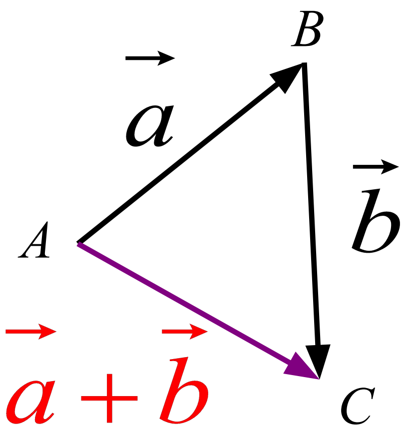
- Правило треугольника
- Правило параллелограмма
- Правило многоугольника
- Правило параллелепипеда

Правило треугольника

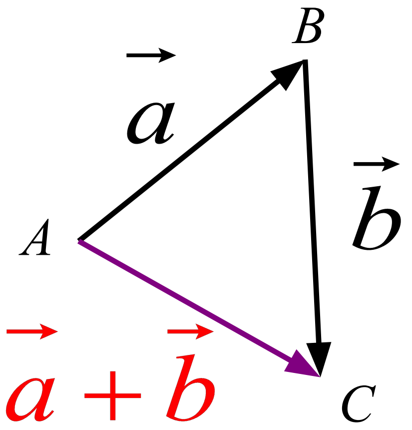
Для сложения двух векторов необходимо:

1. *отложить от какой – нибудь точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, равный $\vec{a}$*
2. *от точки B отложить вектор $\overrightarrow{BC}$, равный $\vec{b}$*
3. *вектор $\overrightarrow{AC}$ называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$*





Правило треугольника



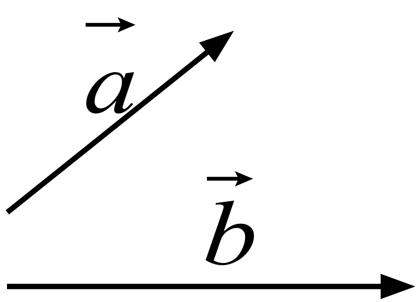
Для любых трех точек A, B и C справедливо равенство:

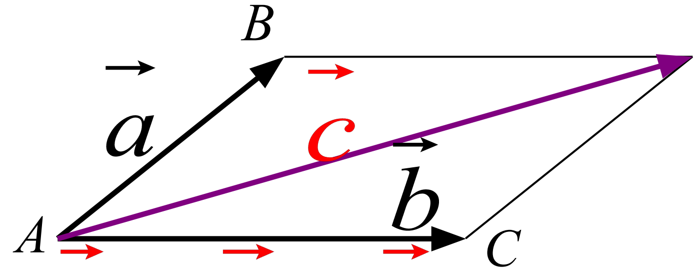
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

Правило параллелограмма

Для сложения двух векторов необходимо:

1. *отложить от какой – нибудь точки* A *вектор* $\overrightarrow{AB}$, *равный* $\vec{a}$
2. *от точки* A *отложить вектор* $\overrightarrow{AC}$, *равный* $\vec{b}$
3. *достроить фигуру до параллелограмма, проведя дополнительные линии параллельно данным векторам*
4. *диагональ параллелограмма – сумма векторов*

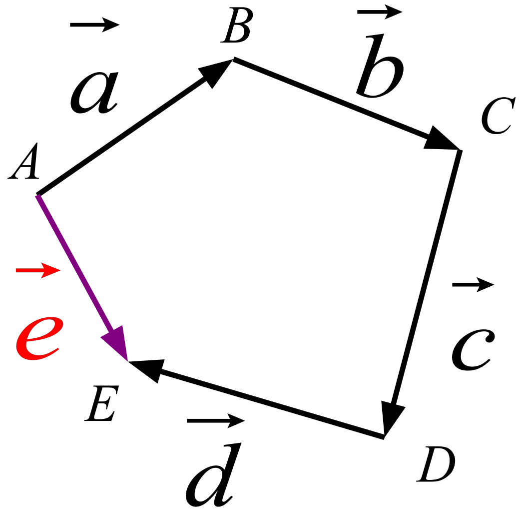




$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

Правило многоугольника

Сумма векторов равна вектору, проведенному из начала первого в конец последнего(при последовательном откладывании).

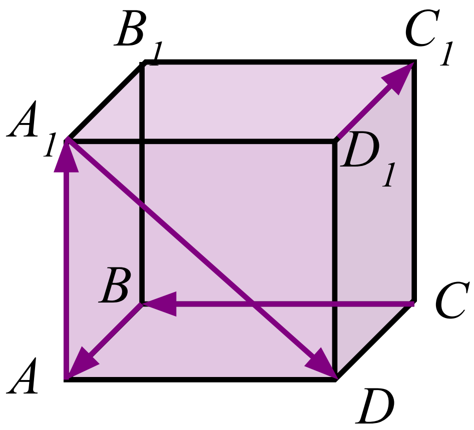


$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{e}$$

Пример

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$$

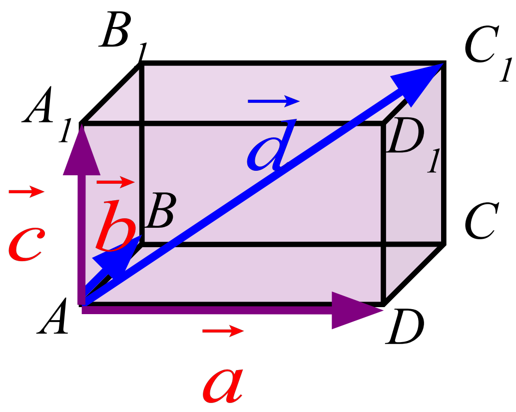
Пример



$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{A_1D} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$$

Правило параллелепипеда

Вектор, лежащий на диагонали параллелепипеда, равен сумме векторов, проведенных из той же точки и лежащих на трех измерениях параллелепипеда.



$$\overrightarrow{AD} = \vec{a}$$

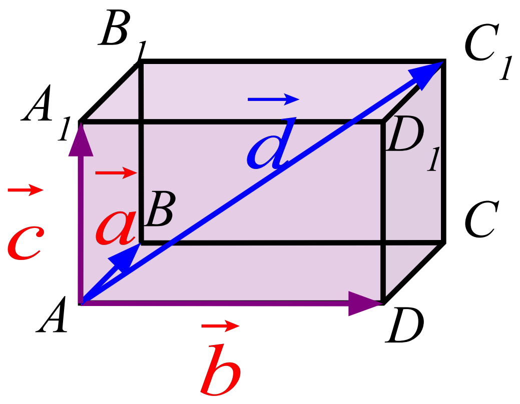
$$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$$

$$\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$$

$$\overrightarrow{AC_1} = \vec{d}$$

$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}$$

Свойства



$\vec{\boldsymbol{d}} = \vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}} + \vec{\boldsymbol{c}}$ *для любого параллелепипеда*

$\boldsymbol{d}^2 = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 + \boldsymbol{c}^2$ *для прямоугольного параллелепипеда*

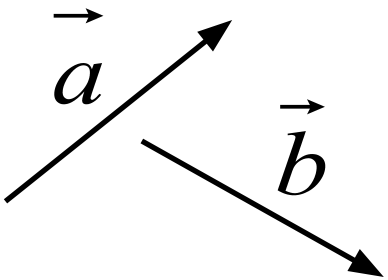
Вычитание

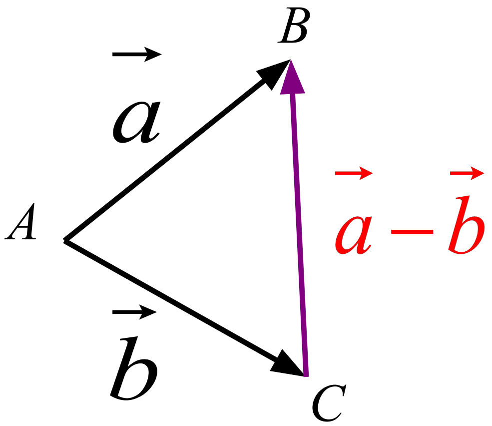
Разностью векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *называется такой вектор, сумма которого с вектором* $\vec{b}$ *равна вектору* $\vec{a}$.

Вычитание

Для вычитания одного вектора из другого необходимо :

1. *отложить от какой – нибудь точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, равный $\vec{a}$*
2. *от этой же точки A отложить вектор $\overrightarrow{AC}$, равный $\vec{b}$*
3. *вектор $\overrightarrow{CB}$ называется разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$*

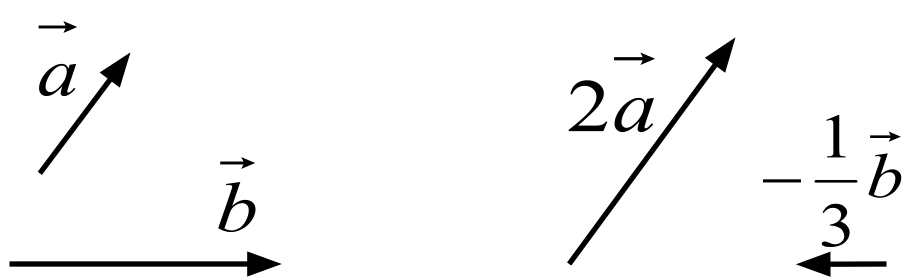




[Правило трех точек]()

Умножение вектора на число

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ *на число* k *называется такой вектор* $\vec{b}$, *длина которого равна* $|k| \cdot |\vec{a}|$, *при чем векторы* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *сонаправлены при* $k \geq 0$ *и противоположно направлены при* $k < 0$.



Свойства

Для любых векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *и любых чисел* k, l *справедливы равенства :*

$(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$ *сочетательный закон*

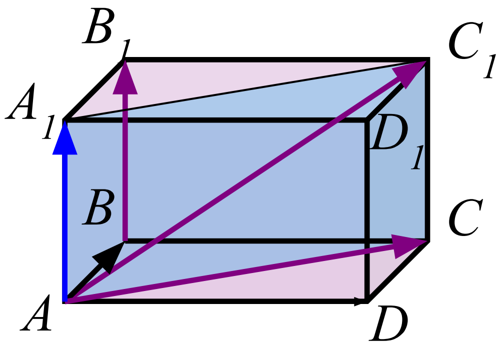
$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ 1 – *ый распределительный закон*

$(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$ 2 – *ой распределительный закон*

Определение компланарных векторов

Компланарные векторы *– векторы, при откладывании которых от одной и той же точки пространства, они будут лежать в одной плоскости.*

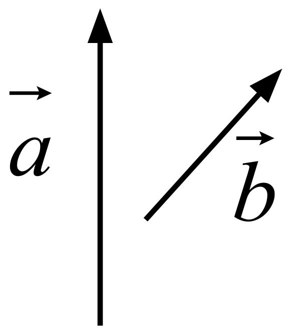
Пример:

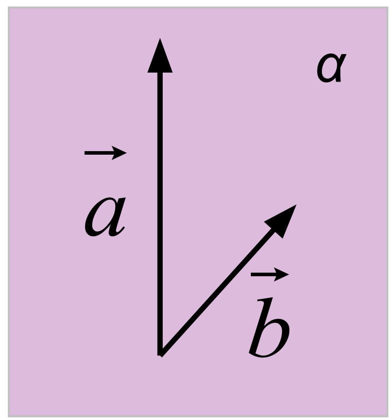


$\overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC_1}$ *– компланарны, т.к.*
$\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AA_1}$*, а векторы* $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC_1}$
лежат в плоскости (AA_1C)

О компланарных векторах

Любые два вектора всегда компланарны.





$\vec{a} \in \alpha$

$\vec{b} \in \alpha$

$\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ – *компланарны*

Три вектора, среди которых имеются два коллинеарных, компланарны.

$\vec{a}, \vec{b}$ *и* $\vec{c}$ – *компланарны*   *если* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$\vec{a} = k\vec{b}$

Признак компланарности

Если вектор $\vec{c}$ *можно разложить по векторам* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$, *т.е. представить в виде*

$$\vec{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{x}\vec{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{y}\vec{\boldsymbol{b}}$$

где x *и* y *– некоторые числа, то векторы* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$ *компланарны.*

Разложение вектора

- По двум неколлинеарным векторам
- По трем некомпланарным векторам

Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

<u>Теорема.</u>

Любой вектор можно разложить по двум данным неколлинеарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Разложение вектора по трем некомпланарным векторам

*Если вектор **p** представлен в виде*

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

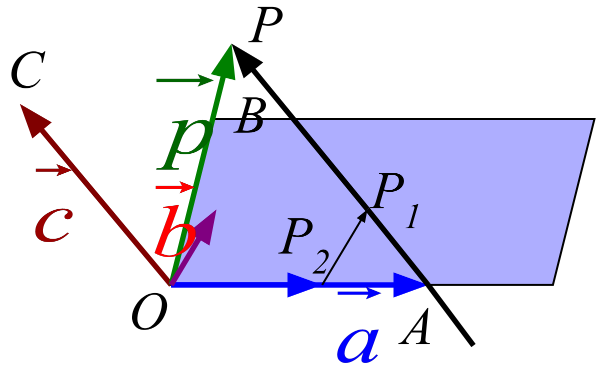
*где **x, y, z** – некоторые числа, то говорят, что вектор* $\vec{\boldsymbol{p}}$ *разложен по векторам* $\vec{\boldsymbol{a}}$, $\vec{\boldsymbol{b}}$ *и* $\vec{\boldsymbol{c}}$.

Числа x, y, z называются коэффициентами разложения.

<u>Теорема</u>

Любой вектор можно разложить по трем данным некомпланарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Доказательство теоремы



Дано :

$\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}$ – некомпланрные векторы

$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$

Доказательство :

O – *произвольная точка*

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}\ \overrightarrow{OB} = \vec{b}\ \overrightarrow{OC} = \vec{c}\ \overrightarrow{OP} = \vec{p}$

$AP \parallel OC \quad AP \cap (AOB) = P_1 \quad P_2P_1 \parallel OB$

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{P_2P_1} + \overrightarrow{P_1P}$

$\overrightarrow{OP_2}$, *и* $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{PP_1}$ *и* $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{P_1P}$, $\overrightarrow{OC}$ – *коллинеарны*

$\overrightarrow{OP_2} = x \cdot \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{P_2P_1} = y \cdot \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{P_1P} = z \cdot \overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{OP} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} + z \cdot \overrightarrow{OC}$

$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ *ч.т.д.*

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов называется число

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$$

Замечание. Если два вектора являются перпендикулярными, то их скалярное произведение равно нулю, и наоборот.

Теорема. Скалярное произведение двух векторов

$$\vec{a} = (X_1, Y_1, Z_1), \vec{b} = (X_2, Y_2, Z_2)$$

вычисляется по формуле

$$\vec{a}\vec{b} = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2$$

Следствие 1. Косинус угла между векторами

$$\vec{a} = \left(X_1, Y_1, Z_1 \right), \vec{b} = \left(X_2, Y_2, Z_2 \right)$$

вычисляется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} = \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2}{\sqrt{X_1^{\,2} + Y_1^{\,2} + Z_1^{\,2}}\sqrt{X_2^{\,2} + Y_2^{\,2} + Z_2^{\,2}}}$$

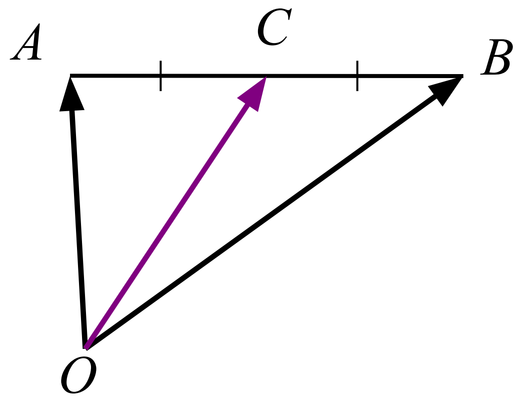
Следствие 2. Необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух векторов выражается равенством

$$\vec{a}\vec{b} = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2 = 0$$

Базисные задачи

Вектор, проведенный в середину отрезка,

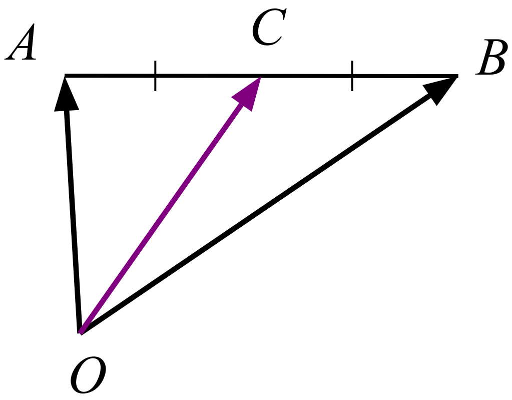
равен полусумме векторов, проведенных из той же точки в его концы.



$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

[Доказательство]

Доказательство



Дано :

$AB - \text{отрезок}$

$AC = CB$

Доказать :

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

Доказательство :

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} \end{array}\right| +$$

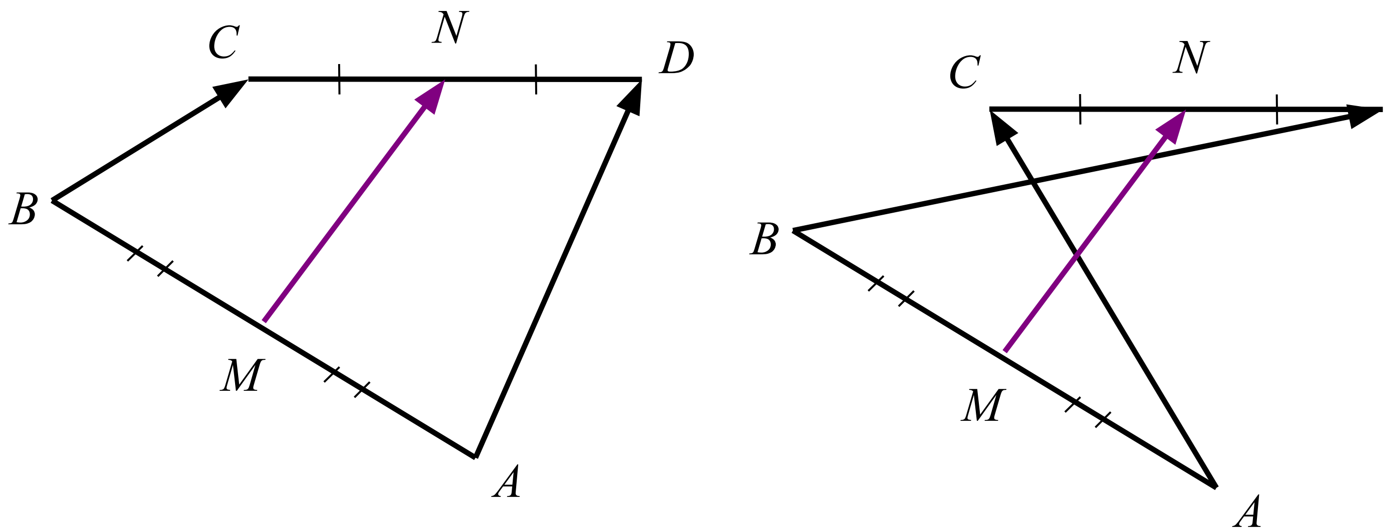
$$2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \underbrace{(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC})}_{\vec{o}}$$

$$2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \quad \Big| \div 2$$

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \quad \Big| \text{ч.т.д.}$$

Вектор, соединяющий середины двух отрезков,

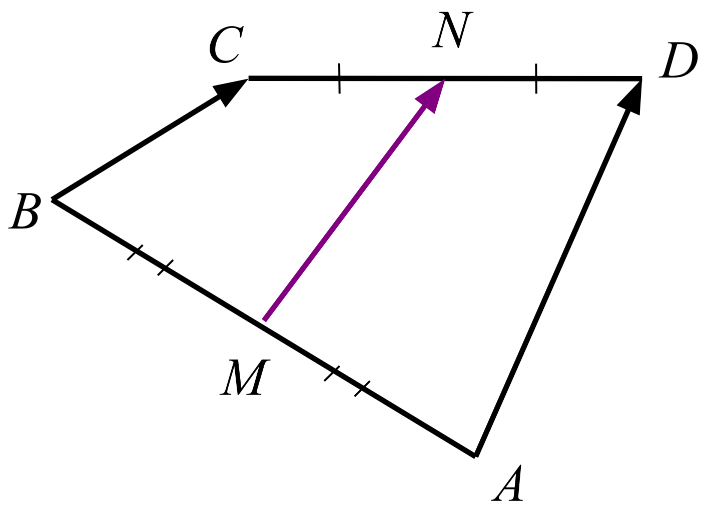
равен полусумме векторов, соединяющих их концы.



$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$$

Доказательство

Доказательство



Дано :

$AB; CD$

$BM = AM$

$CN = ND$

Доказать :

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$$

Доказательство :

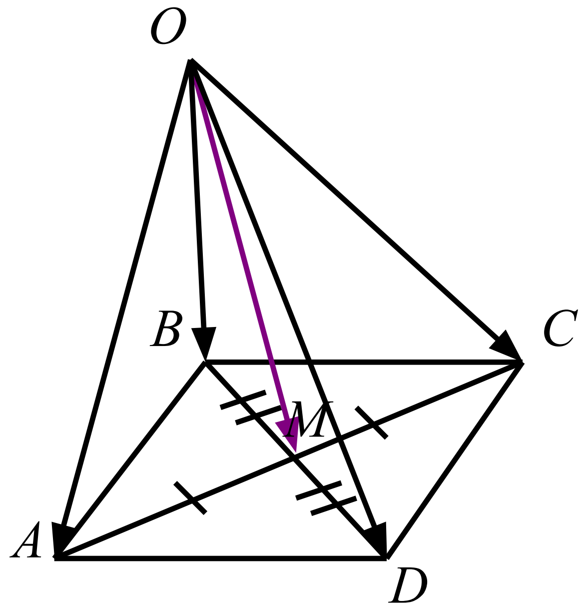
$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}\\ \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN}\end{aligned}\right| +$$

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) \text{ ч.т.д.}$$

Вектор, проведенный в точку пересечения диагоналей параллелограмма,

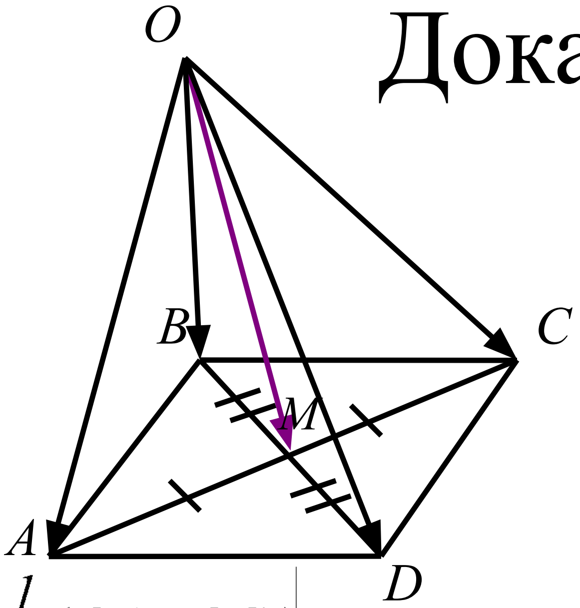
равен одной четверти суммы векторов, проведенных из этой точки в вершины параллелограмма.



$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

Доказательство

Доказательство



Дано :

$ABCD - пар - м$

$BD \cap AC = M$

Доказать :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

$$\left.\begin{array}{l} OM = \frac{1}{2}(OA + OC) \\ \\ OM = \frac{1}{2}(OB + OD) \end{array}\right| +$$

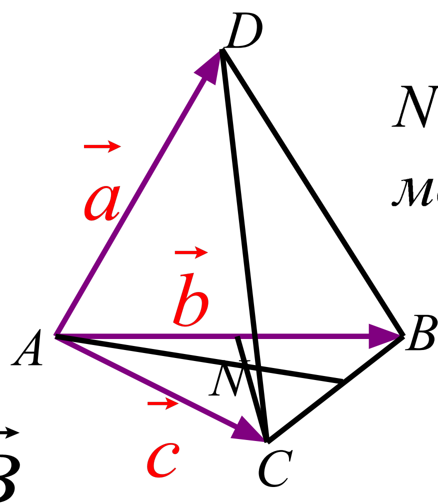
$$2OM = \frac{1}{2}OA + \frac{1}{2}OB + \frac{1}{2}OC + \frac{1}{2}OD$$

$$OM = \frac{1}{4}OA + \frac{1}{4}OB + \frac{1}{4}OC + \frac{1}{4}OD =$$

$$= \frac{1}{4}(OA + OB + OC + OD)$$ ÷.ð.ä.

Задача 1. Разложение векторов

Разложите вектор по $\vec{a}$, $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$:



$N -$ *точка пересечения медиан* ΔABC

а) $\overrightarrow{DB}$

б) $\overrightarrow{CB}$

в) $\overrightarrow{DC}$

г) $\overrightarrow{DN}$

[Решение]

Решение

а) $\overrightarrow{DB} = \vec{b} - \vec{a}$

б) $\overrightarrow{CB} = \vec{b} - \vec{c}$

в) $\overrightarrow{DC} = \vec{c} - \vec{a}$

г) $\overrightarrow{DN} = -\vec{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AN} = -\vec{a} + \frac{1}{3}(\frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})) =$

$= -\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c}$

Задача 2. Сложение и вычитание

Упростите выражения:

а) $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MK}$

б) $\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MA}$

в) $\overrightarrow{SD} - \overrightarrow{ST}$

г) $\overrightarrow{PL} - \overrightarrow{PK}$

д) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM}$

е) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{EK} - \overrightarrow{EP} - \overrightarrow{MD}$

Решение

Решение

а) $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{CK}$

б) $\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{DA}$

в) $\overrightarrow{SD} - \overrightarrow{ST} = \overrightarrow{TD}$

г) $\overrightarrow{PL} - \overrightarrow{PK} = \overrightarrow{KL}$

д) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} =$
$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{BM} =$
$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$

е) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{EK} - \overrightarrow{EP} - \overrightarrow{MD} =$
$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{EK} =$
$= \overrightarrow{AK}$