Кратчайшие пути по поверхности

Задачи на нахождение кратчайших путей относятся к экстремальным задачам и играют большую роль в математике и ее приложениях. Например, на Объединенной межвузовской математической олимпиаде 2011 года учащимся 11 класса была предложена следующая задача.

На рисунке 1 изображен многогранник, все двугранные углы которого прямые. Саша утверждает, что кратчайший путь по поверхности этого многогранника от вершины X до вершины Y имеет длину 4. Прав ли он?

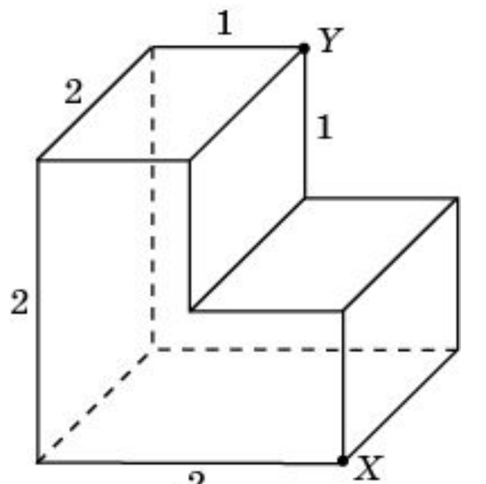


Рис. 1

Здесь мы рассмотрим примеры таких задач и метод их решения, основанный на использовании разверток.

Задача 1

Найдите длину кратчайшего пути по поверхности единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 2), соединяющего вершины A и C_1.

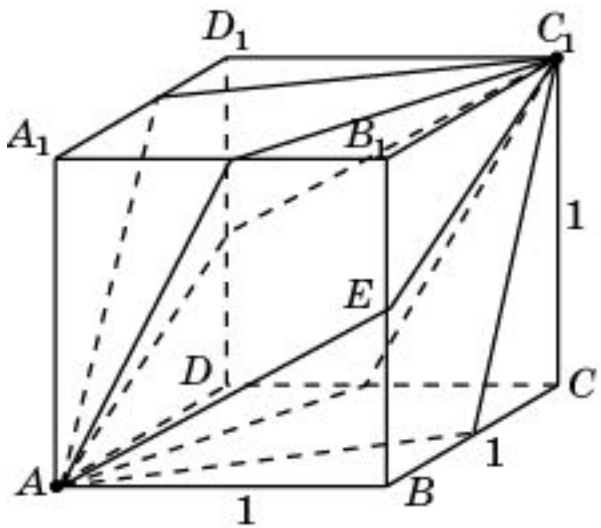


Рис. 5

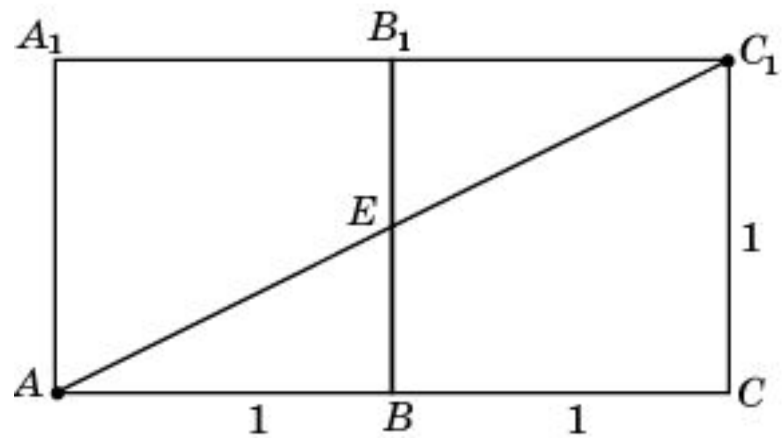


Рис. 3

Решение. Рассмотрим развертку, состоящую из двух соседних граней куба, изображенную на рисунке 3.

Кратчайшим путем из A в C_1 является отрезок AC_1, длина которого равна $\sqrt{5}$. Соответствующий путь на поверхности куба изображен на рисунке 4.

Заметим, что путь из A в C_1 является не единственным. Имеется шесть таких путей, длины которых равны $\sqrt{5}$, проходящих через середины ребер BB_1, A_1B_1, A_1D_1, DD_1, CD и BC (рис. 5).

Ответ. $\sqrt{5}$.

Задача 2

Три ребра прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 6) равны 5, 4, 3. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности этого параллелепипеда, соединяющего вершины A и C_1.

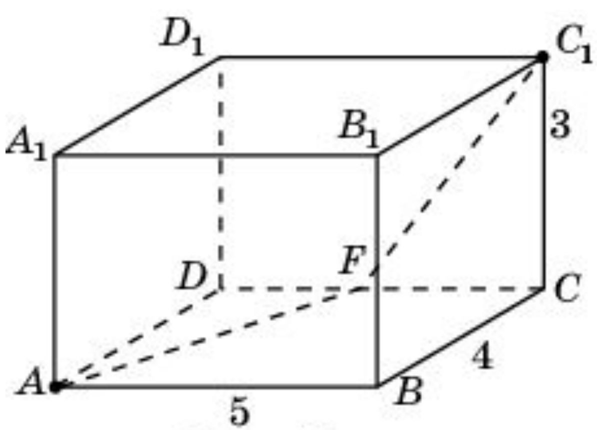


Рис. 10

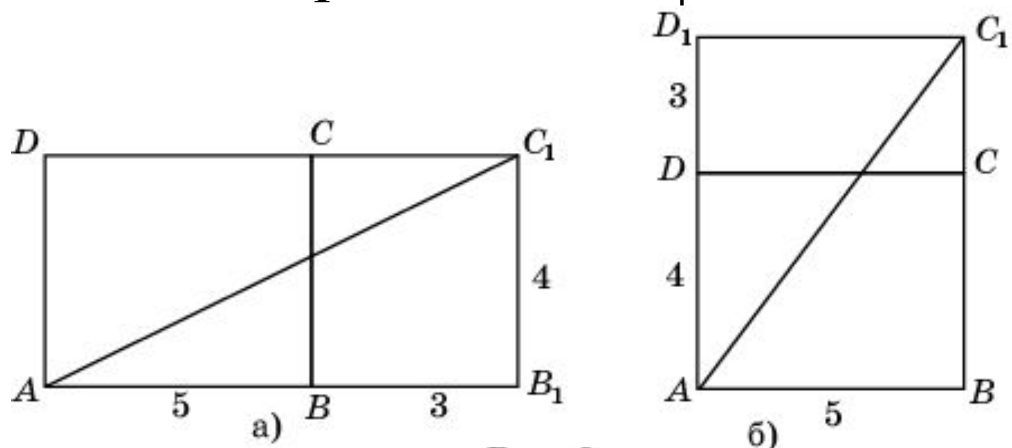


Рис. 9

Решение. Рассмотрим развертку, состоящую из двух соседних граней данного параллелепипеда, изображенную на рисунке 7.

Кратчайшим путем из A в C_1 является отрезок AC_1, длина которого равна $3\sqrt{10}$. Соответствующий путь на поверхности куба изображен на рисунке 8.

Однако этот путь не является кратчайшим. Рассмотрим другие возможные развертки граней данного параллелепипеда (рис. 9).

Длины соответствующих путей равны $4\sqrt{5}$ и $\sqrt{74}$. Наименьшая длина равна $\sqrt{74}$. Соответствующий путь на поверхности данного параллелепипеда изображен на рисунке 10.

Задача 3

Найдите длину кратчайшего пути по поверхности правильного единичного тетраэдра $ABCD$ (рис. 11), соединяющего середины ребер AB и CD.

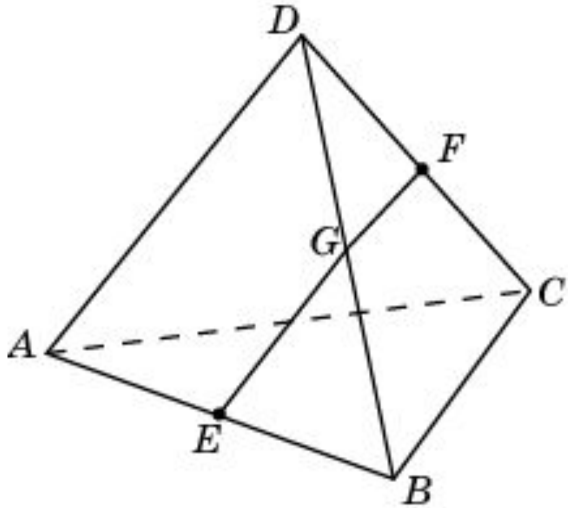


Рис. 13

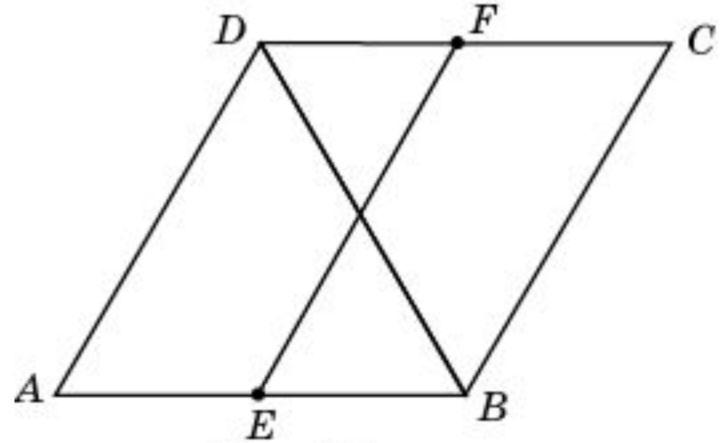


Рис. 12

Решение. Рассмотрим развертку, состоящую из двух соседних граней данного тетраэдра, изображенную на рисунке 12.

Кратчайшим путем из E в F является отрезок EF, длина которого равна 1. Соответствующий путь на поверхности правильного тетраэдра изображен на рисунке 13.

Ответ. 1.

Задача 4

Найдите длину кратчайшего пути по поверхности правильного тетраэдра $ABCD$ (рис. 14), соединяющего точки E и F, расположенные на высотах боковых граней в 7 см от соответствующих вершин тетраэдра. Ребро тетраэдра равно 20 см.

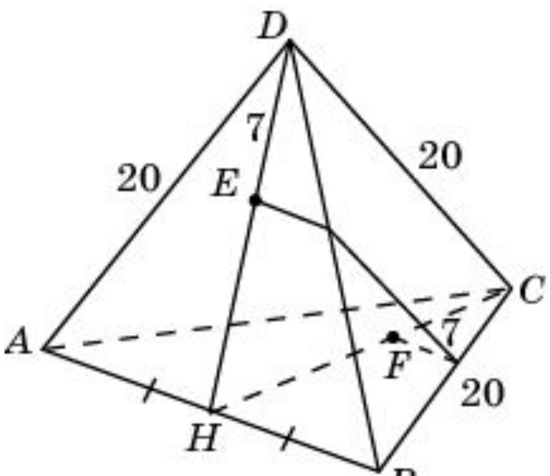


Рис. 16

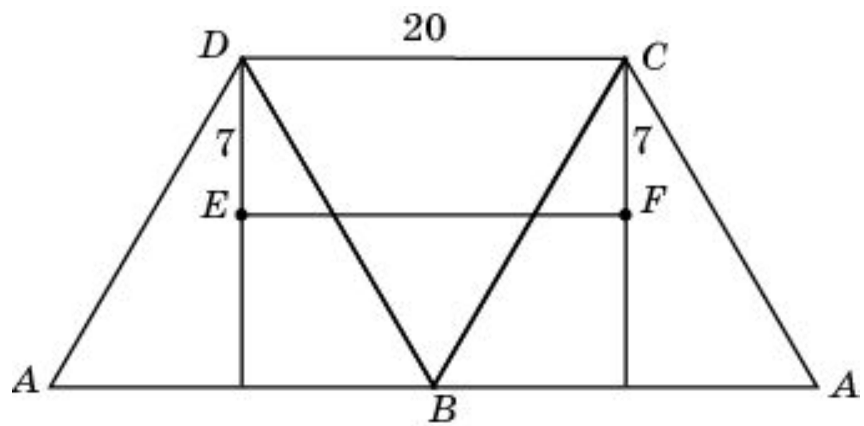


Рис. 15

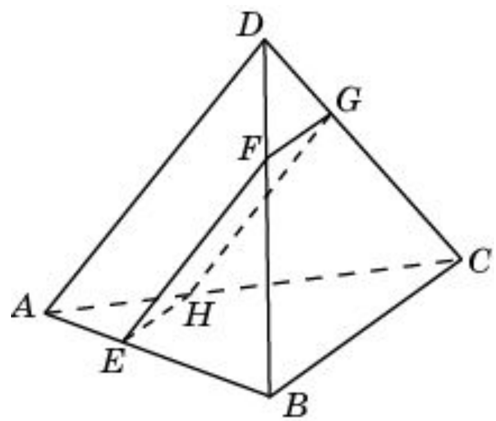
Решение. Одним из возможных путей является путь EHF. Его длина равна $20\sqrt{3}-14$ см.

Для нахождения другого пути рассмотрим развертку, состоящую из трех граней тетраэдра, изображенную на рисунке 15.

Длина пути EF равна 20 см. Легко видеть, что $20 < 20\sqrt{3}-14$, следовательно, этот путь является кратчайшим. Соответствующий путь на поверхности правильного тетраэдра изображен на рисунке 16. Ответ. 1.

Задача 5

Найдите наименьшую длину веревочного кольца, через которое можно продеть единичный тетраэдр.



Решение. Заметим, что периметр четырехугольника $EFGH$, стороны которого параллельны соответствующим ребрам тетраэдра, равен 2. Отсюда следует, что единичный тетраэдр можно продеть через веревочное кольцо длины 2, если начинать продевание с ребра AD и сдвигать кольцо в направлении ребра BC так, чтобы веревочное кольцо имело форму прямоугольника $EFGH$.

Задача 6

Найдите длину кратчайшего пути по поверхности правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 17), соединяющего вершину A и середину D ребра B_1C_1. Все ребра призмы равны 1.

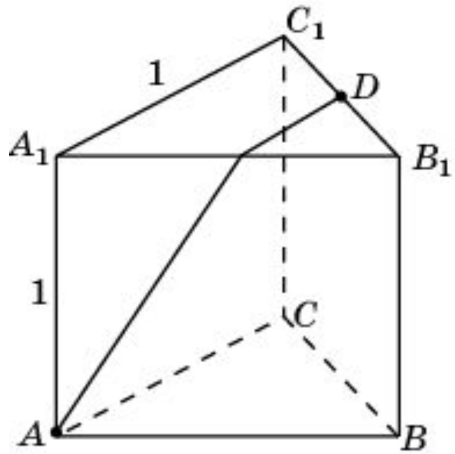


Рис. 20

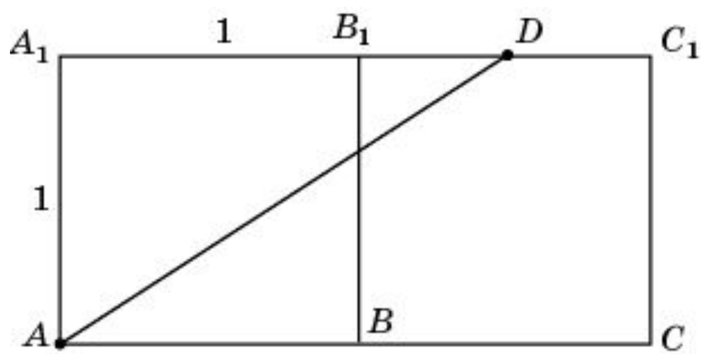


Рис. 18

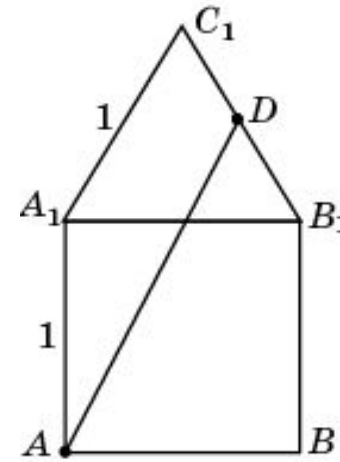


Рис. 19

Решение. Рассмотрим развертку, состоящую из двух боковых граней призмы, изображенную на рисунке 18.

Длина кратчайшего пути по этим граням призмы равна длине отрезка AD и равна $\frac{\sqrt{13}}{2}$. Однако путь из A в D может проходить не только по боковым граням, но и по боковой грани и основанию. Соответствующая развертка изображена на рисунке 19.

В этом случае кратчайшим путем является отрезок AD, длина которого равна $\frac{\sqrt{7+2\sqrt{3}}}{2}$. Непосредственные вычисления показывают, что $\frac{\sqrt{7+2\sqrt{3}}}{2} < \frac{\sqrt{13}}{2}$, следовательно, этот путь является кратчайшим. Соответствующий путь на поверхности призмы изображен на рисунке 20.

Задача 7

Найдите длину кратчайшего пути по поверхности правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (рис. 21), соединяющего вершины A и D_1. Все ребра призмы равны 1.

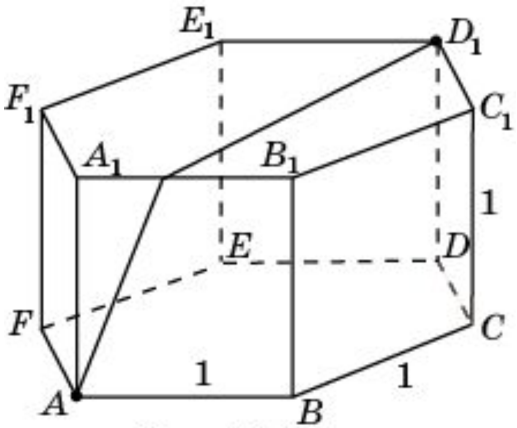


Рис. 24

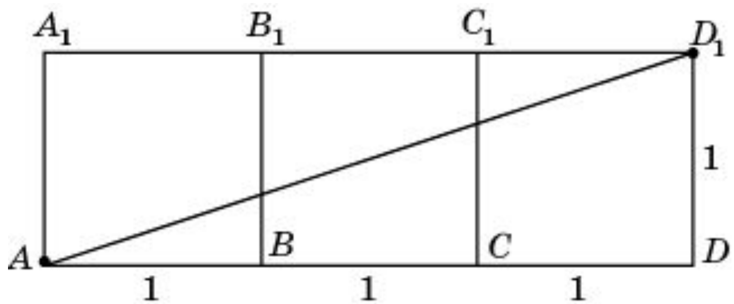


Рис. 22

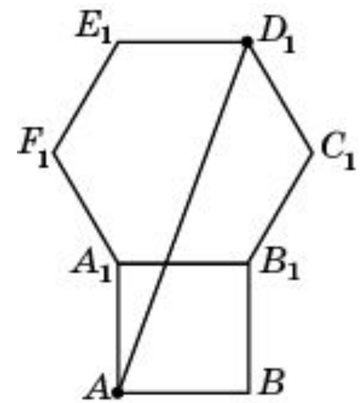


Рис. 23

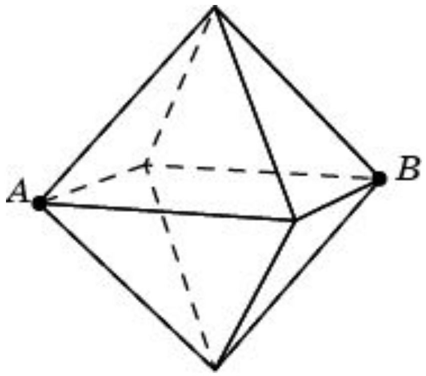
Решение. Рассмотрим развертку, состоящую из трех боковых граней призмы, изображенную на рисунке 22.

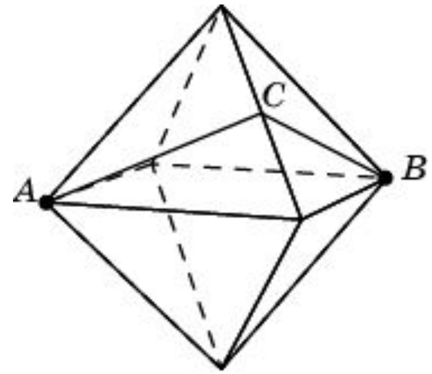
Длина кратчайшего пути по этим граням призмы равна длине отрезка AD_1 и равна $\sqrt{10}$. Однако путь из A в D_1 может проходить не только по боковым граням, но и по боковой грани и основанию. Соответствующая развертка изображена на рисунке 23.

В этом случае кратчайшим путем является отрезок AD_1, длина которого равна $\sqrt{5+2\sqrt{3}}$. Непосредственные вычисления показывают, что $\sqrt{5+2\sqrt{3}} < \sqrt{10}$, следовательно, этот путь является кратчайшим. Соответствующий путь на поверхности призмы изображен на рисунке 24.

Задача 8

Найдите длину кратчайшего пути по поверхности октаэдра, соединяющего вершины A и B. Ребра октаэдра равны 1.

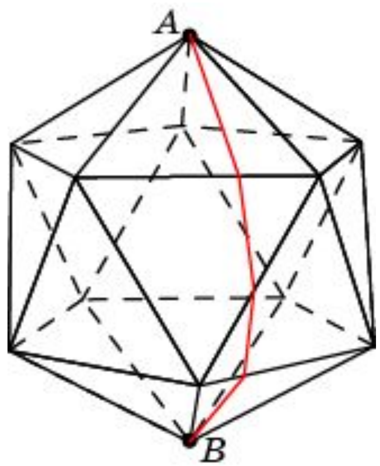


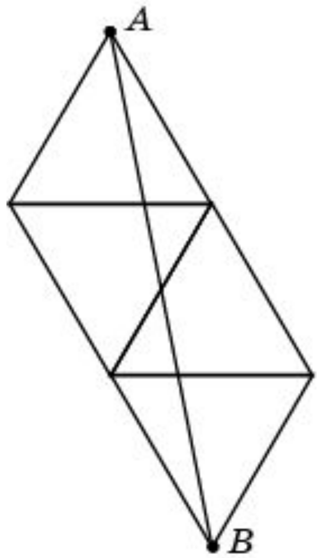


Решение. Искомый путь проходит через середину C ребра октаэдра. Его длина равна $\sqrt{3}$.

Задача 9

Найдите длину кратчайшего пути по поверхности икосаэдра, соединяющего вершины A и B. Ребра икосаэдра равны 1.



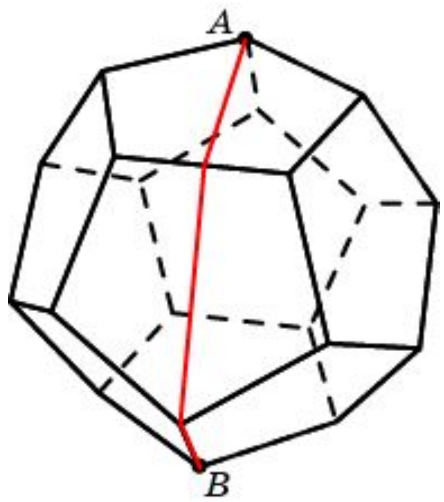


Решение. Рассмотрим развертку, состоящую из двух соседних граней икосаэдра, изображенную на рисунке. Искомым путем является отрезок AB. Его длина равна $\sqrt{7}$.

Соответствующий путь по поверхности икосаэдра изображен на рисунке.

Задача 10

Найдите длину кратчайшего пути по поверхности додекаэдра, соединяющего вершины A и B. Ребра додекаэдра равны 1.



Ответ. Искомый путь проходит через середину ребра додекаэдра. Его длина равна $\sqrt{5+2\sqrt{5}}+1$.

Задача 11

Рассмотрим теперь задачу, предложенную на Объединенной межвузовской математической олимпиаде 2011 года учащимся 11 класса, формулировку которой мы привели в начале данной статьи.

На рисунке 25 изображен многогранник, все двугранные углы которого прямые. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности этого многогранника, соединяющего вершины B и C_2.

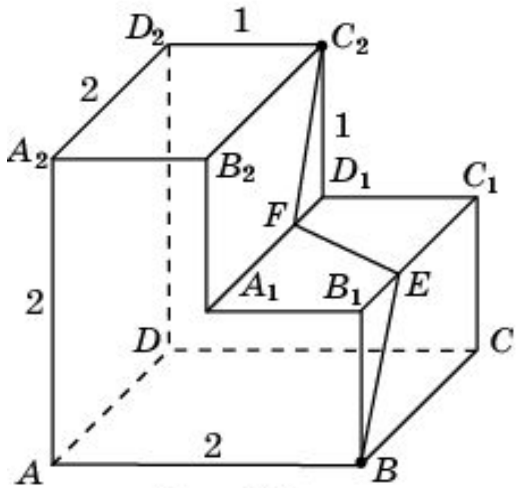


Рис. 27

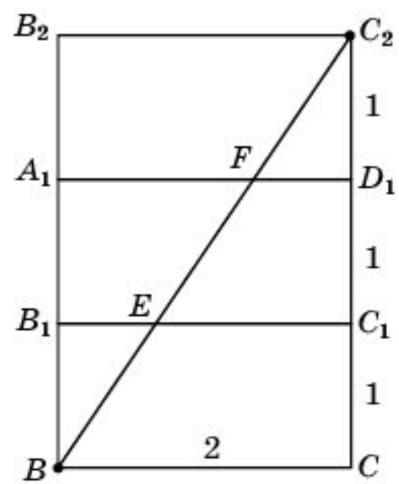


Рис. 26

Решение. Рассмотрим развертку трех граней этого многогранника, изображенную на рисунке 26.

Кратчайшим путем из точки B в точку C_2 является отрезок BC_2, длина которого равна $\sqrt{13}$. Соответствующий путь на поверхности многогранника изображен на рисунке 27.

Задача 12

На рисунке 28 изображен многогранник, все двугранные углы которого прямые. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности этого многогранника, соединяющего вершины A и C_2.

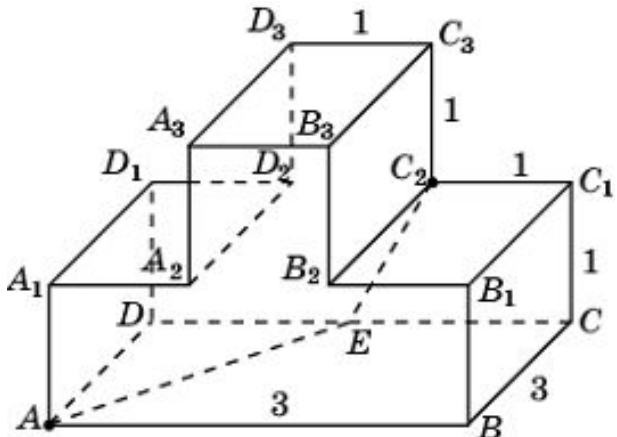


Рис. 30

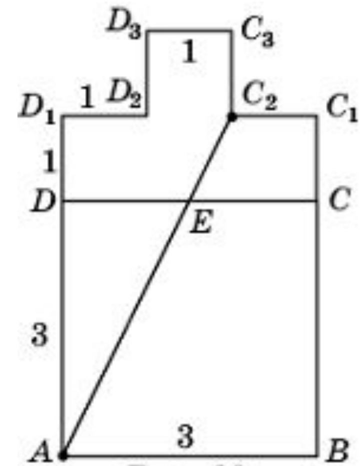


Рис. 29

Решение. Рассмотрим развертку двух граней этого многогранника, изображенную на рисунке 29.

Кратчайшим путем из точки A в точку C_2 является отрезок AC_2, длина которого равна $2\sqrt{5}$. Соответствующий путь на поверхности многогранника изображен на рисунке 30.

Задача 13

На рисунке 31 изображен многогранник, все двугранные углы которого прямые. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности этого многогранника, соединяющего вершины B и G_1.

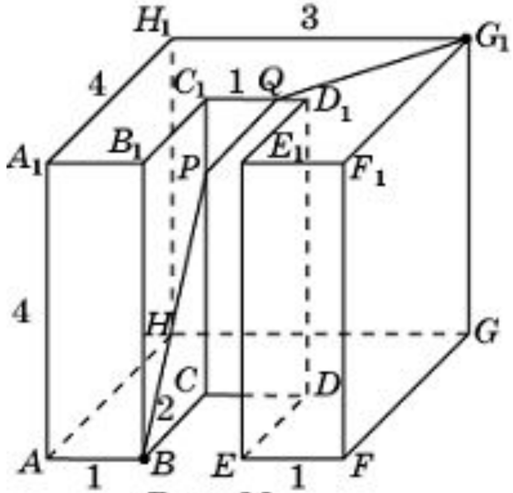


Рис. 33

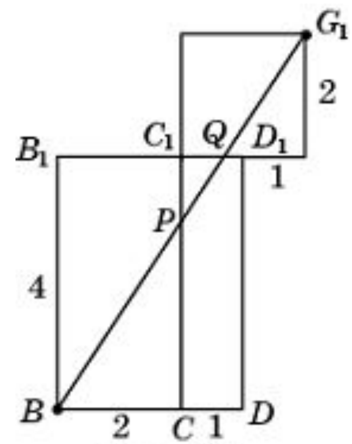


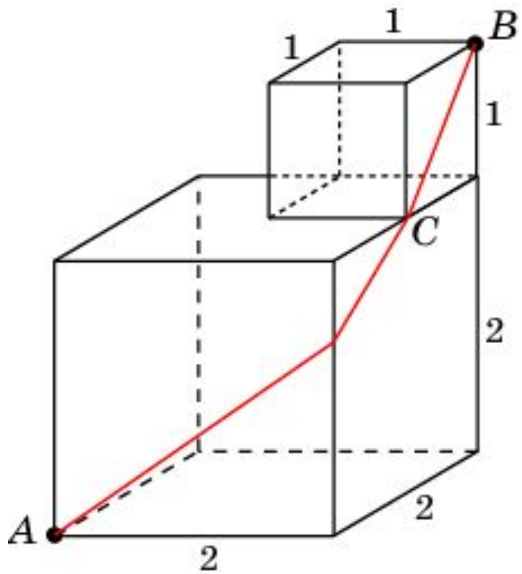
Рис. 32

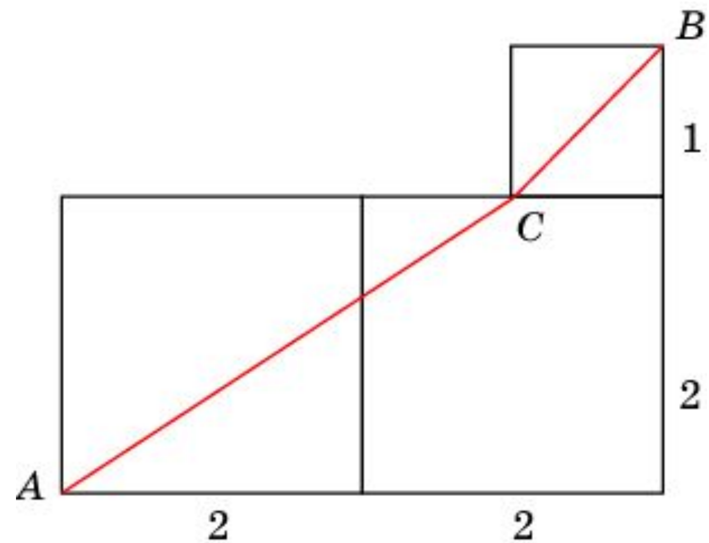
Решение. Рассмотрим развертку, изображенную на рисунке 32, состоящую из двух боковых граней и части верхней грани этого многогранника.

Кратчайшим путем из точки B в точку G_1 является отрезок BG_1, длина которого равна $2\sqrt{13}$. Соответствующий путь на поверхности многогранника изображен на рисунке 33.

Задача 14

На куб с ребром 2 поставлен куб с ребром 1. Найдите длину кратчайшего пути по поверхностям этих кубов, соединяющего вершины A и B.





Решение. Рассмотрим развертку, изображенную на рисунке.

Кратчайшим путем из вершины A в вершину B является ломаная ACB, длина которой равна $\sqrt{13}+\sqrt{2}$.

Соответствующий путь на поверхности многогранника изображен на рисунке.

Самостоятельно проверьте, что другие пути длиннее.

Задача 15

Рассмотрим теперь задачи на нахождение кратчайших путей на поверхностях круглых тел.

Образующая и радиус основания цилиндра равны 1. Найдите длину кратчайшего пути по боковой поверхности этого цилиндра, соединяющего центрально-симметричные точки *A* и *B* (рис. 34).

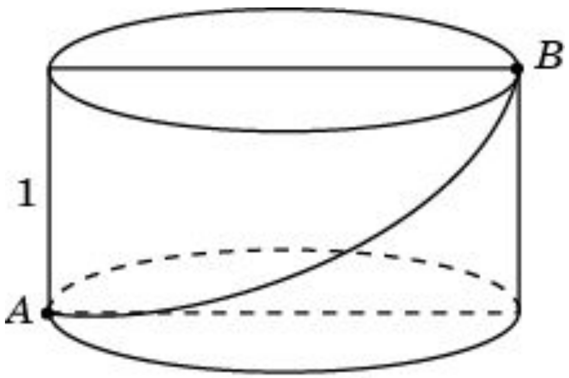


Рис. 36

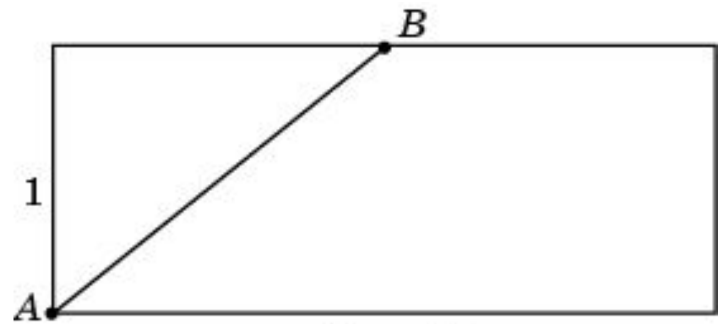


Рис. 35

Решение. Разверткой боковой поверхности этого цилиндра является прямоугольник со сторонами 2π и 1, изображенный на рисунке 35.

Кратчайшим путем из точки *A* в точку *B* является отрезок *AB*, длина которого равна $\sqrt{1+\pi^2}$ Соответствующий путь на поверхности цилиндра изображен на рисунке 36.

Задача 16

На внутренней стенке цилиндрической банки в трех сантиметрах от верхнего края висит капля меда, а на наружной стенке, в диаметрально противоположной точке сидит муха (рис. 37). Найдите кратчайший путь, по которому муха может доползти до меда. Радиус основания банки равен 10 см.

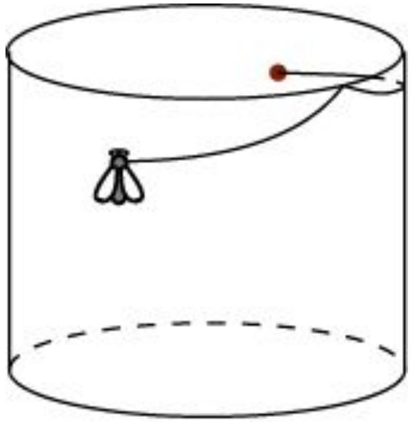


Рис. 39

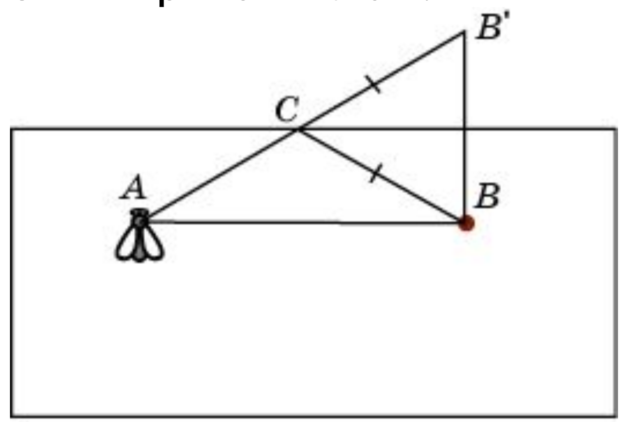


Рис. 38

Решение. Разверткой боковой поверхности цилиндра является прямоугольник (рис. 38).

Конечно, кратчайшим путем между точками A и B является отрезок AB. Однако, чтобы муха могла попасть на внутреннюю сторону банки, ей нужно переползти через край в некоторой точке C. Рассмотрим точку B', симметричную точке B относительно стороны прямоугольника. Тогда отрезки BC и $B'C$ равны, следовательно, длина кратчайшего пути равна длине отрезка AB'. Она равна $2\sqrt{25\pi^2+9}$. Соответствующий путь на поверхности банки изображен на рисунке 39.

Задача 17

Осевое сечение конуса – правильный треугольник ABC со стороной 1. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности этого конуса из точки A в точку D – середину стороны BC (рис. 40).

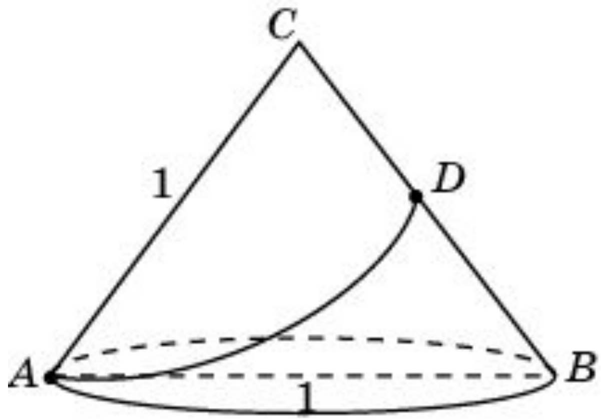


Рис. 42

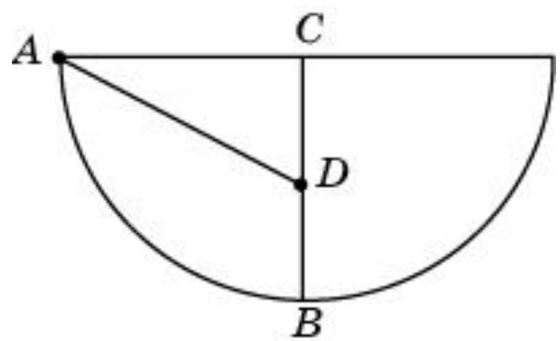


Рис. 41

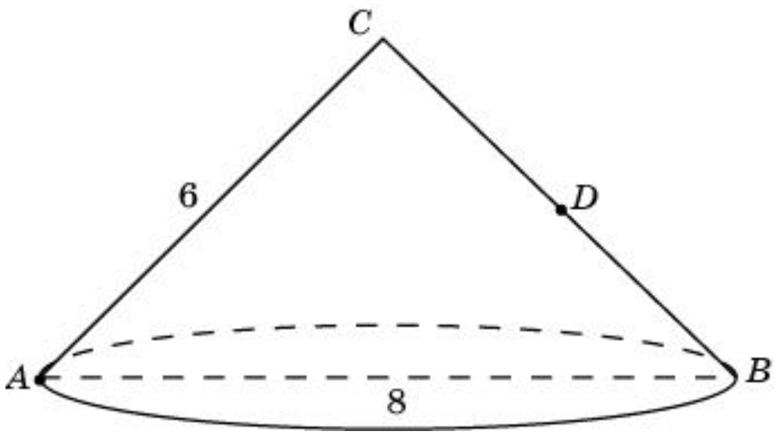
Решение. Разверткой боковой поверхности этого конуса является полукруг радиуса 1 (рис. 41).

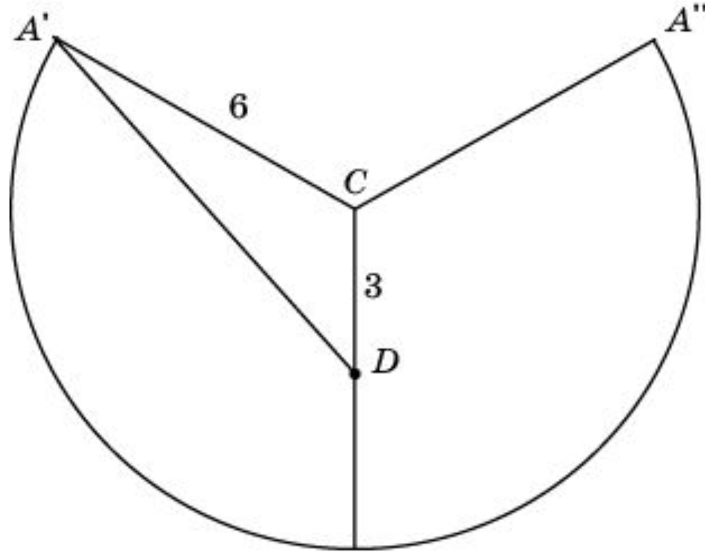
Кратчайшим путем из точки A в точку D является отрезок AD, длина которого равна $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Соответствующий путь на поверхности конуса изображен на рисунке 42.

Задача 18

Осевое сечение конуса – равнобедренный треугольник *ABC* со стороной основания 8 и боковой стороной 6. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности этого конуса из точки *A* в точку *D* – середину стороны *BC*.



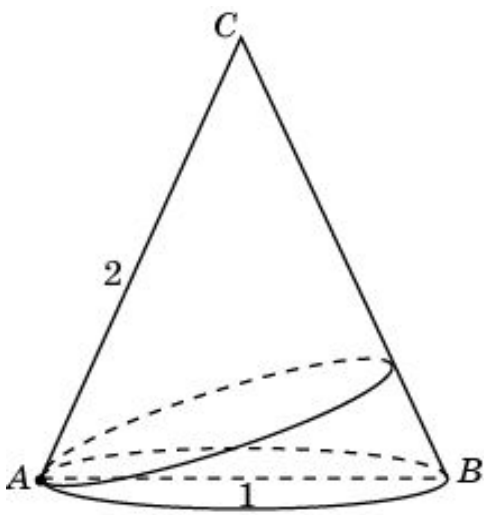


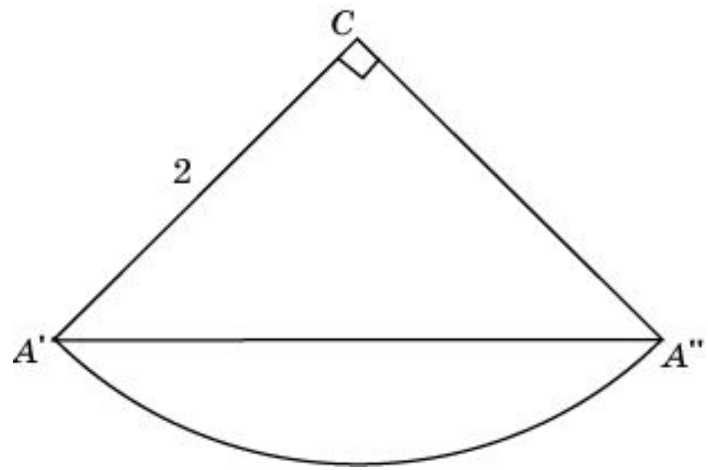
Решение. Разверткой боковой поверхности этого конуса является сектор с углом 240°.

Кратчайшим путем из точки *A'* в точку *D* является отрезок *A'D*, длина которого равна $3\sqrt{7}$.

Задача 19

Осевое сечение конуса – равнобедренный треугольник ABC со стороной основания 1 и боковой стороной 2. Найдите длину кратчайшей петли по поверхности этого конуса с началом и концом в точке A.

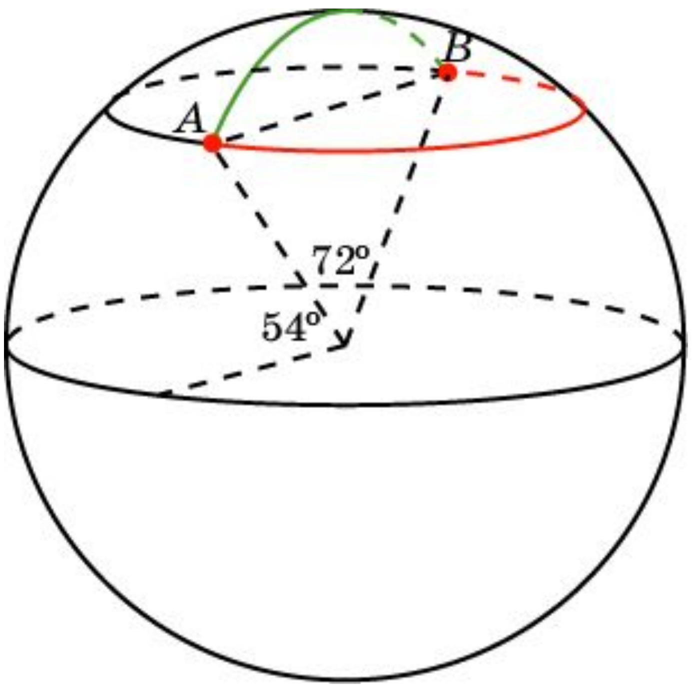




Решение. Разверткой боковой поверхности конуса является сектор с углом 90º. Кратчайшим путем является отрезок $A'A''$, длина которого равна $2\sqrt{2}$.

Задача 20

Найдите кратчайший путь по поверхности Земного шара из пункта A, расположенного на широте 54°, до пункта B, расположенного в диаметрально противоположной точке той же широты. Длина экватора равна 40000 км.



Решение. Длина дуги окружности, отмеченной на рисунке красным цветом, равна

$$20000 \cdot \cos 54^{\circ} \approx 12000\ (\hat{e}\grave{\imath}\ ).$$

Длина дуги окружности, проходящей через Северный полюс, отмеченной на рисунке зеленым цветом, равна 8000 км. Этот путь и является кратчайшим.