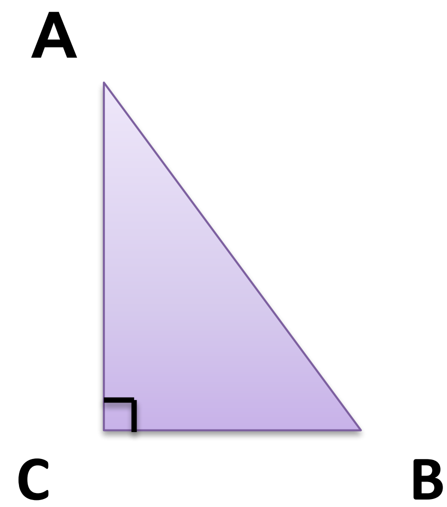
Планиметрия

Задание 6

Решение прямоугольного треугольника

В треугольнике ABC угол C равен 90 градусов, AC=4,8, sinA=$\frac{7}{25}$. Найдите AB.



ТЕОРИЯ

Решение:

sinA= $\frac{CB}{AB} = \frac{7}{25}$

cosA= $\frac{AC}{AB}$

$$cos^2\alpha = 1 - sin^2\alpha = 1 - \frac{49}{625} = \frac{576}{625}$$

$$cos\alpha = \frac{24}{25}$$

$$AB = AC: cosA = 4{,}8 \cdot \frac{25}{24} = 5$$

Ответ: 5

Теория

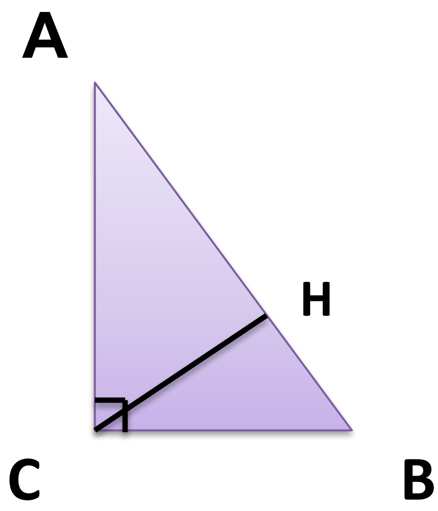
- *Синусом* острого угла, прямоугольного треугольника называют отношение противолежащего катета к гипотенузе.

- *Косинусом* острого угла, прямоугольного треугольника называют отношение прилежащего катета к гипотенузе.

- *Основное тригонометрическое тождество:*

$$cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$$

В треугольнике АВС угол С равен 90 градусов, СН – высота, АВ = 13, $tgA = \frac{1}{5}$. Найдите AH.



ТЕОРИЯ

<u>Решение:</u>

1) Рассмотрим треугольник АСН

$$cosA = \frac{AH}{AC}$$

АН = АС cosA

2) Рассмотрим треугольник АВС

$$cosA = \frac{AC}{AB}$$

АС = АВ cosA

3) $AH = ABcos^2A = AB\ \frac{1}{1+tg^2A} = 13 \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{25}} = 12{,}5$

Ответ: 12,5

Теория

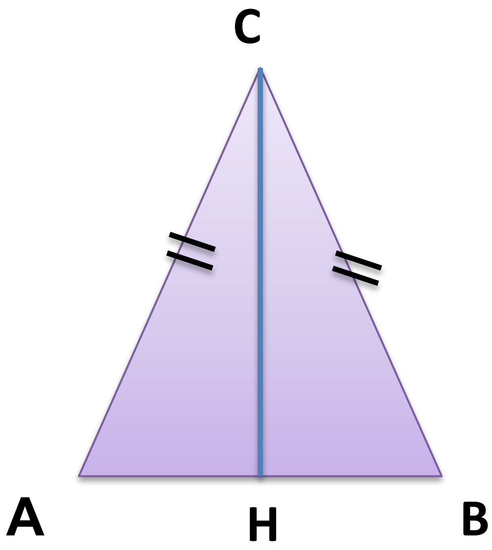
- *Тангенсом* *острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.*
- $1 + tg^2\alpha \quad = \frac{1}{cos^2\alpha}$

Решение равнобедренного треугольника

В треугольнике ABC AC = BC = 5, $sinA = \frac{7}{25}$.

Найдите AB.

ТЕОРИЯ



Решение:

$sinA = \frac{CH}{AC}$

$\cos A = \frac{AH}{AC} = \frac{24}{25}$

AB=2AH

AH=4,8 из отношения $\frac{24}{25} = \frac{AH}{5}$

AB=9,6

Ответ: 9,6

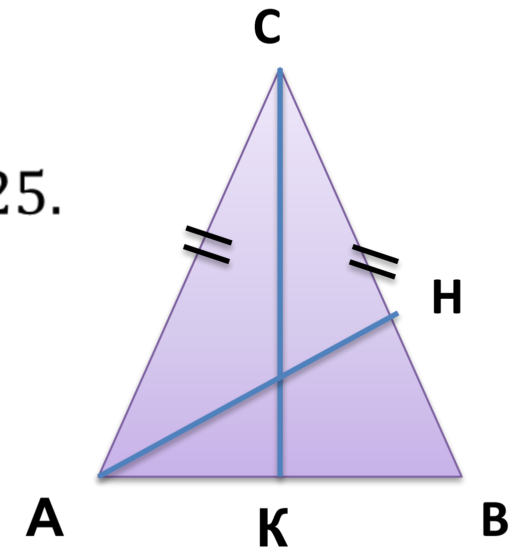
Теория

- *Равнобедренный треугольник* – *это треугольник, у которого боковые стороны равны.*
- *Свойства равнобедренного треугольника:*

  Углы при основании равны

  Биссектриса (делит угол пополам), проведенная к основанию, является и медианой (делит сторону пополам) и высотой (перпендикуляр).

В треугольнике ABC AC = BC = $4\sqrt{15}$, $cosBAC = 0{,}25$. Найдите высоту AH.



$$sinB = \frac{AH}{AB}$$

$$AH = ABsinB$$

$$AH = AB\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$AH = \frac{2\sqrt{15}\cdot\sqrt{15}}{4}$$

По основному тригонометрическому тождеству

$$sinB = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$AB = 2\mathrm{AK}$$

$$cosA = \frac{AK}{AC}$$

$$AK = \sqrt{15}$$
$$AB = 2\sqrt{15}$$

Ответ: 7,5

Треугольники общего вида

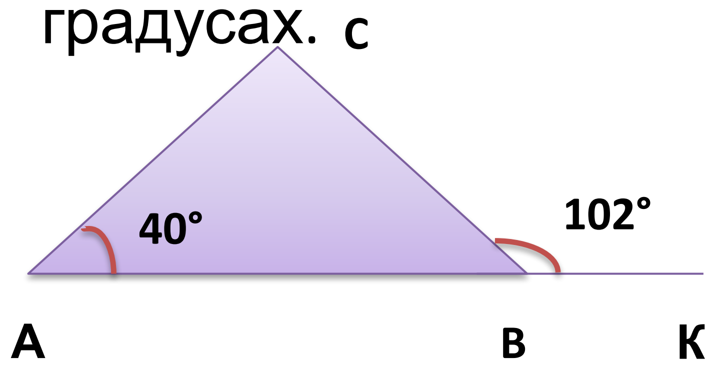
ТЕОРИ
Я

- Сумма углов в треугольнике равна 180°
- $S = \frac{1}{2}ah$ *(половина произведения основания, на высоту)*
- $S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$ *(половина произведения сторон, на синус угла между ними)*
- Средняя линия треугольника – это отрезок, соединяющий середины двух его сторон. Она параллельна третьей стороне, а ее длина равна половине длины этой стороны.
- Внешний угол треугольника равен сумме несмежных с ним углов этого треугольника.
- Напротив большего угла лежит большая сторона и наоборот.

	Равенство треугольников	Подобие треугольников
1 признак	**По двум сторонам и углу между ними**	**По двум углам**
2 признак	**По стороне и прилежащим к ней углам**	**По пропорциональным сторонам и углу между ними**
3 признак	**По трем сторонам (равенство)**	**По трем сторонам (пропорциональность)**
		Площади подобных фигур относятся как квадрат коэффициента подобия.
		Периметры подобных фигур относятся как коэффициент подобия

Примеры заданий

В треугольнике ABC угол A равен 40°, внешний угол при вершине B равен 102°. Найдите угол C. Ответ дайте в градусах.



Решение 1:

Так как внешний угол треугольника равен сумме углов не смежных с ним, то

$$\angle C = 102° - 40° = 62°$$

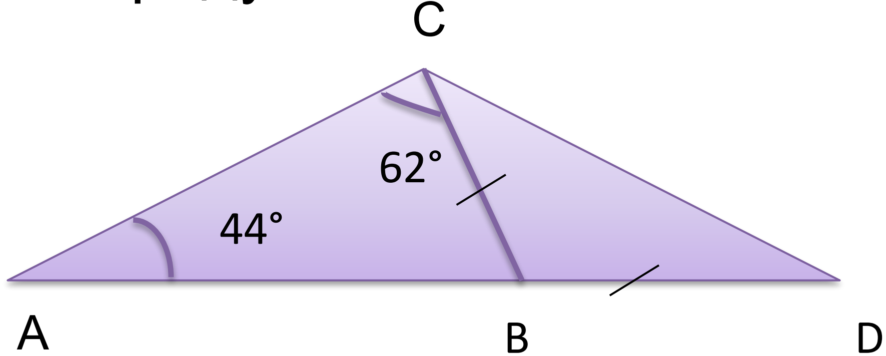
Решение 2:

1) $\angle CBK$ и $\angle CBA$ смежные, а значит в сумме дают 180°.

$\angle CBA = 180° - 102° = 78°$

2) Сумма углов в треугольнике равна 180°. Значит $\angle C = 180° - (78° + 40°) = 62°$

В треугольнике ABC угол A равен 44°, а угол C равен 62°. На продолжении стороны AB за точку B отложен отрезок BD, равный стороне BC. Найдите угол D треугольника BCD. Ответ дайте в градусах.



Решение:

1) ∠CBD – внешний угол для треугольника ABC, значит ∠CBD=44°+62°=106°

2) По свойству равнобедренного треугольника ∠C=∠D, треугольника CBD, а сумма углов в треугольнике равно 180° Следовательно ∠D=(180°-106°)/2=37°

Ответ: 37°

Параллелограмм

ТЕОРИ
Я

- Параллелограмм – это четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.
- Частными случаями пар-ма являются прямоугольник, квадрат и ромб.
- Свойства параллелограмма:

Противоположные стороны попарно равны

Сумма углов равна 360°

Противоположные углы равны

Сумма углов прилегающих к одной стороне равна 180°

- $S = ah, S = ab\ sin\alpha$

Параллелограмм

ТЕОРИ
Я

- Прямоугольник – это параллелограмм, у которого все углы прямые.
- Ромб – это параллелограмм, у которого все стороны равны.
- Квадрат – это параллелограмм, у которого все углы прямые и стороны равны.

Или

- Квадрат – это ромб, у которого все углы прямые.

Параллелограмм

**ТЕОРИ
Я**

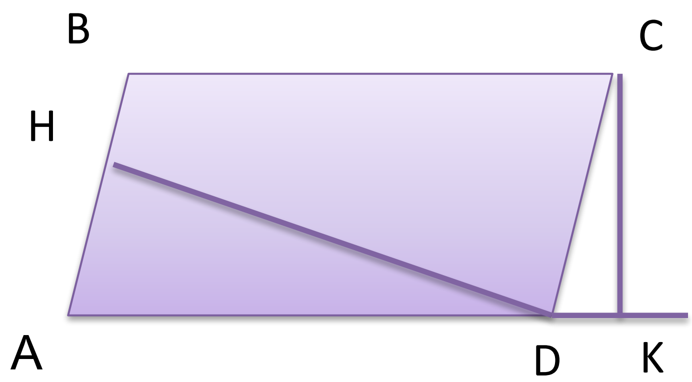
S пар-ма

S прям-ка

S квадрата

S ромба

Примеры заданий



В параллелограмме ABCD AB = 3, AD = 21,
sinA = $\frac{6}{7}$.
Найдите большую высоту параллелогра

<u>Решение:</u>

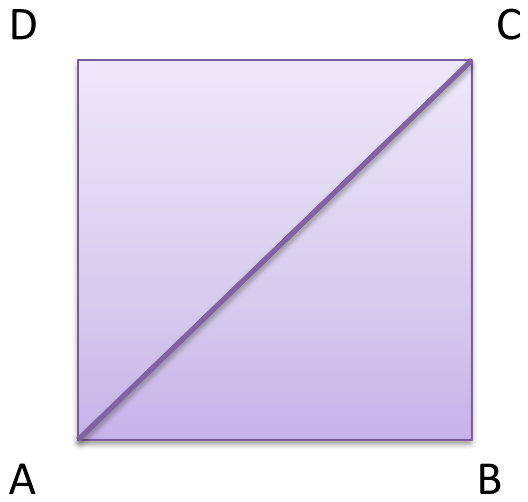
Большая высота проведена к меньшей стороне. Значит находим высоту HD.
Рассмотрим треугольник AHD.

$$sinA = \frac{HD}{AD}$$

$$\frac{6}{7} = \frac{HD}{21}$$

HD=18

Ответ: HD = 18



Найдите площадь квадрата, если его диагональ равна 1.

Решение:

Площадь квадрата равна половине произведения его диагоналей.

Ответ: 0,5

Решение:

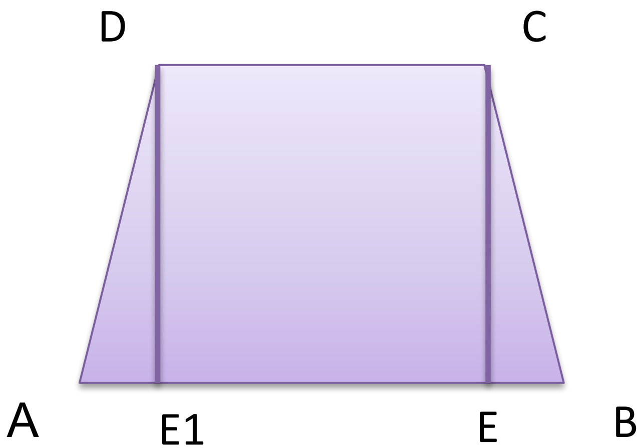
AB = CB = x
По теореме Пифагора: $x^2 = 1$, отсюда x = 0,5

Трапеция

ТЕОРИ
Я

- Трапеция – это четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие нет.
- Виды: прямоугольная, равнобедренная
- У равнобедренной трапеции, углы при основании равны.
- Сумма углов в трапеции равно 360°.
- Средняя линия трапеции – это отрезок соединяющий середины боковых сторон. Она параллельна основаниям и равна их полусумме.
- $S = \frac{a+b}{2}h$

Примеры заданий



Основания равнобедренной трапеции равны 43 и 73. Косинус острого угла трапеции равен $\frac{5}{7}$. Найдите боковую сторону.

<u>Решение</u>:

1) $cosB = \frac{EB}{CB}$ (по определению косинуса)

2) EB = (AB-DC)/2 = 15 (так как трапеция равнобедренная)

3) $\frac{5}{7} = \frac{15}{CB}; CB = 21$

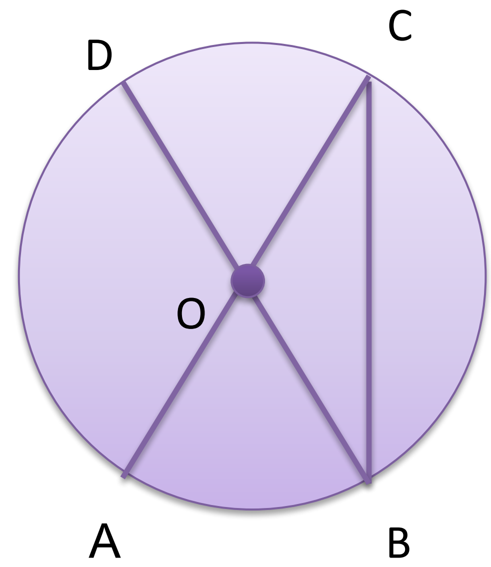
Ответ: 21

Центральные и вписанные углы

ТЕОРИ
Я

- Центральный угол – это угол, вершина которого лежит в центре окружности.
- Центральный угол <u>равен дуге</u>, на которую он опирается.
- Вписанный угол – это угол, вершина которого лежит на окружности.
- Вписанный угол <u>равен половине дуги</u>, на которую он опирается.
- Вписанные угла, <u>опирающиеся на одну и туже дугу, равны.</u>
- Теорема об угле, опирающемся на диаметр окружности:
  Угол, опирающийся на диаметр окружности – **прямой**.

Пример заданий



В окружности с центром в точке O отрезки AC и BD – диаметры. Вписанный угол ACB равен 38°. Найдите центральный угол AOD. Ответ дайте в градусах.

Решение:

1) $\angle ACB$ и $\angle AOB$ – опираются на одну и туже дугу AB.

2) Дуга AB равна 38°*2= 76°, так как $\angle ACB$ – вписанный угол, значит $\angle AOB = 76°$, так как он центральный угол и равен дуге, на которую он опирается.

3) $\angle AOB$ и $\angle AOD$ – смежные, а значит в сумме дают 180°.

$\angle AOD = 180°\text{-}76° = 104°$

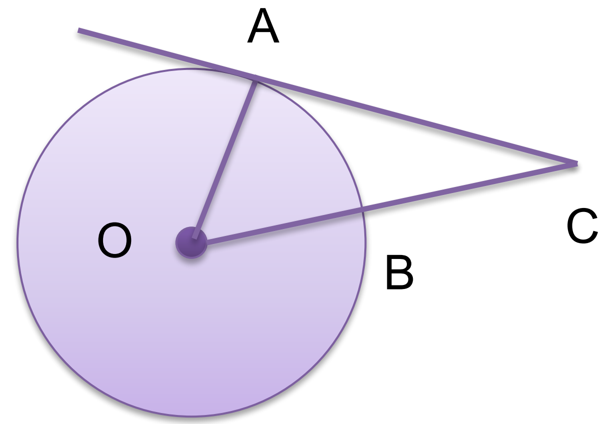
Ответ: 104°

Касательная, хорда, секущая

ТЕОРИЯ

- Касательная – это прямая, имеющая с окружностью одну общую точку.
- Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и цент окружности.
- Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.
- Секущая – прямая, пересекающая окружность в двух точках.
- Хорда – это отрезок соединяющий точки на окружности (хорда проходящая через центр окружности называется диаметром)

Пример заданий



Найдите угол ACO, если его сторона CA касается окружности, дуга AB - равна 64°. Ответ дайте в градусах.

<u>Решение</u>:

1) Дуга AB равна 64°, значит $\angle AOC = 64°$, так как является центральным углом.
2) Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания, значит треугольник AOC – прямоугольный, сумма острых углов равна 90°.
3) $\angle ACO = 90°$-$64°$=$26°$

Ответ: 26

Вписанные окружности

ТЕОРИ Я

- Если все стороны многоугольника касаются окружности, то окружность называется вписанной в многоугольник, а многоугольник- описанным около этой окружности.
- Площадь любого многоугольника можно найти как произведение полупериметра на радиус вписанной окружности.
- В равнобедренном треугольнике вписанная окружность точкой касания делит основание пополам.
- В равностороннем треугольнике радиус вписанной окружности равен трети высоты данного треугольника.
- В прямоугольном треугольнике радиус вписанной окружности равен:

$$r = \frac{a+b-c}{2}, \text{где } a \text{ и } b \ - \text{катеты, с} - \text{гипотенуза}$$

- В трапеции и ромбе центр вписанной окружности лежит в точке пересечения биссектрис внутренних углов, радиус вписанной окружности равен половине высоты.
- В квадрате радиус вписанной окружности равен половине стороны.

Описанные окружности

ТЕОРИЯ

- Если все вершины многоугольника лежат на окружности, то окружность называется описанной около многоугольника, а многоугольник- вписанным в эту окружность.
- В равностороннем треугольнике радиус описанной окружности равен две трети высоты данного треугольника.
- В прямоугольном треугольнике центр описанной окружности лежит на середине гипотенузы и радиус равен половине гипотенузы.
- Радиус описанной окружности можно найти как:

$$R = \frac{a}{sina} = \frac{b}{sinb} = \frac{c}{sinc}$$

- Около четырехугольника не всегда можно описать окружность. Если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180°, то только тогда около него можно описать окружность.
- В прямоугольнике и квадрате центр описанной окружности лежит в точке пересечения диагоналей, а радиус описанной окружности равен половине диагонали.

Спасибо за внимание!