

ОСНОВЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется углом в 1 радиан.

$$1 \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi} \right)^\circ, \quad \alpha \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi} \cdot \alpha \right)^\circ,$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад}, \quad \alpha^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha \text{ рад}.$$

Угол в α радиан стягивает дуга, длина которой l вычисляется по формуле $l = \alpha R$, где R — радиус окружности.

1. ■ Найти радианную меру угла, выраженного в градусах:

1) 6° ; 2) 162° .

Решение.

1) Если 180° соответствует π рад, то 6° соответствует x рад,

следовательно, $x = \frac{\pi \cdot 6^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{30}$ рад.

2) 180° — π рад, 162° — x рад,

$$x = \frac{162^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = \frac{9\pi}{10} = 0,9\pi \text{ рад.}$$

Ответ. 1) $\frac{\pi}{30}$; 2) $0,9\pi$.

2. Найти градусную меру угла, выраженного в радианах:

1) $0,4\pi$; 2) $1,75\pi$; 3) 3 рад (с точностью до $0,01^\circ$).

Решение.

1) Если π рад соответствует 180° , то $0,4\pi$ рад соответствует x° , следовательно, $x = \frac{0,4\pi \cdot 180^\circ}{\pi} = 0,4 \cdot 180^\circ = 72^\circ$.

2) π — 180° , $1,75\pi$ — x° ,

$$x^\circ = \frac{1,75\pi \cdot 180^\circ}{\pi} = 1,75 \cdot 180^\circ = 315^\circ.$$

3) π рад — 180° , 3 рад — x° ,

$$x^\circ = \frac{3 \cdot 180^\circ}{\pi} \approx 171,97^\circ.$$

Ответ. 1) 72° ; 2) 315° ; 3) $171,97^\circ$.

3. ■ Найти длину l дуги окружности, стягивающей угол в 5 рад, если радиус R окружности равен: 1) 3; 2) 1.

Решение.

$$1) l = \alpha R, l = 5 \cdot 3 = 15; \quad 2) l = \alpha R, l = 5 \cdot 1 = 5.$$

Ответ. 1) 15; 2) 5.

Каждому действительному числу α соответствует единственная точка M окружности, получаемая поворотом точки $P(1; 0)$ на угол α радиан. Одной и той же точке M единичной окружности соответствует бесконечное множество действительных чисел вида $\alpha + 2\pi k$, где k — целое число.

1. ■ Указать четверть, в которой расположена точка P_α , полученная поворотом точки $P(1; 0)$ на угол α радиан, если:

1) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$; 2) $\alpha = \frac{4\pi}{3}$; 3) $\alpha = -\frac{\pi}{12}$; 4) $\alpha = 1,7$.

Решение.

1) Поскольку $\frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{4} < \pi$, точка P_α расположена во II четверти.

2) В III четверти: $\pi < \frac{4\pi}{3} < \frac{3\pi}{2}$.

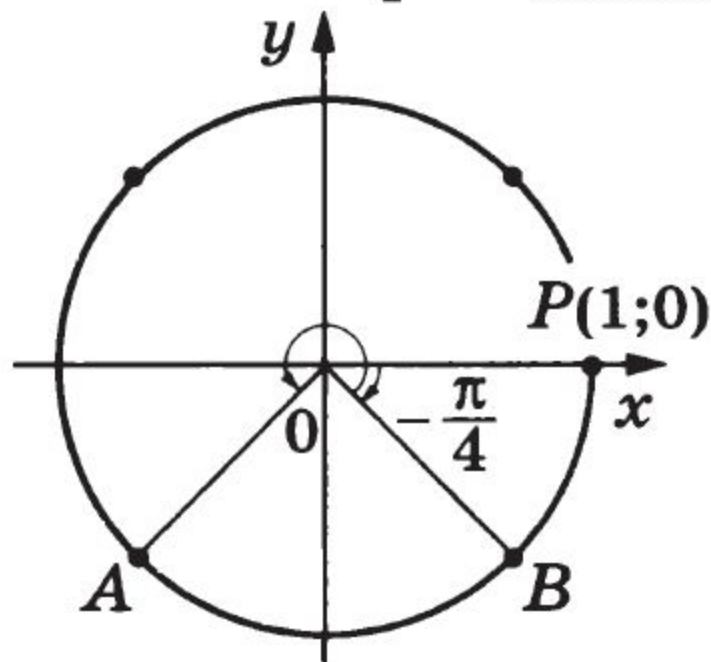
3) В IV четверти: $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{12} < 0$.

4) Во II четверти: $\frac{\pi}{2} < 1,7 < \pi$.

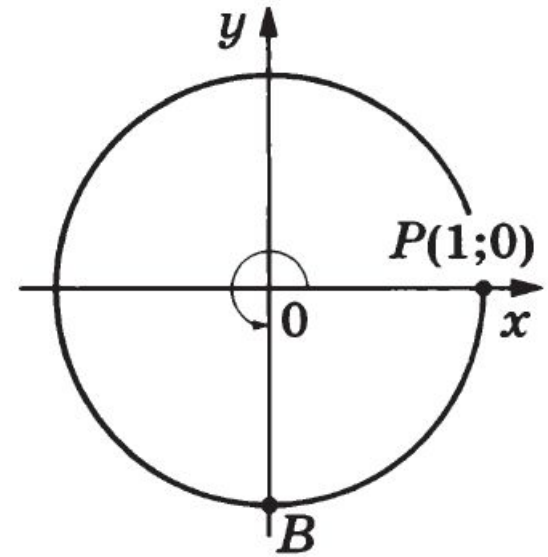
2. На единичной окружности построить точку, полученную поворотом точки $P(1; 0)$ на угол α , если:

$$1) \alpha = -\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}; \quad 2) \alpha = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Решение. 1) Повернём точку $P(1; 0)$ на угол $\frac{\pi}{4}$ по часовой стрелке, попадём в точку B ; затем полученную точку повернём 3 раза на угол $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки. Точка A — искомая



2) Повернём точку $P(1; 0)$ на угол $\frac{3\pi}{2}$ против часовой стрелки, попадём в точку $V(0; -1)$. При каждом следующем повороте на угол 2π (независимо от направления поворота) будем попадать в точку V . Точка V — искомая



3. ■ Установить четверть, в которой расположена точка P_α , полученная поворотом точки $P(1; 0)$ на угол α радиан, если:

$$1) \alpha = \frac{\pi}{2} + \beta, \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}; \quad 2) \alpha = \frac{3\pi}{2} - \beta, \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}.$$

Решение. 1) Поскольку $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, то точка P_α расположена во II четверти $\left(\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} + \beta < \pi \right)$.

2) Поскольку $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, то точка P_α расположена в III четверти $\left(\pi < \frac{3\pi}{2} - \beta < \frac{3\pi}{2} \right)$.

4. ■ Установить четверть, в которой расположена точка P_α , полученная поворотом точки $P(1; 0)$ на угол α , если:

1) $15\pi < \alpha < \frac{31\pi}{2}$; 2) $-\frac{9\pi}{2} < \alpha < -4\pi$; 3) $1170^\circ < \alpha < 1260^\circ$.

Решение. 1) Представим границы интервалов в виде $2\pi k + \beta$:

1) $15\pi = 14\pi + \pi = 2\pi \cdot 7 + \pi$; $\frac{31\pi}{2} = 14\pi + \frac{3\pi}{2} = 2\pi \cdot 7 + \frac{3\pi}{2}$.

Точка P_α расположена в III четверти.

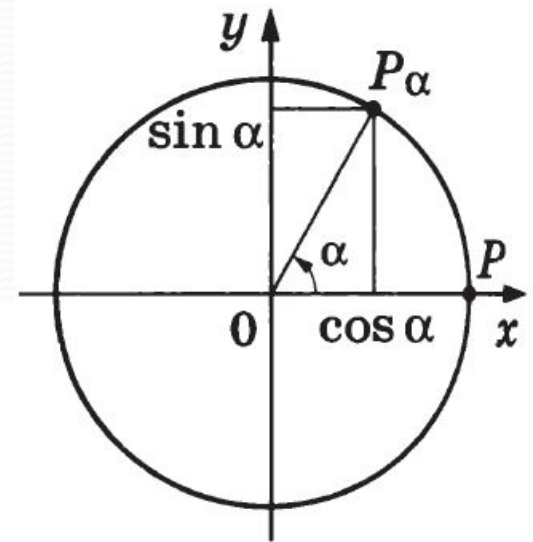
2) $-\frac{9\pi}{2} = 2\pi \cdot (-2) - \frac{\pi}{2}$; $-4\pi = 2\pi \cdot (-2) + 0$. Точка P_α расположена в IV четверти.

3) $1170^\circ = 360^\circ \cdot 3 + 90^\circ$, $1260^\circ = 360^\circ \cdot 3 + 180^\circ$. Точка P_α расположена во II четверти.

Определения

Синус угла α (обозначается $\sin \alpha$) — ордината точки P_α , полученной поворотом точки $P(1; 0)$ вокруг начала координат на угол α (рис. 39).

Косинус угла α (обозначается $\cos \alpha$) — абсцисса точки P_α , полученной поворотом точки $P(1; 0)$ вокруг начала координат на угол α



Тангенс угла α (обозначается $\operatorname{tg} \alpha$) — отношение синуса угла α к его косинусу, т. е. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

Котангенс угла α (обозначается $\operatorname{ctg} \alpha$) — отношение косинуса угла α к его синусу, т. е. $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

$$\sin x = 1, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z};$$

$$\cos x = 1, x = 2\pi k, k \in \mathbf{Z};$$

$$\sin x = 0, x = \pi k, k \in \mathbf{Z};$$

$$\sin x = -1, x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z};$$

$$\cos x = -1, x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbf{Z};$$

$$\cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z}.$$

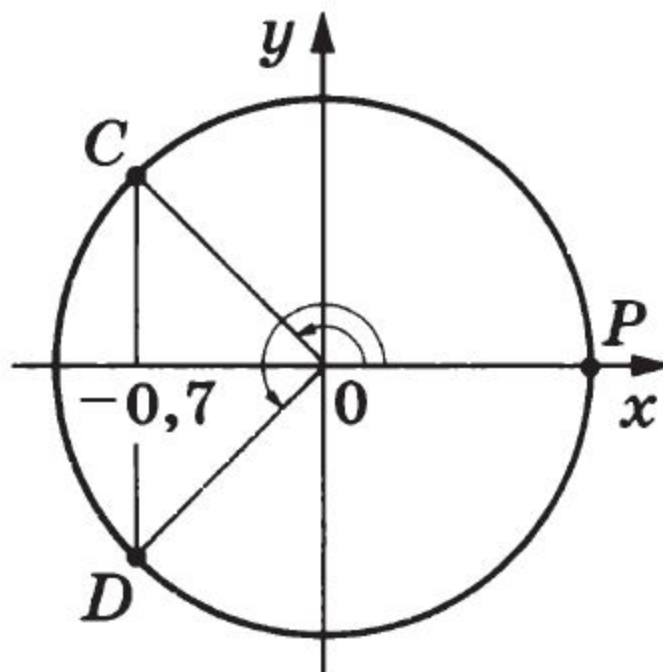
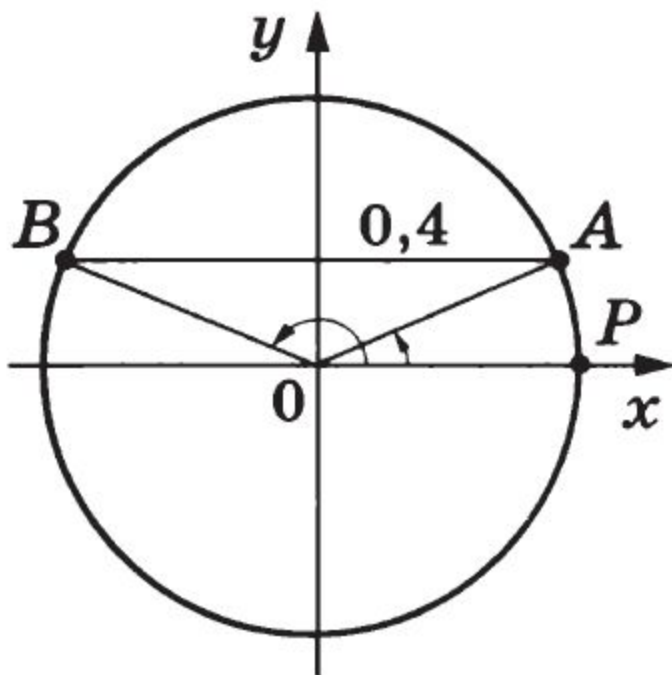
1. ■ Изобразить на единичной окружности точки, полученные поворотом точки $P(1; 0)$ на угол α ($0 < \alpha < 2\pi$), если:

1) $\sin \alpha = 0,4$; 2) $\cos \alpha = -0,7$.

Решение.

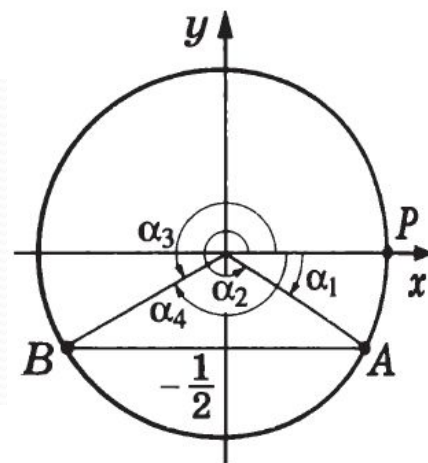
1) Ординаты искомым точек A и B равны $0,4$

2) Абсциссы искомым точек C и D равны $-0,7$



2. ■ Найти все углы из промежутка $[-2\pi; 2\pi]$, на которые нужно повернуть точку $P(1; 0)$, чтобы получить точку P_α , если:

1) $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$; 2) $\cos \alpha = \frac{1}{2}$.



Решение.

1) Ординату, равную $-\frac{1}{2}$, имеют точка A , полученная из точки P поворотом на угол $\alpha_1 = -\frac{\pi}{6}$ или на угол $\alpha_2 = \alpha_1 + 2\pi = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11}{6}\pi$, а также точка B , полученная из точки P поворотом на угол $\alpha_3 = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$ или на угол $\alpha_4 = \alpha_3 - 2\pi = \frac{7\pi}{6} - 2\pi = -\frac{5\pi}{6}$.

2) Абсциссу, равную $\frac{1}{2}$, имеют

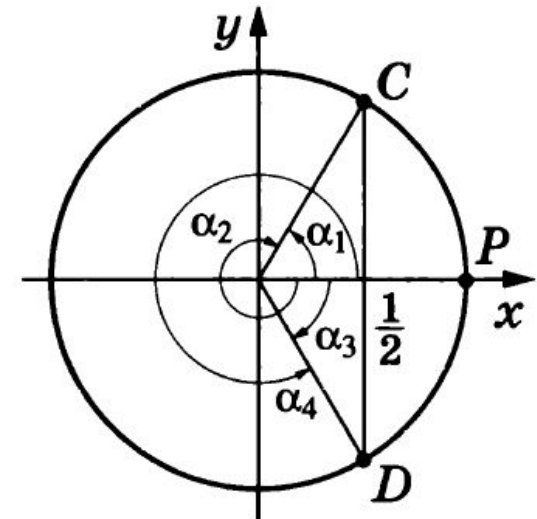
точка C , полученная из точки P поворотом

на угол $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$ или на угол $\alpha_2 = \frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3}$,

а также точка D , полученная из точки P

поворотом на угол $\alpha_3 = -\frac{\pi}{3}$ или на угол

$\alpha_4 = \alpha_3 + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$.



Найти $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, если:

1) $\alpha = -5\pi$; 2) $\alpha = \frac{9\pi}{2}$; 3) $\alpha = 2070^\circ$; 4) $\alpha = -1800^\circ$.

Решение.

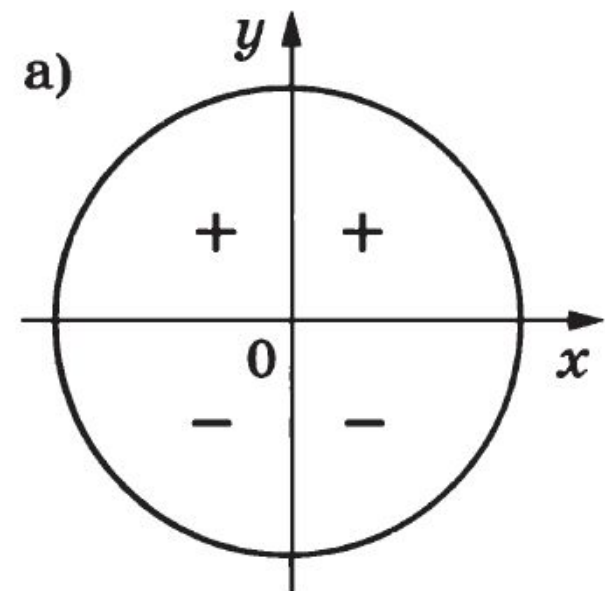
1) Представив число α в виде $\alpha = 2\pi k + \beta$, где $|\beta| < 2\pi$ и $k \in \mathbf{Z}$, получим $\alpha = 2\pi(-2) - \pi$. Точка, полученная поворотом точки $P(1; 0)$ на угол -5π , совпадает с точкой, полученной поворотом на угол $-\pi$, а её координаты равны $(-1; 0)$, значит, $\sin \alpha = 0$, $\cos \alpha = -1$.

2) $\alpha = \frac{9\pi}{2} = 2\pi \cdot 2 + \frac{\pi}{2}$. Точка, полученная поворотом точки $P(1; 0)$ на угол $\frac{9\pi}{2}$, совпадает с точкой, полученной поворотом на $\frac{\pi}{2}$. Координаты этой точки $(0; 1)$, следовательно, $\sin \alpha = 1$, $\cos \alpha = 0$.

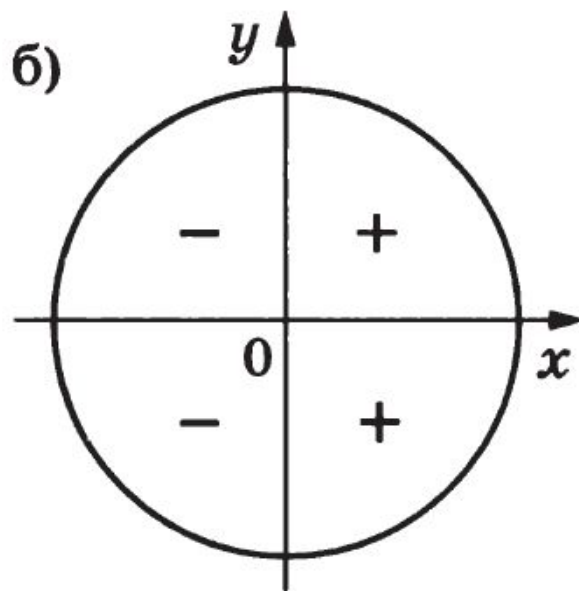
3) $\alpha = 360^\circ \cdot 5 + 270^\circ$. Координаты точки, полученной поворотом точки $P(1; 0)$ на 270° , равны $(0; -1)$, следовательно, $\sin \alpha = -1$, $\cos \alpha = 0$.

4) $\alpha = -1800^\circ = 360^\circ \cdot (-5)$. Точка, полученная поворотом точки $P(1; 0)$ на -1800° , совпадает с этой точкой, следовательно, $\sin \alpha = 0$, $\cos \alpha = 1$.

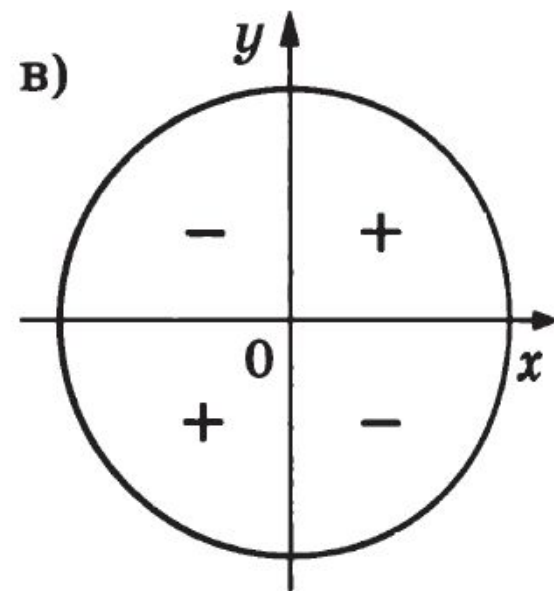
Справочные сведения



$\sin \alpha$



$\cos \alpha$



$\operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha$

1. Определить знаки $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, если:

1) $\alpha = \frac{17\pi}{3}$; 2) $\alpha = -307^\circ$.

Решение. 1) $\alpha = \frac{17\pi}{3} = 6\pi - \frac{\pi}{3}$, следовательно, угол α ле-

жит в IV четверти и $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha > 0$, $\operatorname{tg} \alpha < 0$.

2) $\alpha = -307^\circ = -360^\circ + 53^\circ$, следовательно, угол α лежит в I четверти и $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha > 0$, $\operatorname{tg} \alpha > 0$.

2. Сравнить числа: 1) $\sin 3$ и $\sin 4$; 2) $\cos 4$ и $\cos 5$; 3) $\sin 2$ и $\cos 2$.

Решение. 1) $\sin 3 > 0$, так как число $3 \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi \right]$; $\sin 4 < 0$, так как $4 \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2} \right]$. Следовательно, $\sin 3 > \sin 4$.

2) $\cos 4 < 0$, так как $4 \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2} \right]$; $\cos 5 > 0$, так как $5 \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi \right]$. Следовательно, $\cos 4 < \cos 5$.

3) Так как $2 \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi \right]$, то $\sin 2 > 0$, а $\cos 2 < 0$. Следовательно, $\sin 2 > \cos 2$.

Справочные сведения

Основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \quad (1)$$

Зависимость между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом:

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1, \quad (2)$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad (3)$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}. \quad (4)$$

З а м е ч а н и е. Формулы (2) — (4) справедливы для тех значений аргументов, при которых их левые и правые части имеют смысл.

1. ■ Вычислить $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Решение. С помощью формулы (3) находим

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \frac{16}{9}} = \frac{9}{25}.$$

Так как $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то $\cos \alpha < 0$, $\sin \alpha > 0$. Поэтому $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$, а из равенства (1) следует, что $\sin \alpha = +\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} =$

$$= \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}.$$

Ответ. $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$.

2. Упростить выражение $A = \frac{2 \sin^2 \alpha - 1}{\cos \alpha + \sin \alpha}$.

Решение. С помощью тождества (1) и формулы $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ получаем

$$A = \frac{2 \sin^2 \alpha - (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{\cos \alpha + \sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \sin \alpha - \cos \alpha.$$

3. Существует ли угол α , такой, что $\sin \alpha = \frac{3}{7}$, $\cos \alpha = \frac{4}{7}$?

Решение. Так как для любого α справедливо равенство (1), а $\left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{25}{49} \neq 1$, то ни при каком α равенства $\sin \alpha = \frac{3}{7}$ и $\cos \alpha = \frac{4}{7}$ не могут выполняться одновременно.

Ответ. Не существует.

4. ■ Найти $\sin x \cos x$, если $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$.

Решение. Возводя обе части заданного равенства в квадрат, получаем $\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = \frac{1}{9}$, или $1 + 2 \sin x \cos x = \frac{1}{9}$, откуда $\sin x \cos x = -\frac{4}{9}$.