

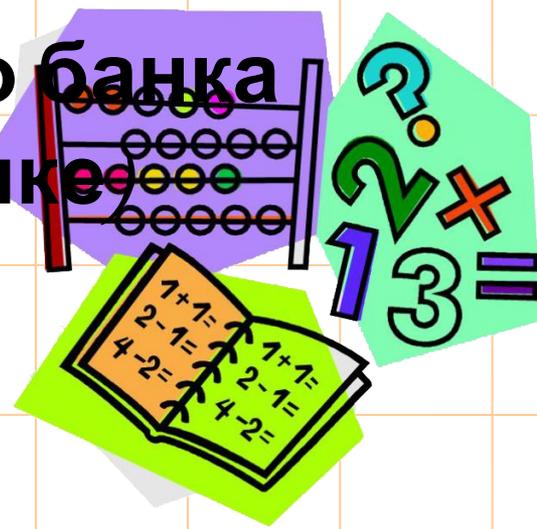
**Методическое пособие для учащихся 11  
классов**

***Производная.  
Первообразная.  
Интеграл.***

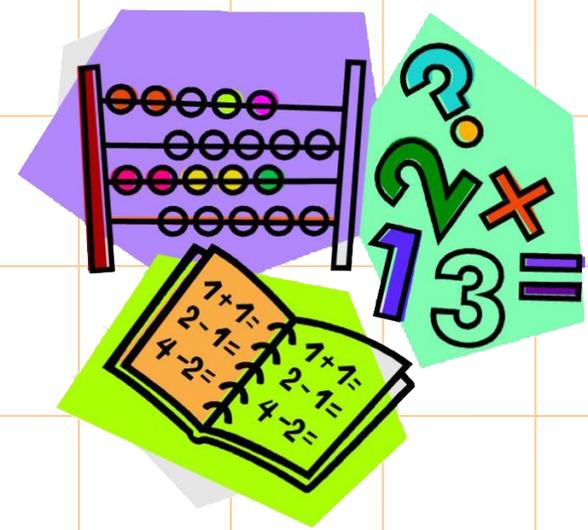
**(по материалам открытого банка  
задач ЕГЭ по математике)**

**2018**

**г.**



# Физический СМЫСЛ производной



## **Задача №1**

Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = 6t^2 - 48t + 17$$

(где  $x$  — расстояние от точки отсчета в метрах,  $t$  — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени  $t = 9$  с.

**Ответ: 60  
м/с.**

## **Задача №2**

Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = \frac{1}{2}t^3 - 3t^2 + 2t$$

(где  $x$  — расстояние от точки отсчета в метрах,  $t$  — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени  $t = 6$  с.

**Ответ: 20  
м/с.**

## **Задача №3**

Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = -t^4 + 6t^3 + 5t + 23$$

(где  $x$  — расстояние от точки отсчета в метрах,  $t$  — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени  $t = 6$  с.

**Ответ: 59  
м/с.**

## **Задача №4**

Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 - 5t + 3$$

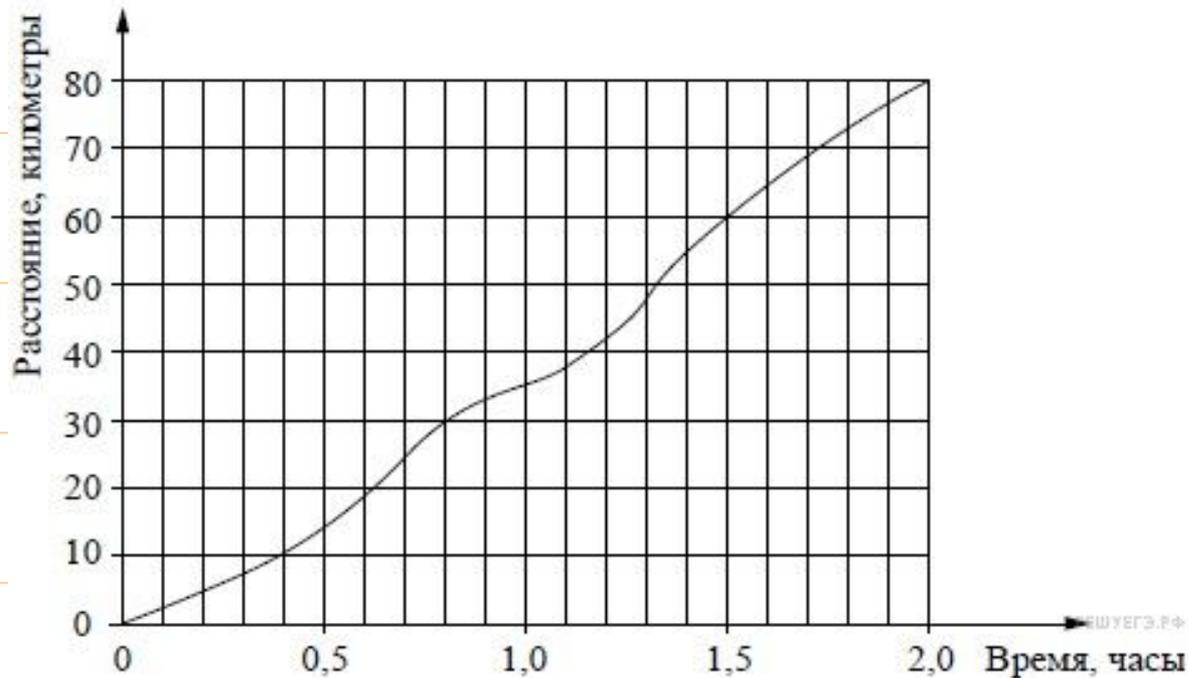
(где  $x$  — расстояние от точки отсчета в метрах,  $t$  — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 2 м/с?

**Ответ:**

**7с.**

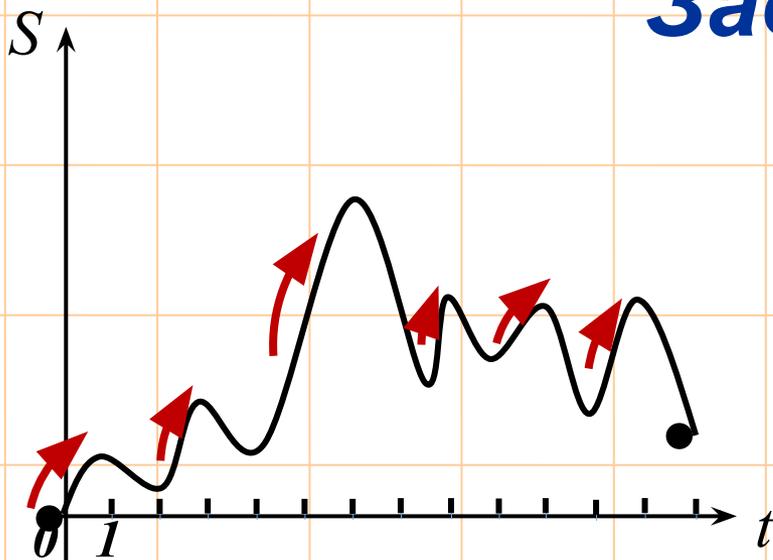
## Задача №5

На рисунке показан график движения автомобиля по маршруту. На оси абсцисс откладывается время (в часах), на оси ординат — пройденный путь (в километрах). Найдите среднюю скорость движения автомобиля на данном маршруте. Ответ дайте в км/ч.



**Ответ: 40  
км/ч**

## Задача №6



Материальная точка  $M$  начинает движение из точки  $A$  и движется на протяжении 12 секунд. График показывает, как менялось расстояние от точки  $M$  со временем. На оси абсцисс откладывается время  $t$  в секундах,

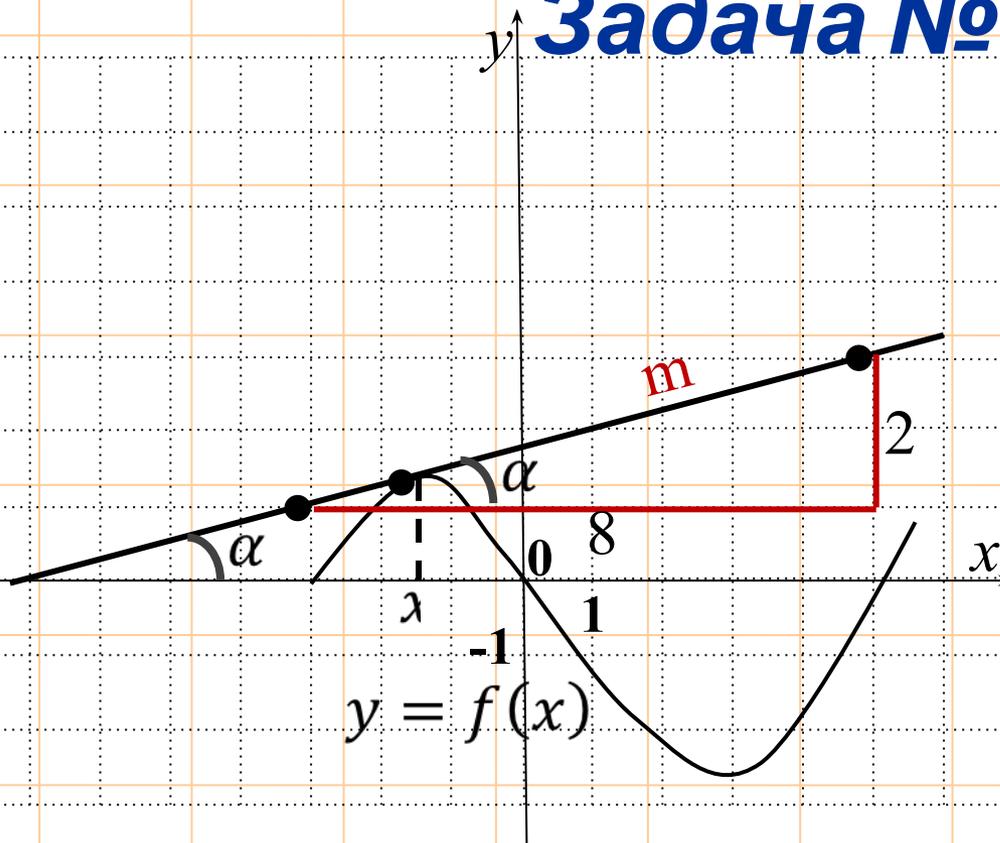
на оси ординат – расстояние  $s$  в метрах. Определите, сколько раз за время движения скорость точки  $M$  обращалась в ноль (начало и конец движения не учитывайте).

**Ответ:**

**11.**

***Геометрический смысл  
производной,  
касательная***

## Задача № 7

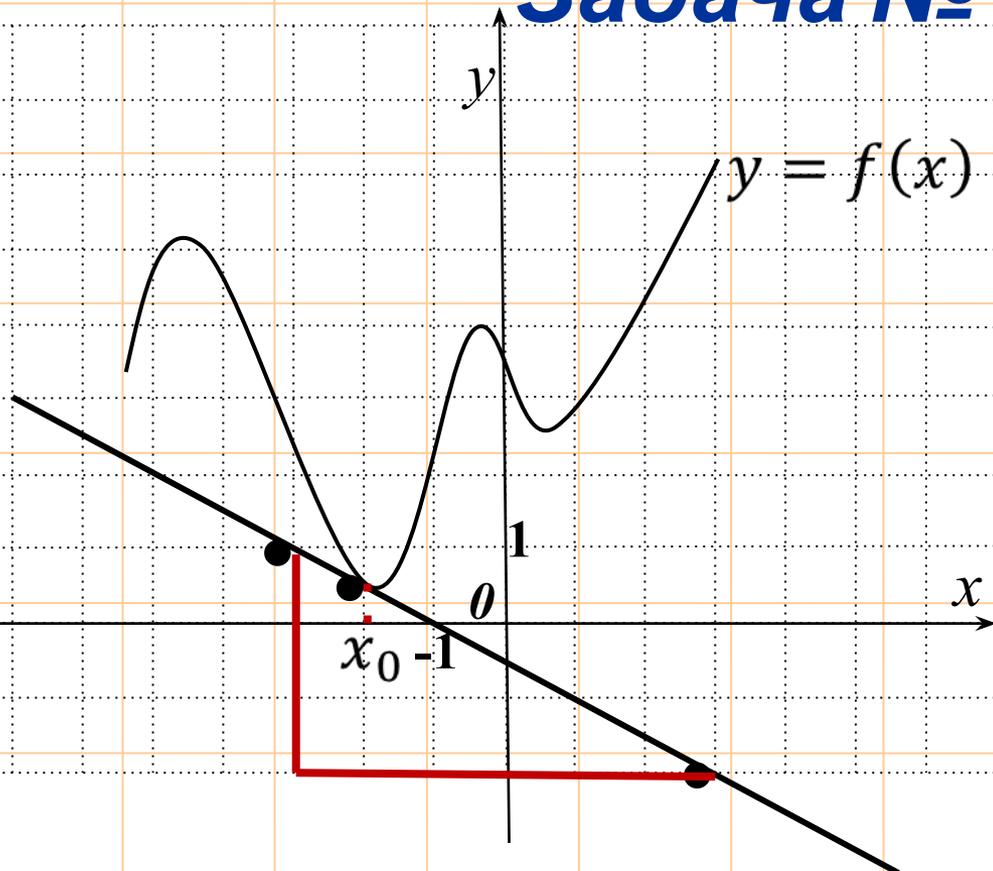


На рисунке изображены график функции  $y = f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .

**Ответ:**  
**0,25**

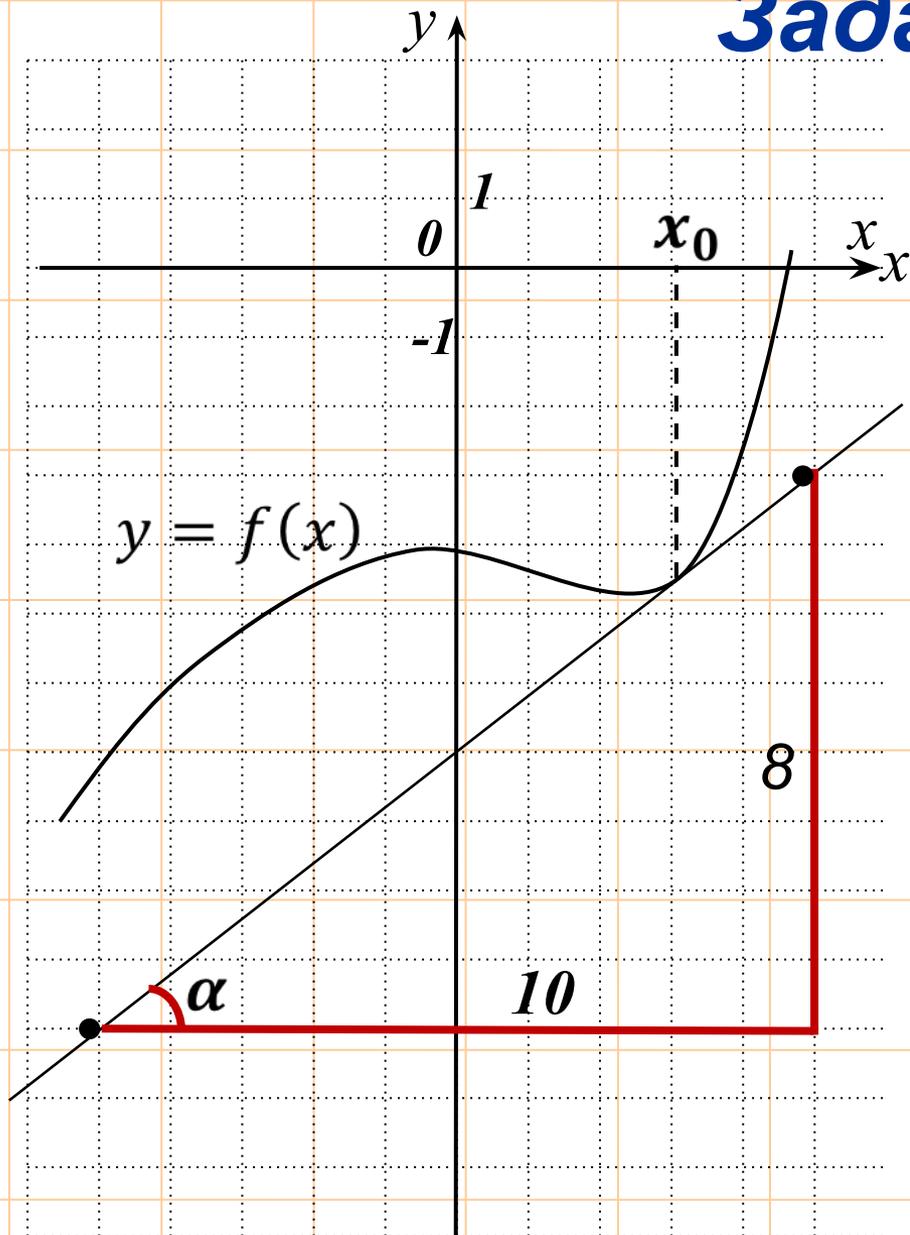
## Задача № 8

На рисунке изображены график функции  $y=f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .



**Ответ:**  
 **$-0,5$**

## Задача №9



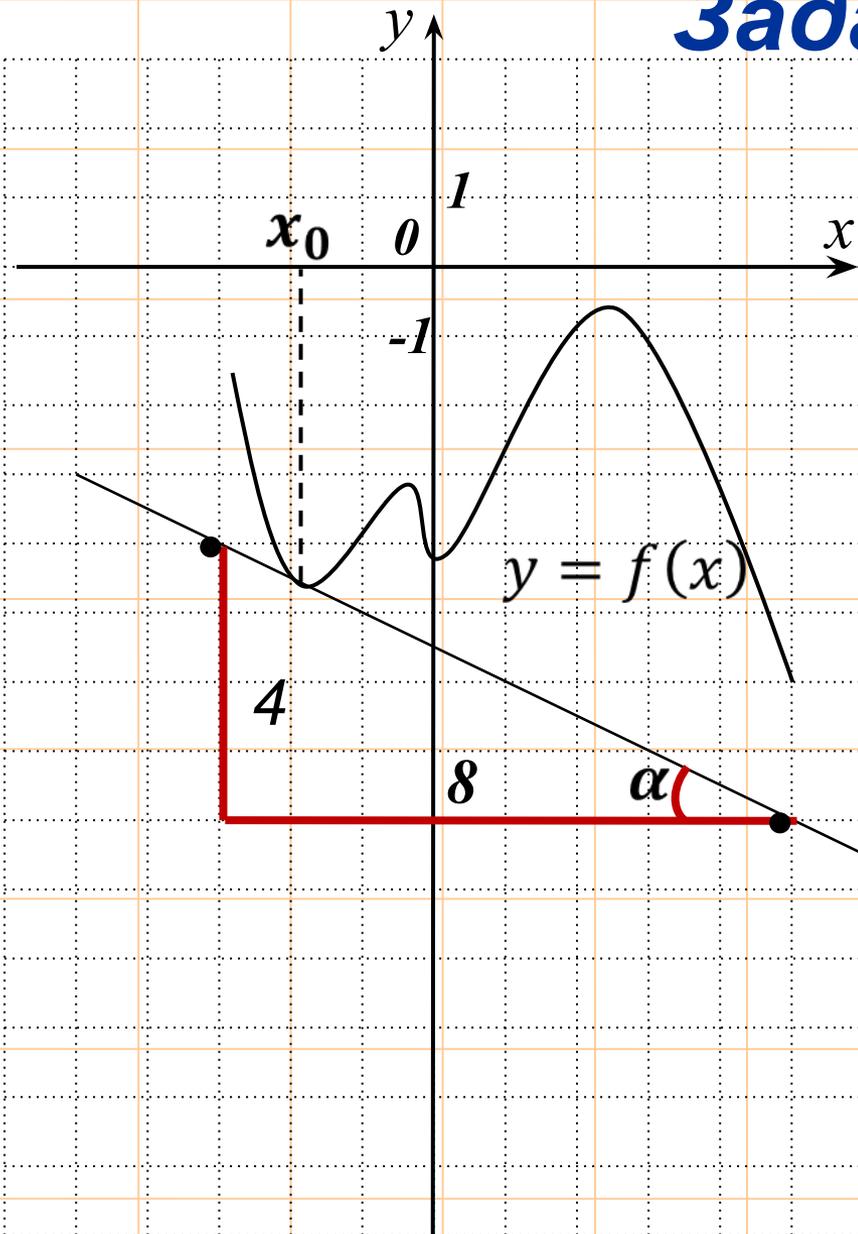
На рисунке изображены график функции  $y = f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .

**Ответ:**  
*0,8*

## Задача №10

На рисунке изображены график функции  $y = f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ .

Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .

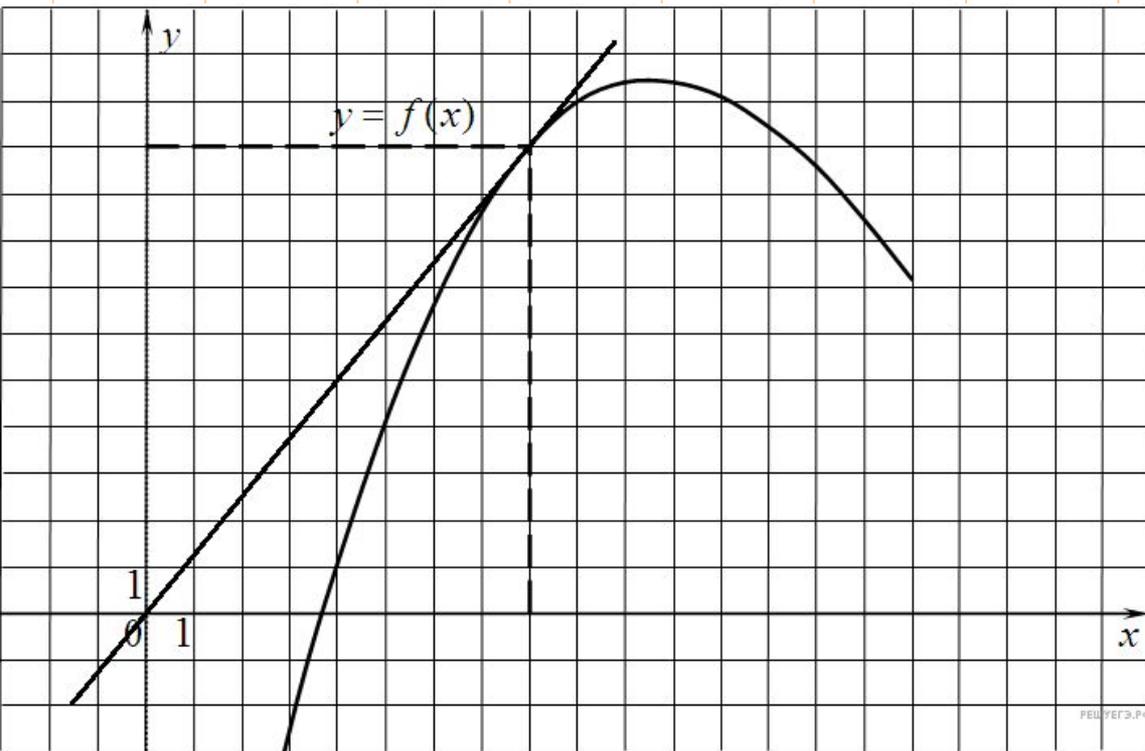


**Ответ:**

**$-0,5$**

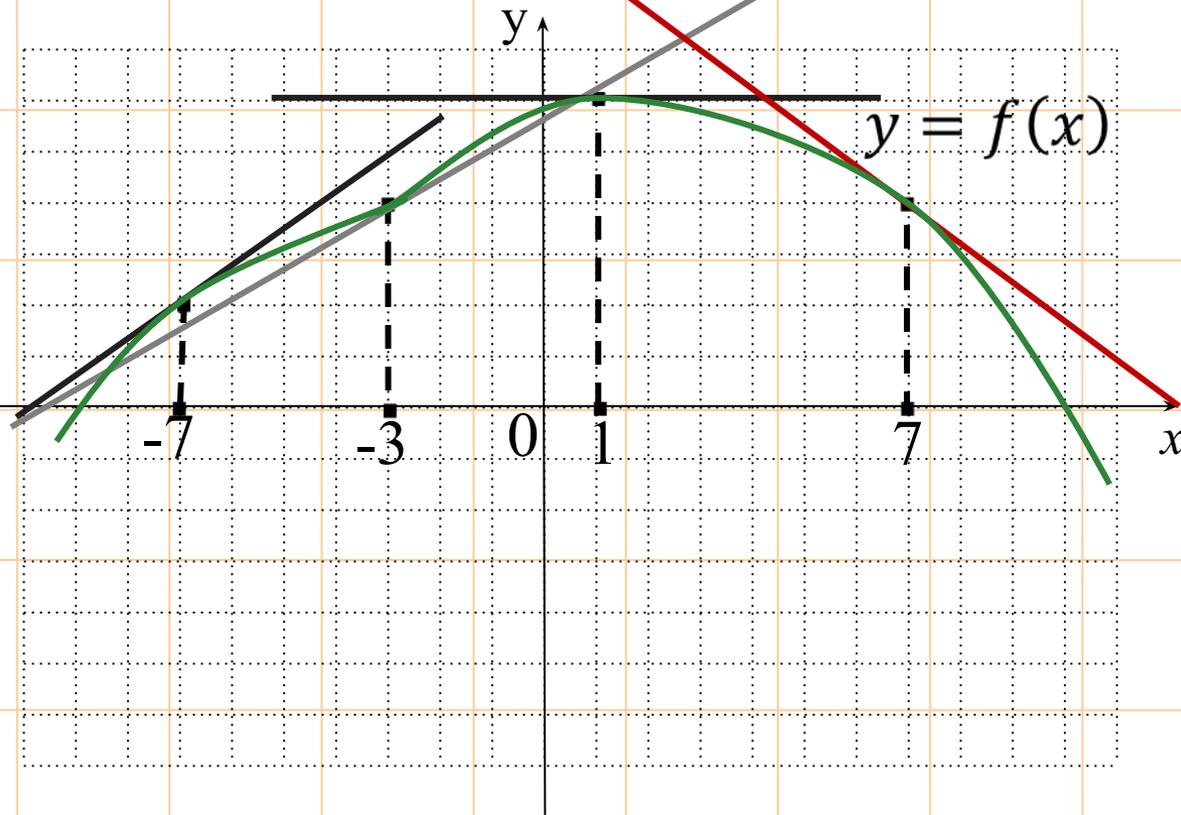
## Задача №11

На рисунке изображен график функции  $y=f(x)$ . Прямая, проходящая через начало координат, касается графика этой функции в точке с абсциссой 8. Найдите  $f'(8)$ .



**Ответ:**

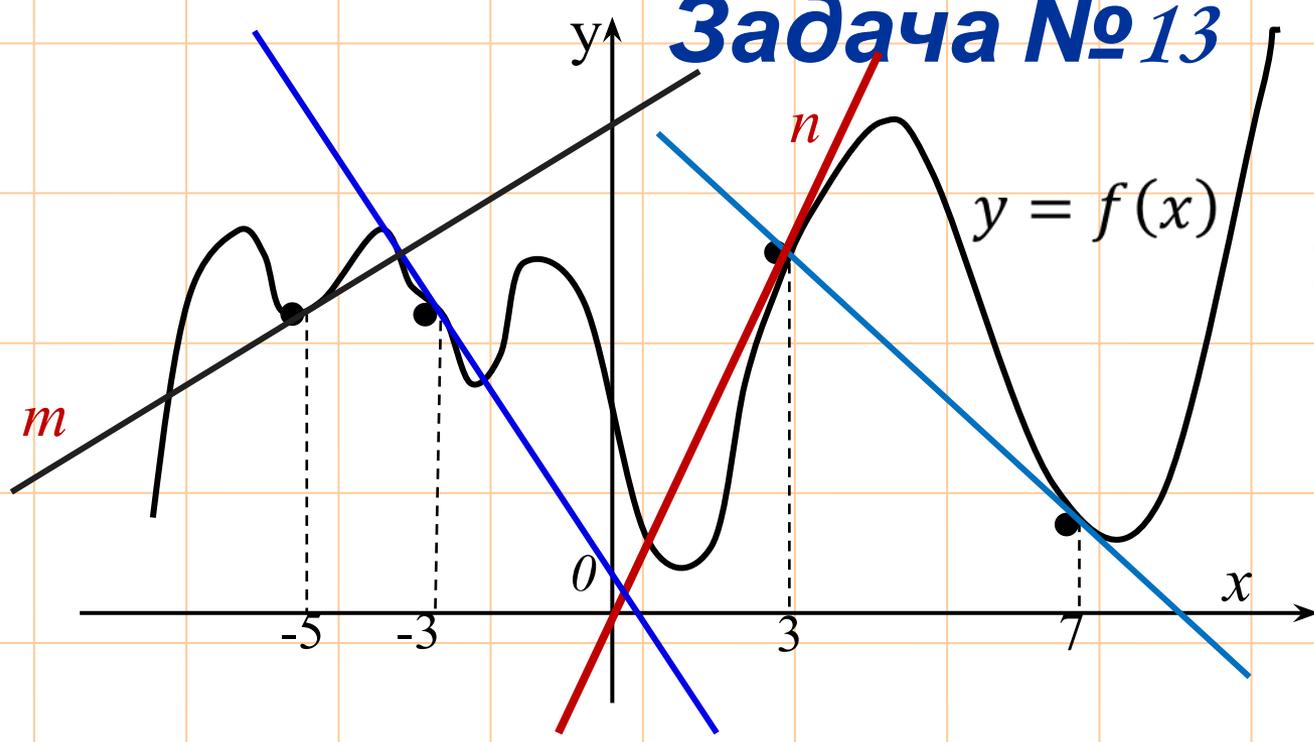
## Задача №12



На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$  и отмечены точки  $-7, -3, 1, 7$ . В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.

**Ответ: 7**

# Задача №13



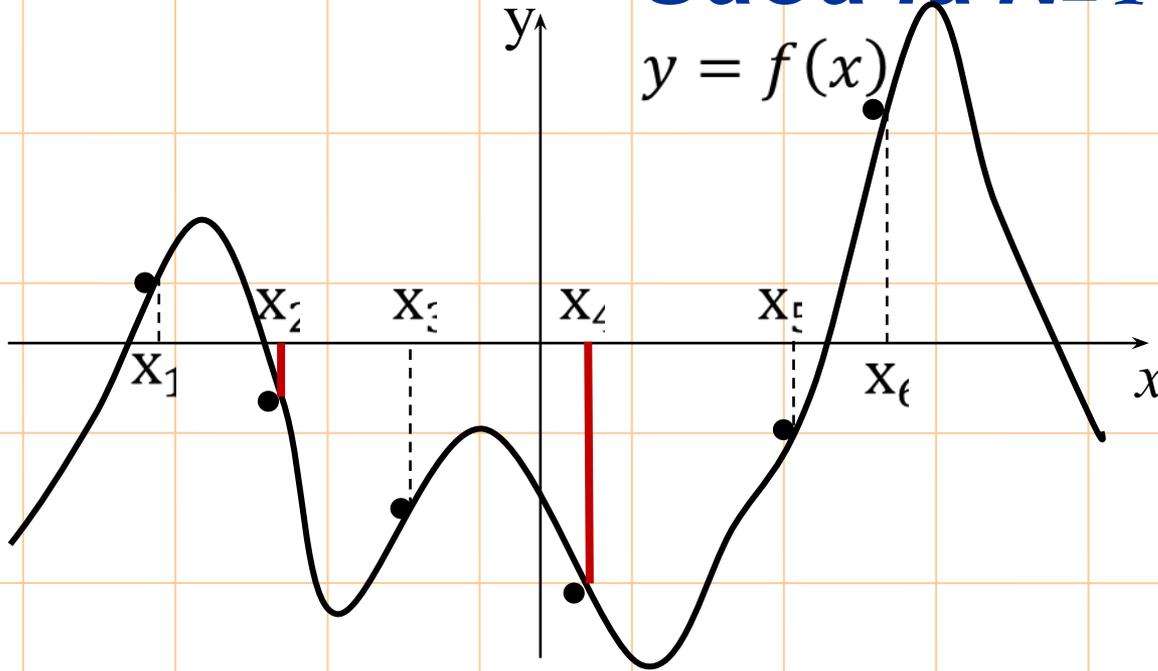
На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$  и отмечены точки  $-5$ ,  $-3$ ,  $3$ ,  $7$ . В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку

**Ответ:**

***Применение  
производной  
к исследованию  
функций***

## Задача №14

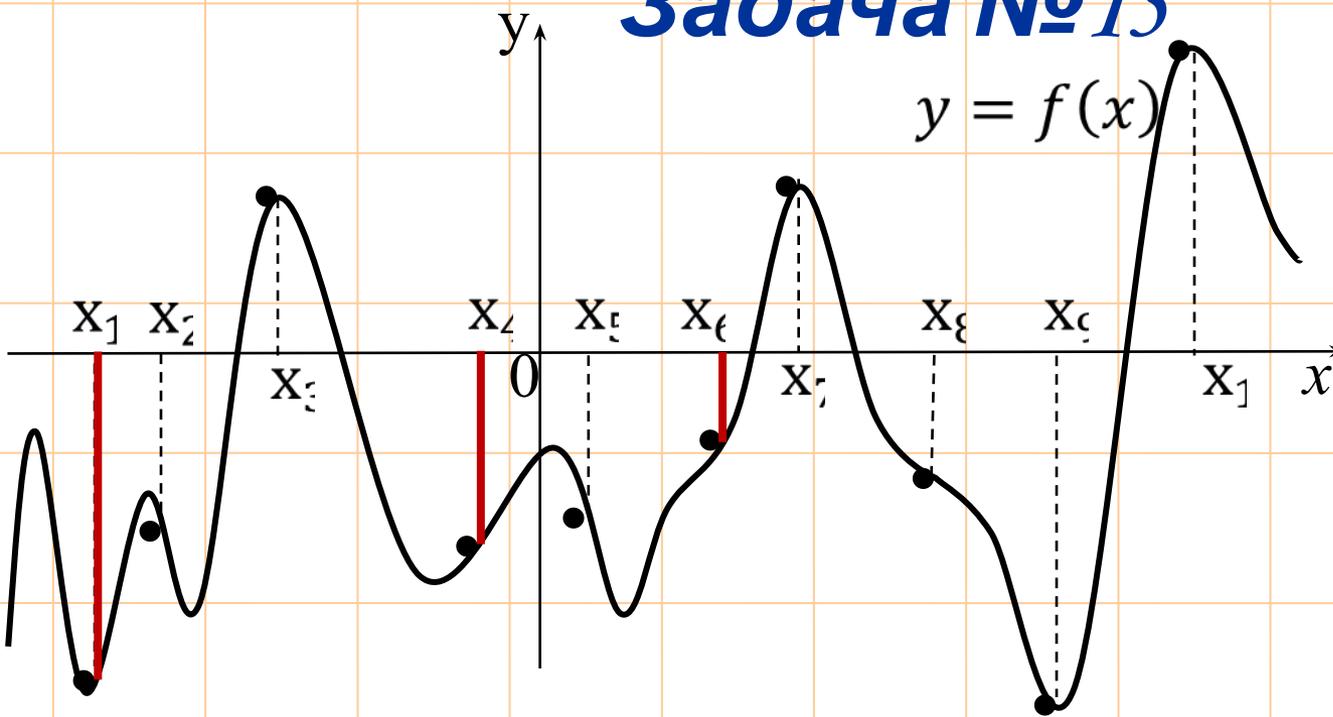
$$y = f(x)$$



На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ . Найдите среди точек  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$  и  $X_6$  те точки, в которых производная функции  $f(x)$  отрицательна. В ответ запишите количество найденных точек.

**Ответ: 2**

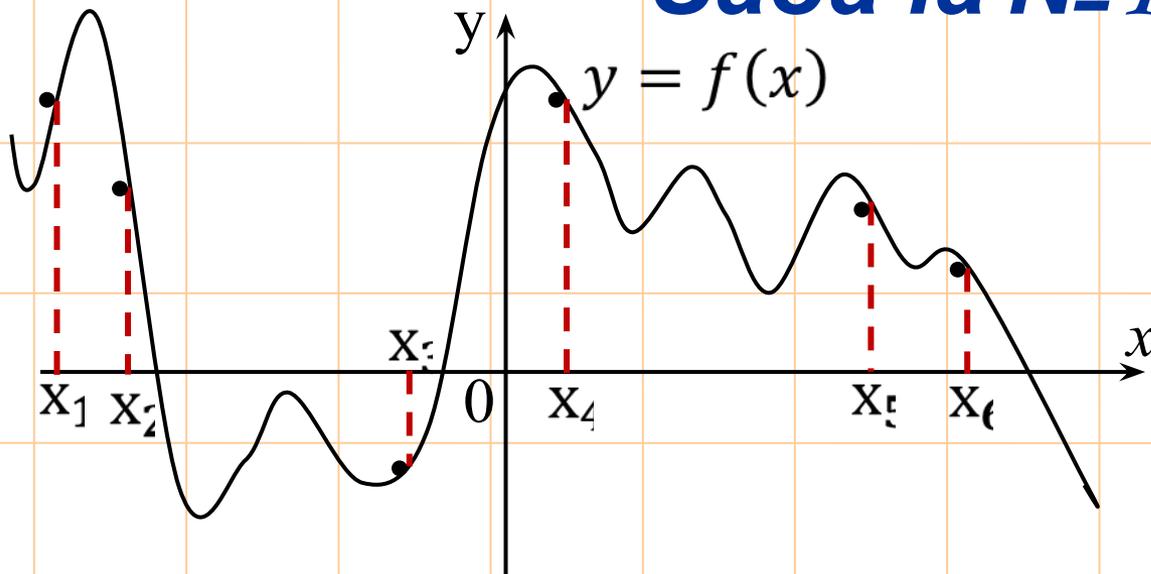
## Задача №15



На рисунке изображены график функции  $y = f(x)$  и десять точек на оси абсцисс:  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10}$ . В скольких из этих точек производная  $f'(x)$  функции  $f(x)$  положительна.

**Ответ: 3**

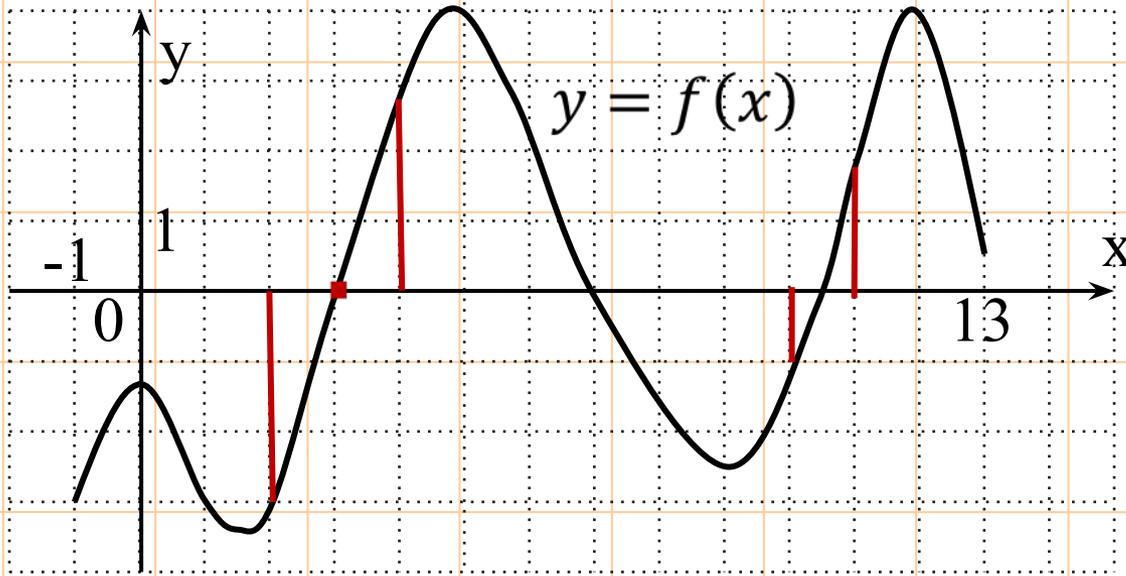
## Задача №16



На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ . Найдите среди точек  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$  и  $X_6$  те точки, в которых производная функции  $f(x)$  отрицательна. В ответ запишите количество найденных точек.

**Ответ: 4.**

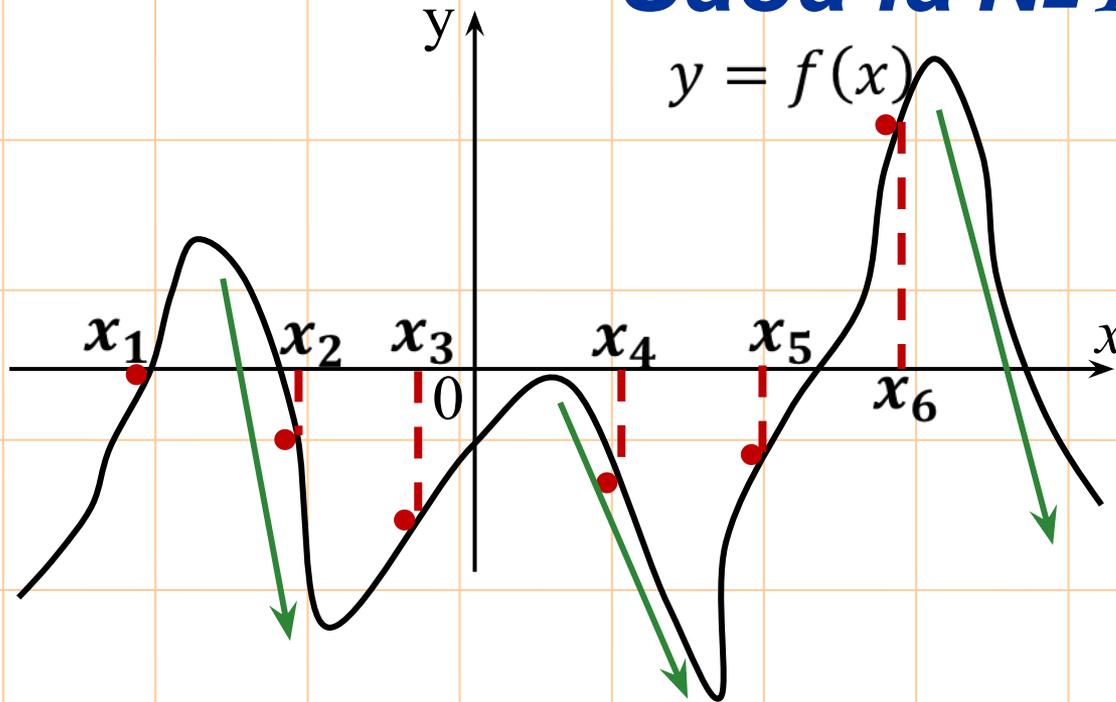
## Задача №17



На рисунке изображён график функции  $y=f(x)$ , определённой на интервале  $(-1;13)$ . Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.

**Ответ: 5**

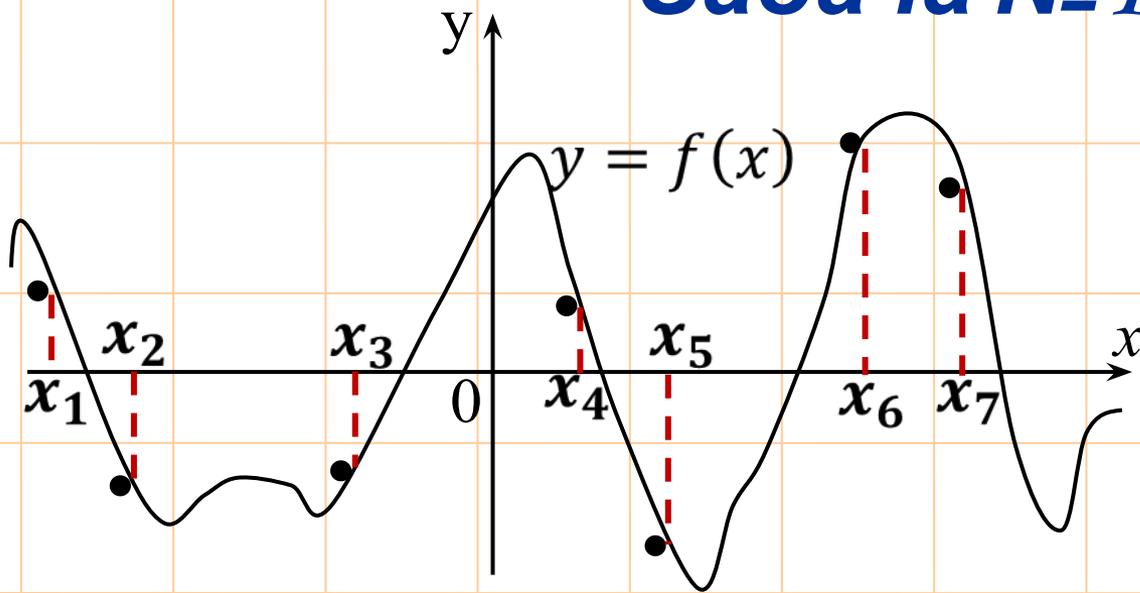
## Задача №18



На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ . Найдите среди точек  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  и  $x_6$  те точки, в которых производная функции  $f(x)$  отрицательна. В ответ запишите количество найденных точек.

**Ответ: 2.**

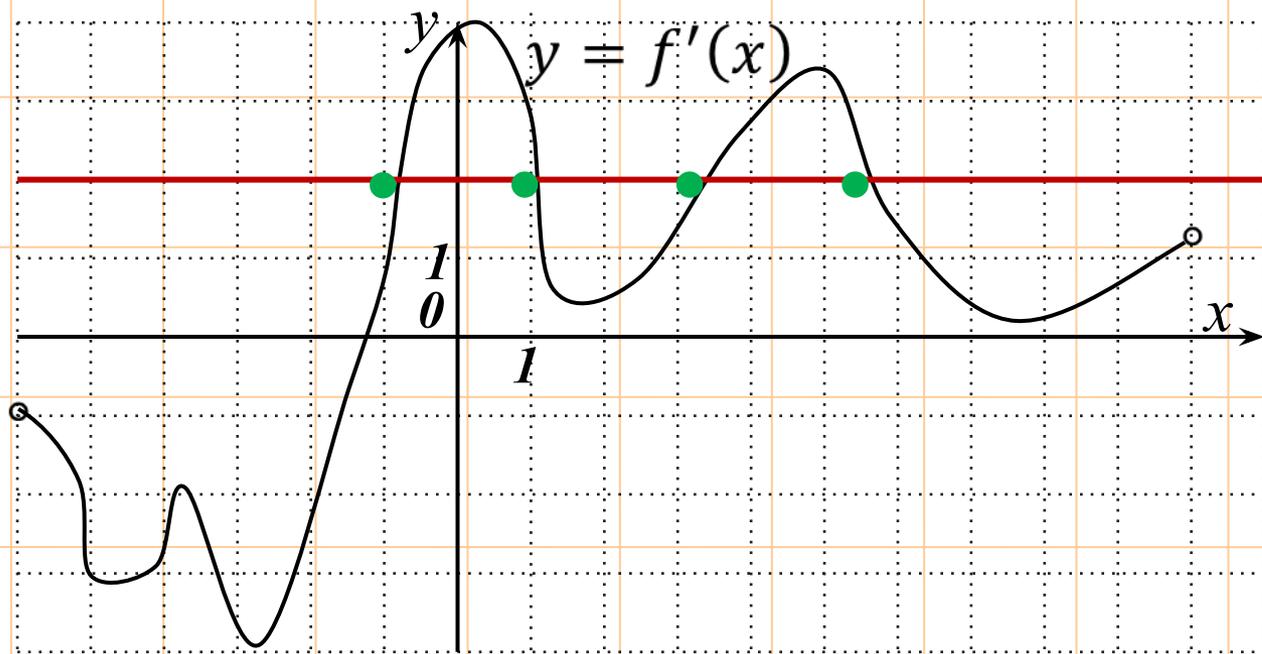
## Задача №19



На рисунке изображён график функции  $y=f(x)$ , определённой на интервале  $(-1;13)$ . Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.

**Ответ: 2.**

## Задача №20



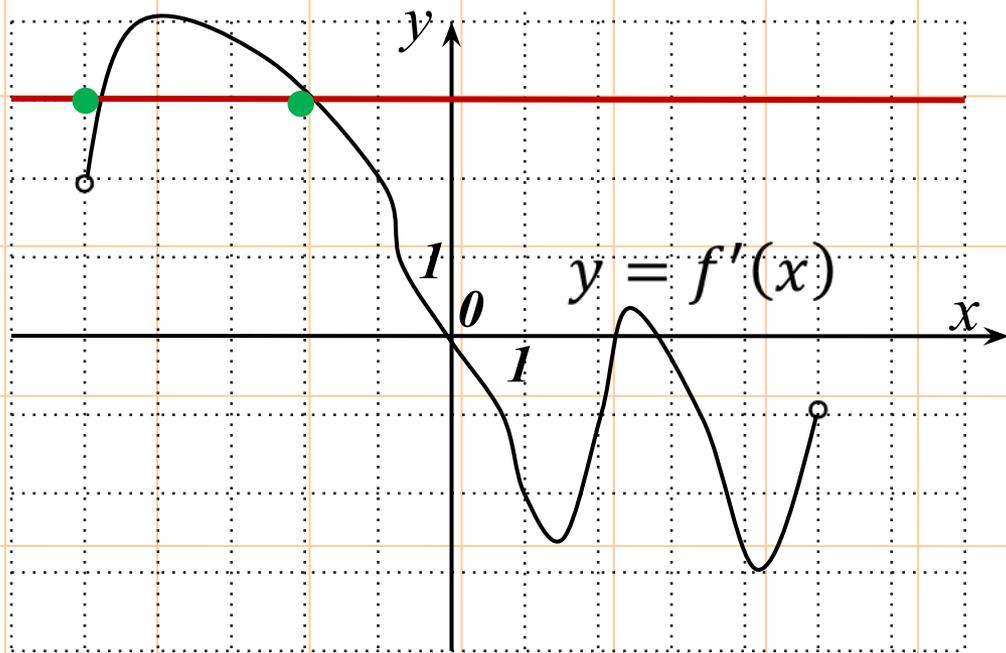
На рисунке изображён график производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-6; 10)$ . Найдите количество точек, в которых касательная к

графику функции  $f(x)$  параллельна прямой  $y = 2x + 5$  или совпадает с ней.

**Ответ**

4

## Задача №21

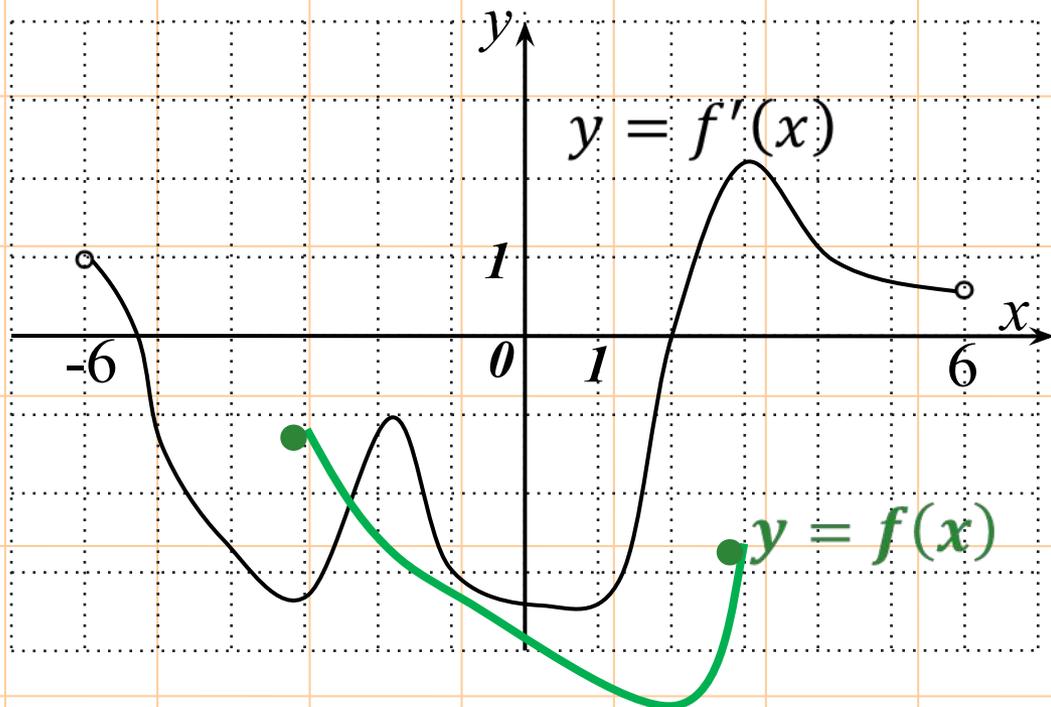


На рисунке изображён график производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-5; 5)$ . Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции  $f(x)$  параллельна прямой  $y = 3x - 8$  или совпадает с ней.

**Ответ**

**: 2.**

## Задача №22

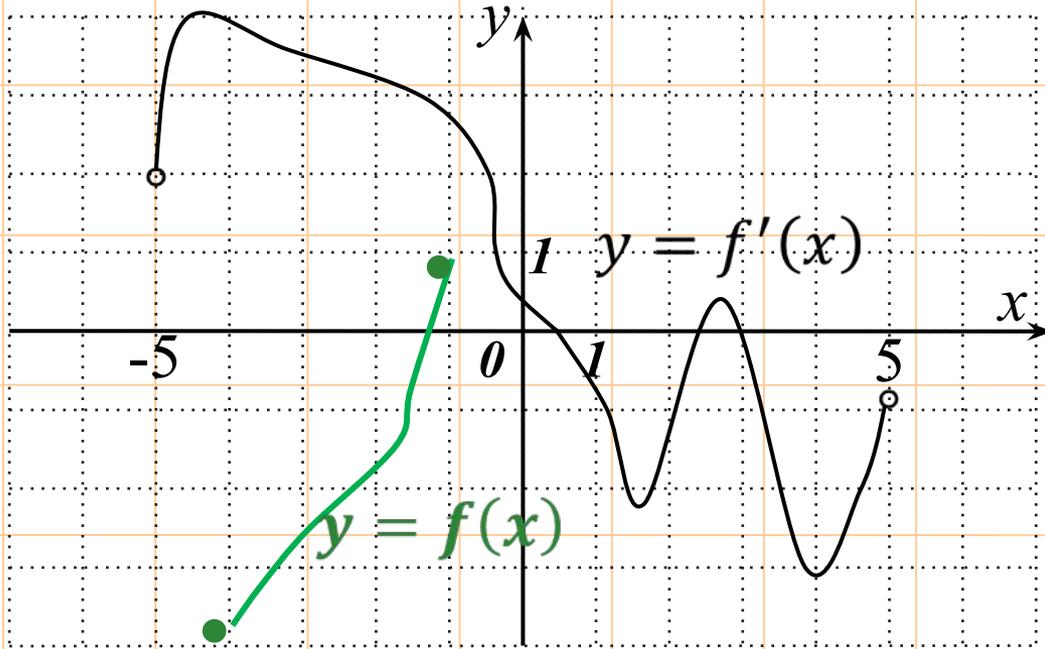


На рисунке изображён график производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-6; 6)$ . В какой точке отрезка  $[-3; 3]$   $f(x)$  принимает наименьшее значение?

**Ответ**

**: 2.**

## Задача №23



На рисунке изображён график производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-5; 5)$ . В какой точке отрезка  $[-4; -1]$   $f(x)$  принимает наибольшее значение?

**Ответ:**

**-1.**

## Задача №24

Прямая  $y = 6x + 9$  параллельна касательной к графику функции  $y = x^2 + 7x - 6$ . Найдите абсциссу точки касания.

**Ответ:**

## Задача №25

**-0,5.**

Прямая  $y = -4x - 8$  является касательной к графику функции  $y = x^3 - 3x^2 - x - 9$ . Найдите абсциссу точки касания.

**Ответ**

**: 1.**

## Задача №26

Прямая  $y = 5x + 14$  является касательной к графику функции  $y = x^3 - 4x^2 + 9x + 14$ . Найдите абсциссу точки касания.

**Ответ**

**: 2.**

## Задача №27

Прямая  $y = 3x + 4$  является касательной к графику функции  $y = x^3 + 4x^2 + 3x + 4$ . Найдите ординату точки касания.

**Решение.** Значение производной функции в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, т. е.  $y' = 3$

$$y' = 3x^2 + 8x + 3$$
$$3x^2 + 8x + 3 = 3$$
$$x(3x+8) = 0. \text{ Отсюда } x = 0 \text{ или } x = 8/3$$

Уравнению  $x^3 + 4x^2 + 3x + 4 = 3x + 4$  удовлетворяет только  $x = 0$ . Значит, абсцисса точки касания равна 0, а тогда ее ордината равна 4.

**Ответ**

**: 4.**

## Задача №28

Прямая  $y = 3x + 1$  является касательной к графику функции  $ax^2 + 2x + 3$ . Найдите  $a$ .

**Решение.**

По смыслу задачи  $a \neq 0$ , а значит, график заданной функции – парабола. Касательная к параболе (а также и к гиперболе) имеет с ней единственную общую точку. Поэтому необходимо и достаточно, чтобы уравнение  $ax^2 + 2x + 3 = 3x + 1$  имело единственно решение.

Получим  $ax^2 + 2x + 3 - 3x - 1$

$$ax^2 - x + 2 = 0$$

$$D = 1 - 8a$$

Для этого дискриминант должен быть равен нулю, откуда

$$1 - 8a = 0$$

$$a = 1/8 = 0,125$$

**Ответ:**  
**0,125.**

## Задача №29

Прямая  $y = 3x + 4$  является касательной к графику функции  $3x^2 - 3x + c$ . Найдите  $c$ .

**Решение.**

График заданной функции – парабола. Касательная к параболе имеет с ней единственную общую точку. Поэтому необходимо и достаточно, чтобы уравнение  $3x^2 - 3x + c = 3x + 4$  имело единственно решение. Получим

$$3x^2 - 6x + c - 4 = 0$$

$$D = 36 - 12(c - 4) = 36 - 12c + 48 = 84 - 12c$$

Для этого дискриминант должен быть равен нулю, откуда

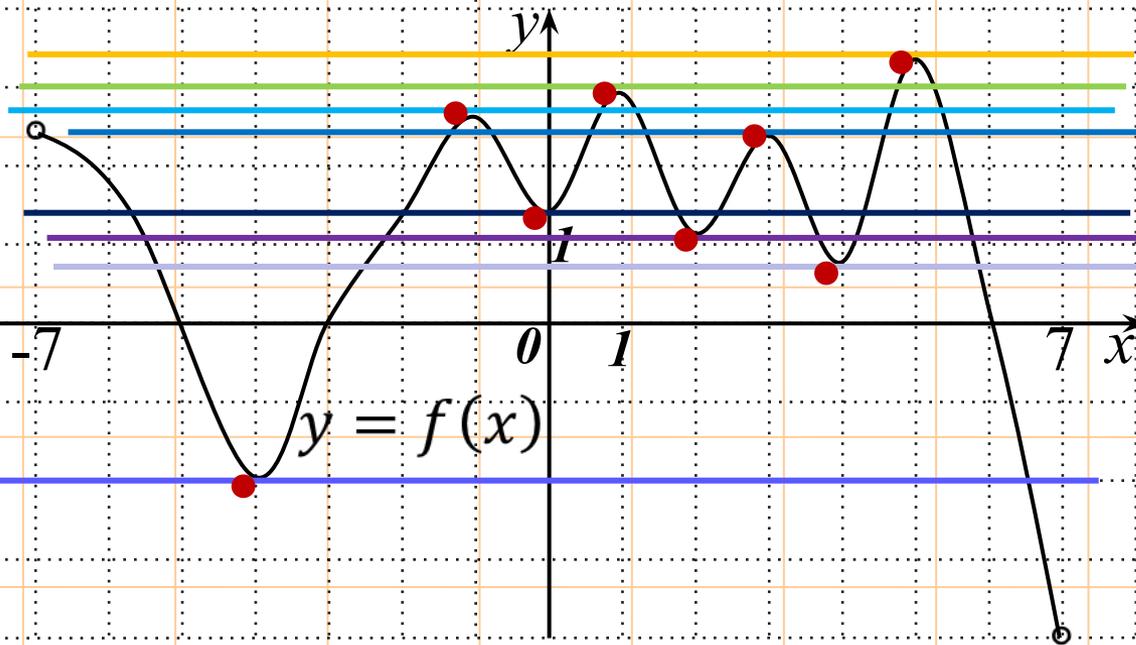
$$84 - 12c = 0$$

$$c = 84/12 = 7$$

**Ответ**

**: 7.**

## Задача №30

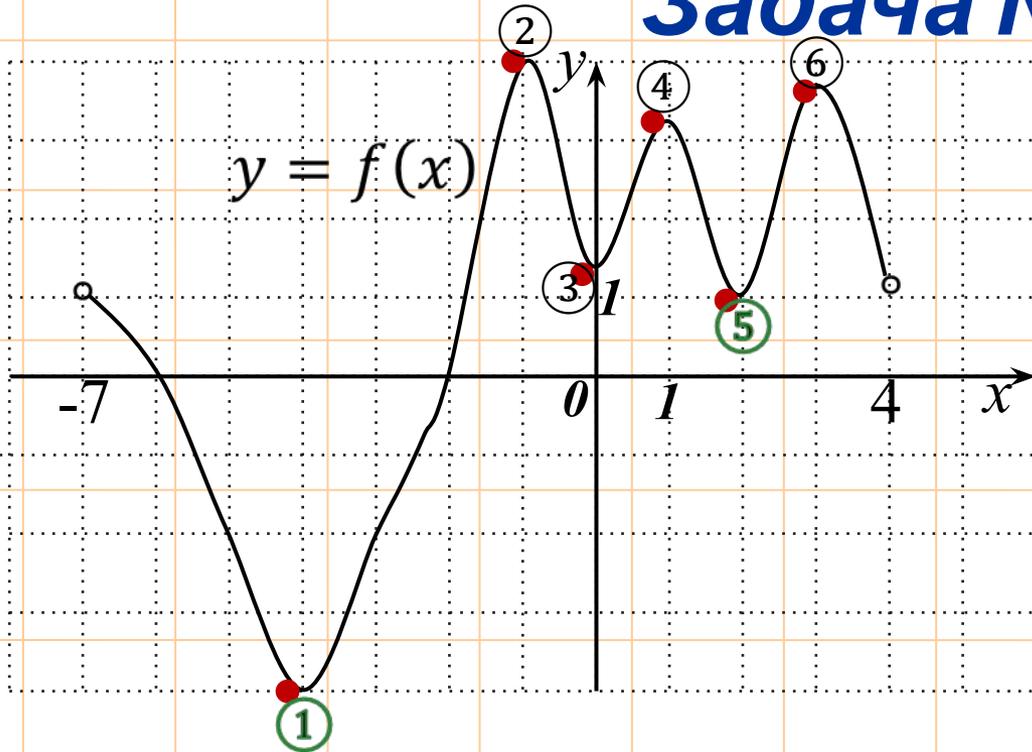


На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ , определённой на интервале  $(-7; 7)$ . Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой  $y = 13$ .

**Ответ**

**: 8.**

## Задача №31

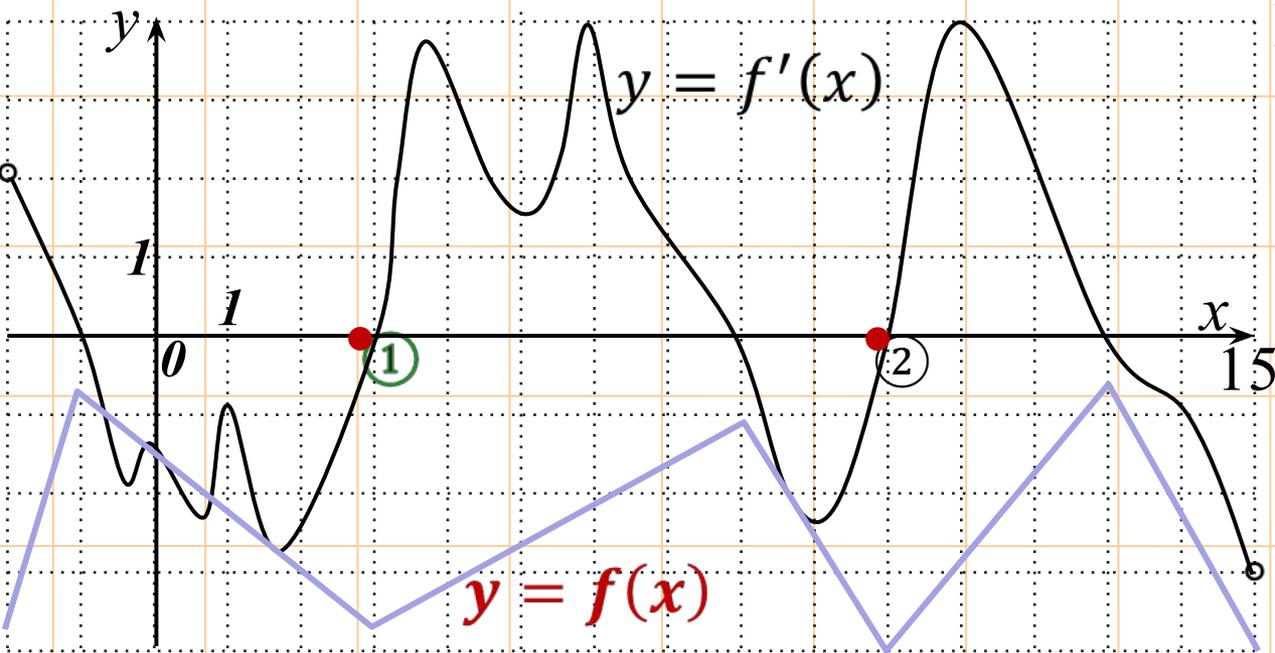


На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ , определённой на интервале  $(-7; 4)$ . Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой  $y = -17$ .

**Ответ**

**: 6.**

## Задача №32

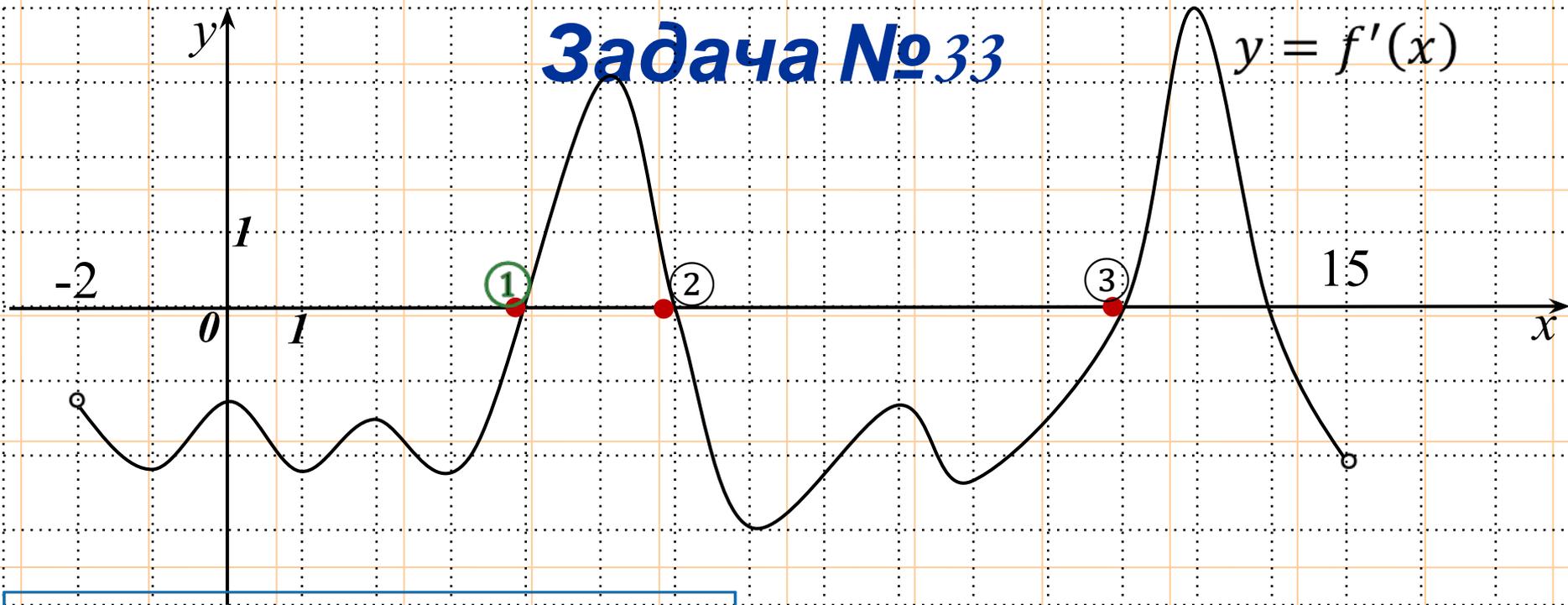


На рисунке изображён график производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-2; 15)$ . Найдите количество точек минимума функции  $f(x)$  на отрезке  $[0; 12]$ .

**Ответ**

**: 2.**

## Задача №33



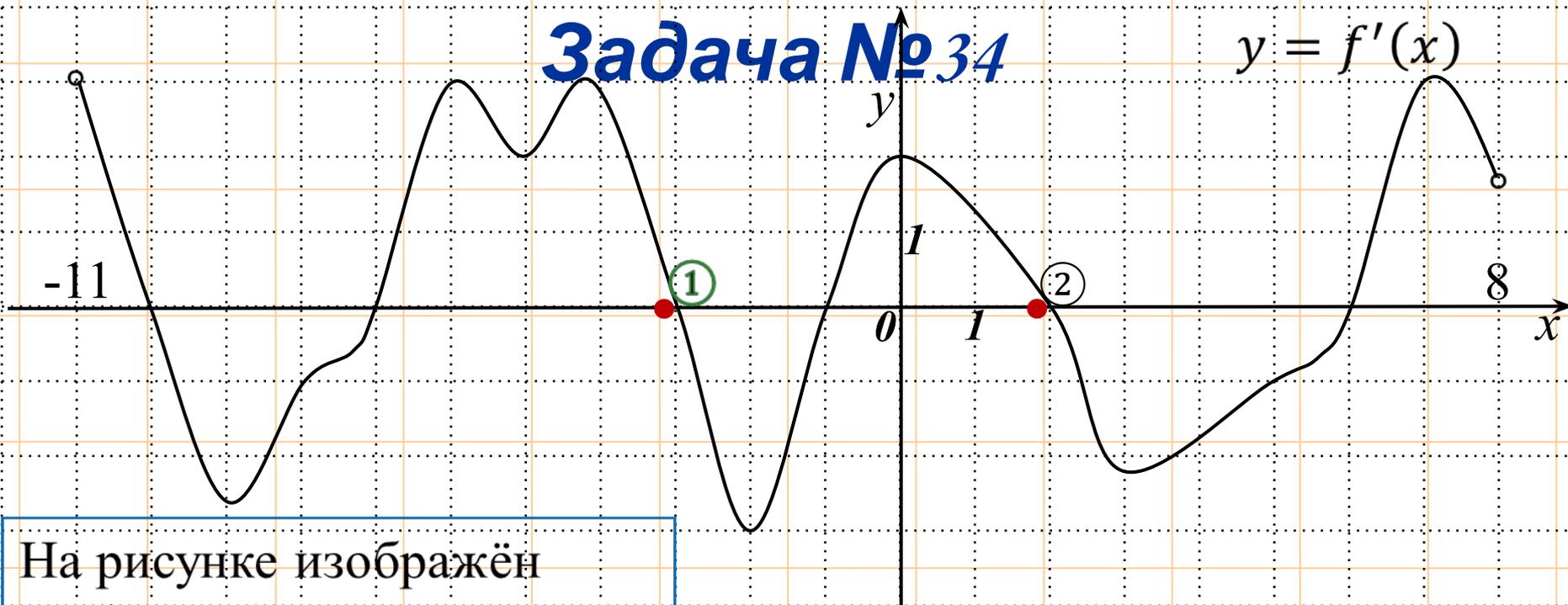
На рисунке изображён график производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-2; 15)$ . Найдите количество точек экстремума функции  $f(x)$  на отрезке  $[3; 13]$ .

**Ответ**

• 2

## Задача №34

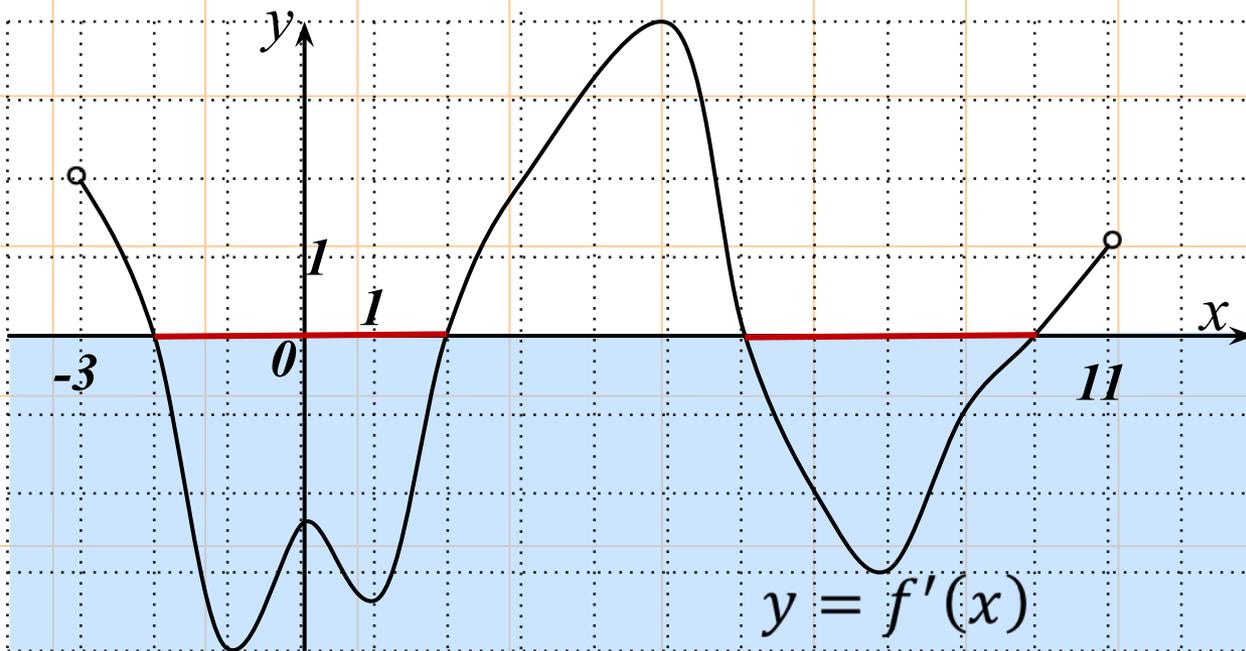
$$y = f'(x)$$



На рисунке изображён график производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-11; 8)$ . Найдите количество точек максимума функции  $f(x)$  на отрезке  $[-8; 7]$ .

**Ответ**

## Задача №35

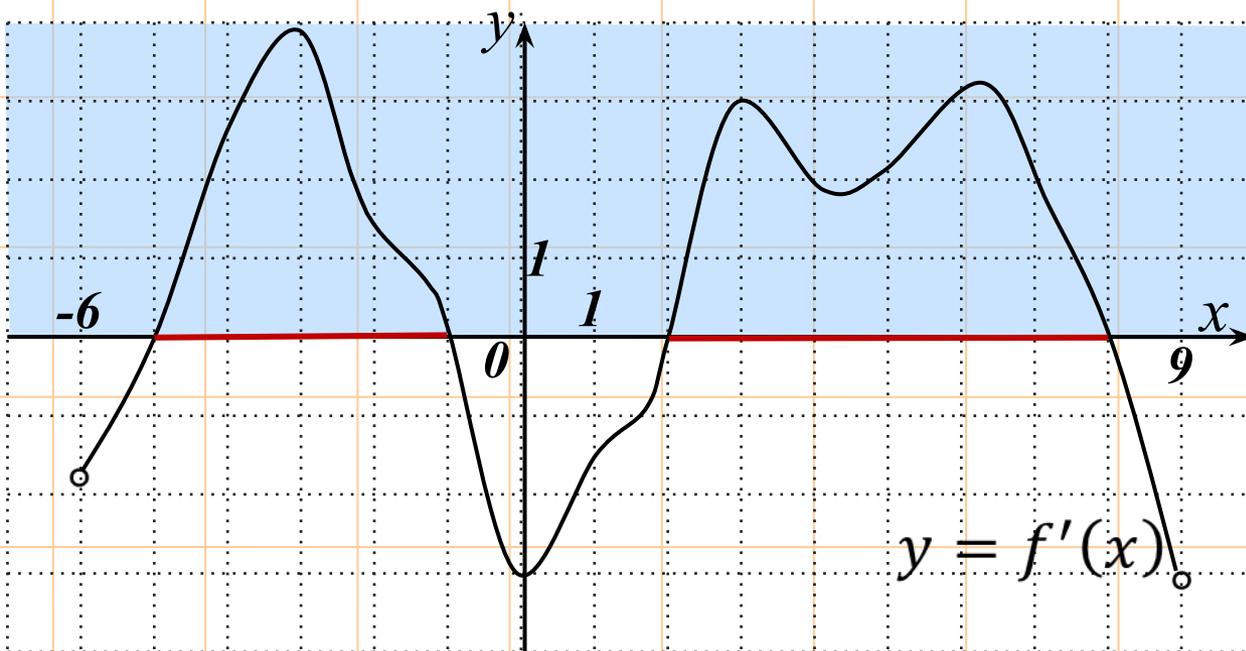


На рисунке изображён график производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-3; 11)$ . Найдите промежутки убывания функции  $f(x)$ . В ответе укажите длину наибольшего из них.

**Ответ**

**: 4.**

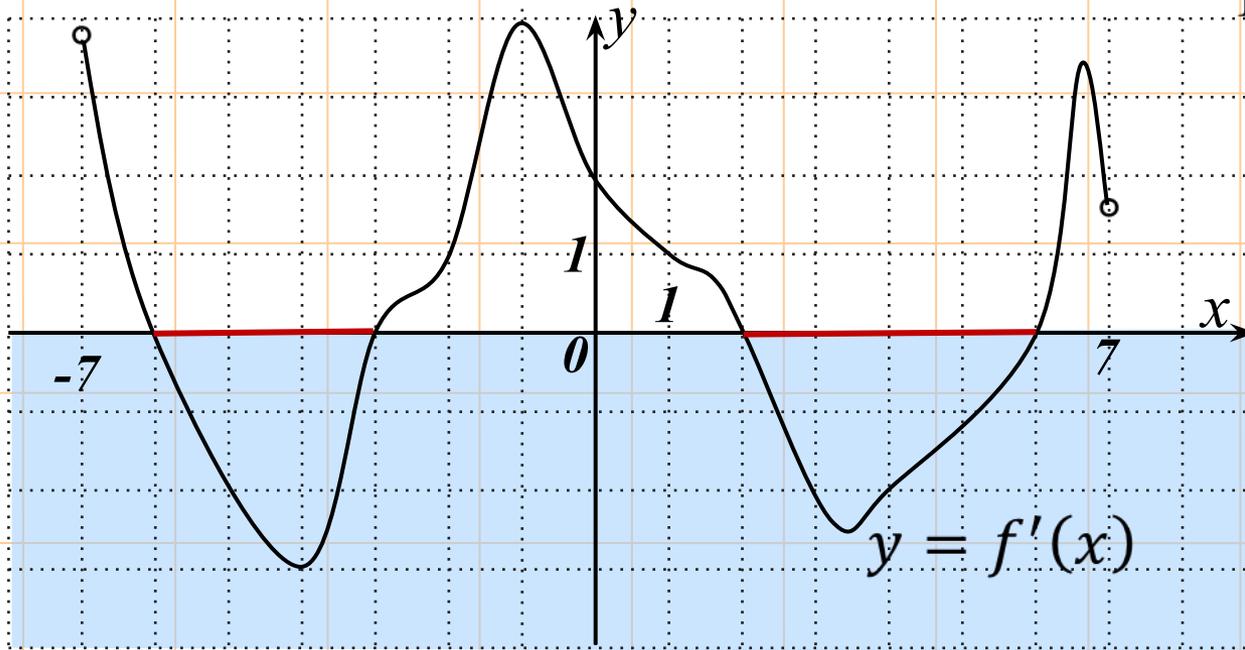
## Задача №36



На рисунке изображен график производной функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-6; 9)$ . Найдите промежутки возрастания функции  $f(x)$ . В ответе укажите длину наибольшего из них.

**Ответ**

## Задача №37

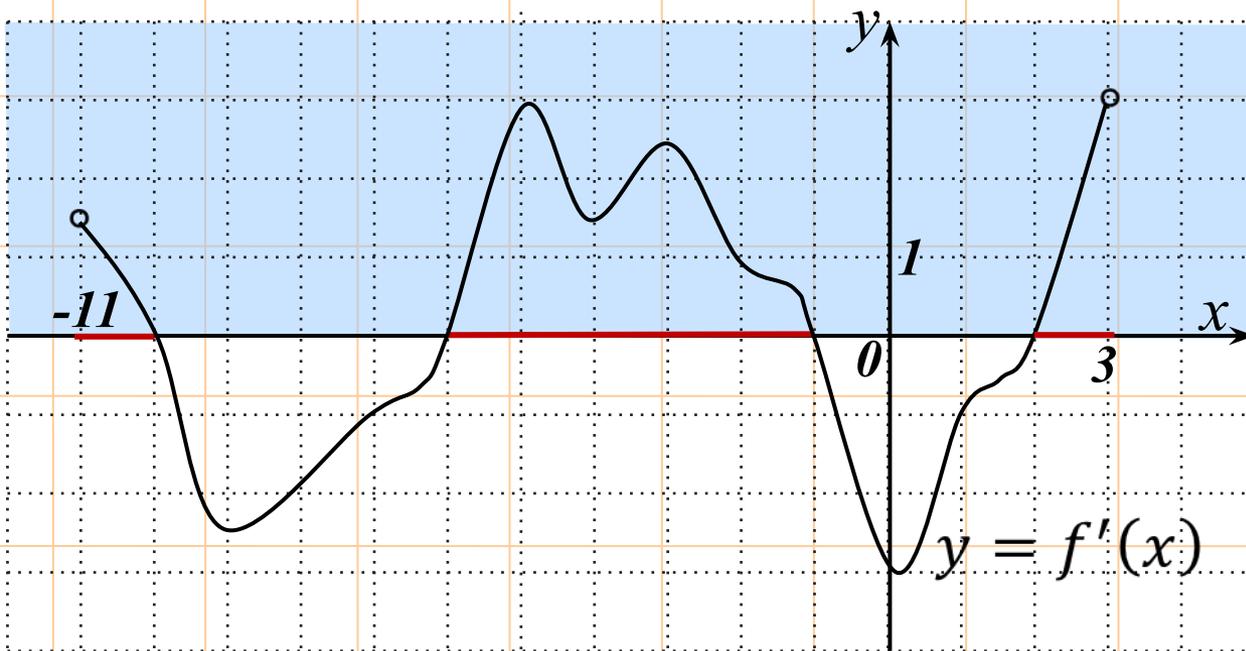


На рисунке изображён график производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-7; 7)$ . Найдите промежутки убывания функции  $f(x)$ . В ответе укажите длину наибольшего из них.

**Ответ**

**: 4.**

## Задача №38

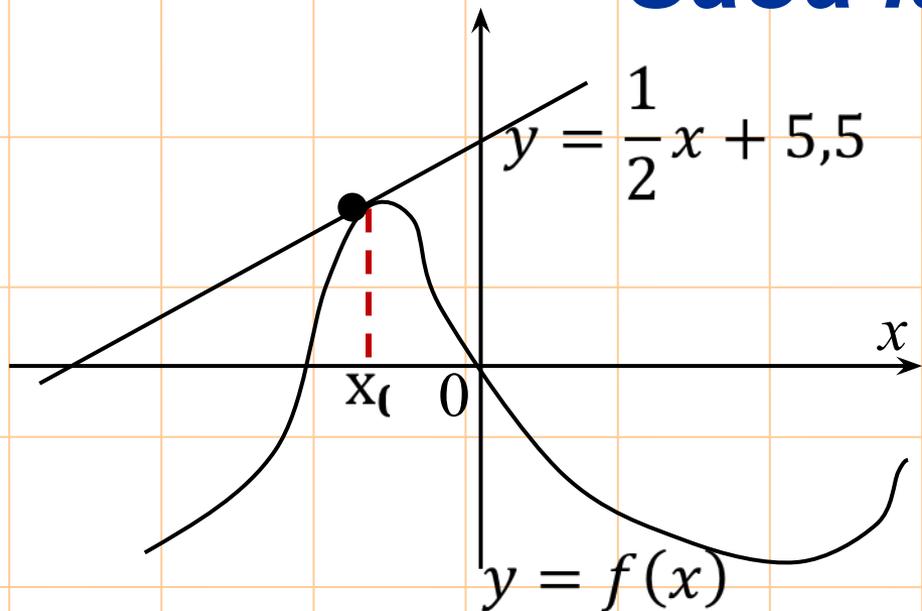


На рисунке изображён график производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-11; 3)$ . Найдите промежутки возрастания функции  $f(x)$ . В ответе укажите длину наибольшего из них.

**Ответ**

**: 5.**

## Задача №39

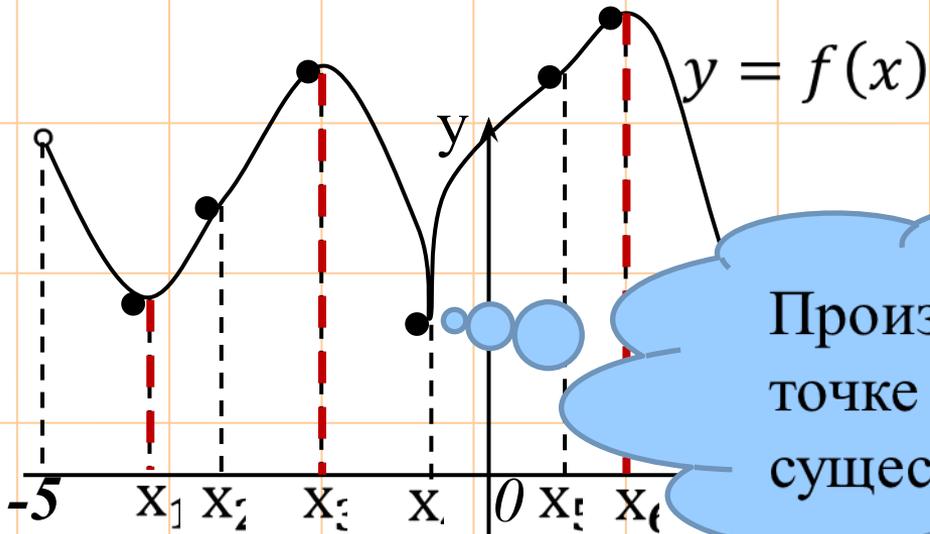


На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$  и касательная к этому графику, проведённая в точке  $x_0$ . Уравнение касательной показано на рисунке. Найдите значение производной функции  $y = 4f(x) + 7$  в точке  $x_0$ .

**Ответ**

**: 2.**

# Задача №40



Функция  $y = f(x)$  определена на интервале  $(-5; 6)$ . На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ . Среди точек  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$  те, в которых

Производная в точке  $x_4$  не существует

производная функции равна нулю. В ответ запишите количество найденных точек.

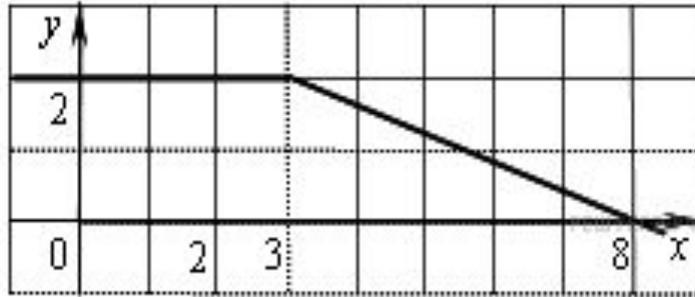
**Ответ**

**: 4.**

# *Первообразная Интеграл*

# Задача

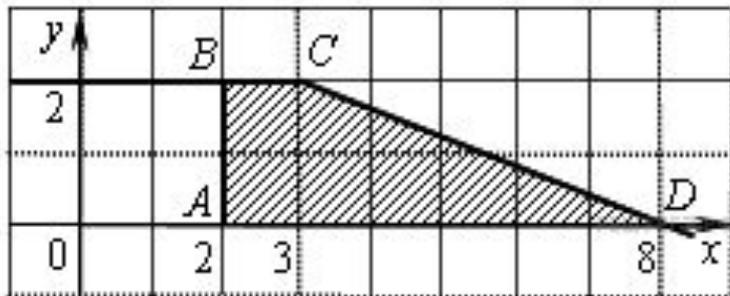
№ 42



На рисунке изображён график некоторой функции  $y = f(x)$  (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите  $F(8) - F(2)$ , где  $F(x)$  - одна из первообразных функции  $f(x)$ .

**Решение.**

Разность значений первообразной в точках 8 и 2 равна площади выделенной на рисунке трапеции  $ABCD$ . Поэтому



$$F(b) - F(a) = \frac{1+6}{2} \cdot 2 = 7.$$

**Ответ:**

7.