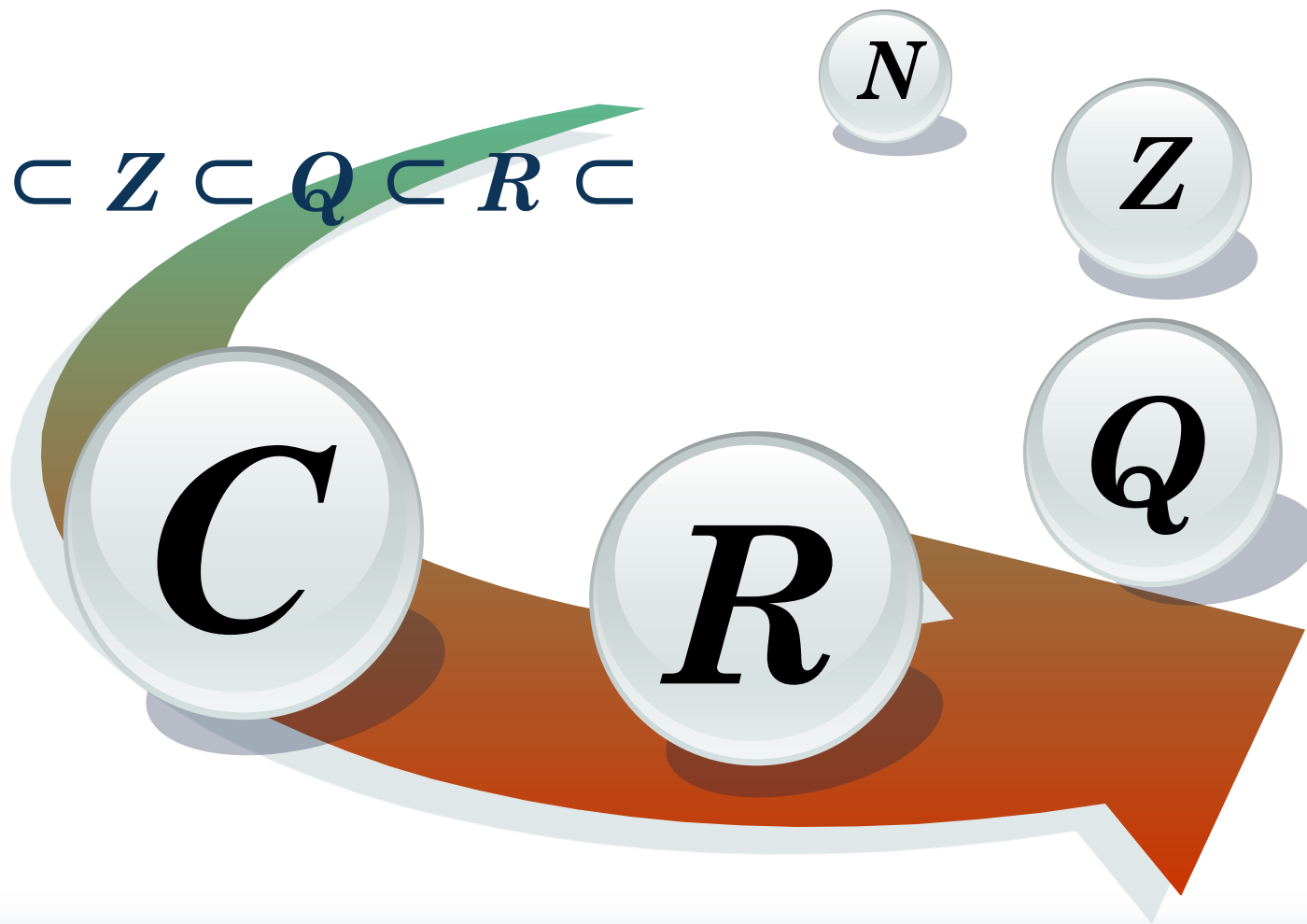


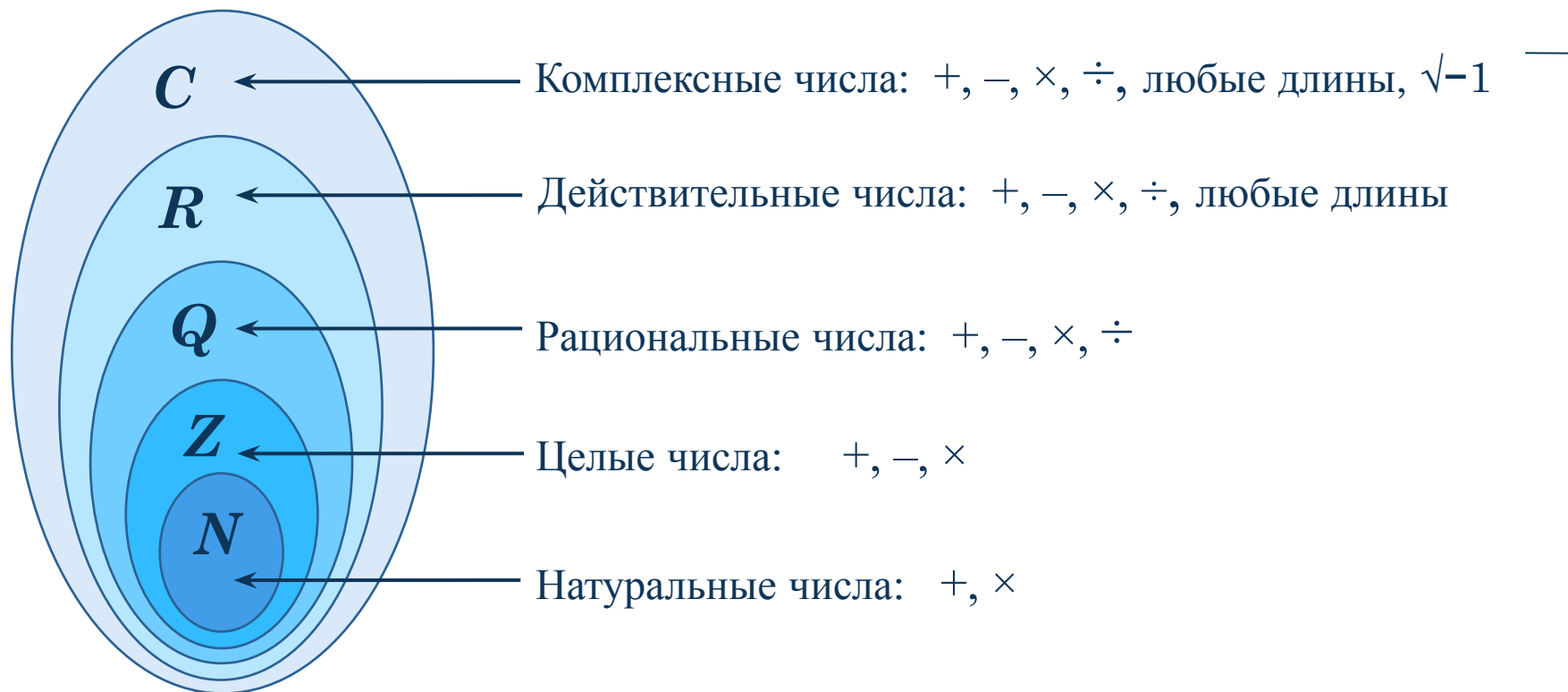
Решите  
уравнение:  
 $x^2 - 6x + 13 = 0$

# Множества чисел

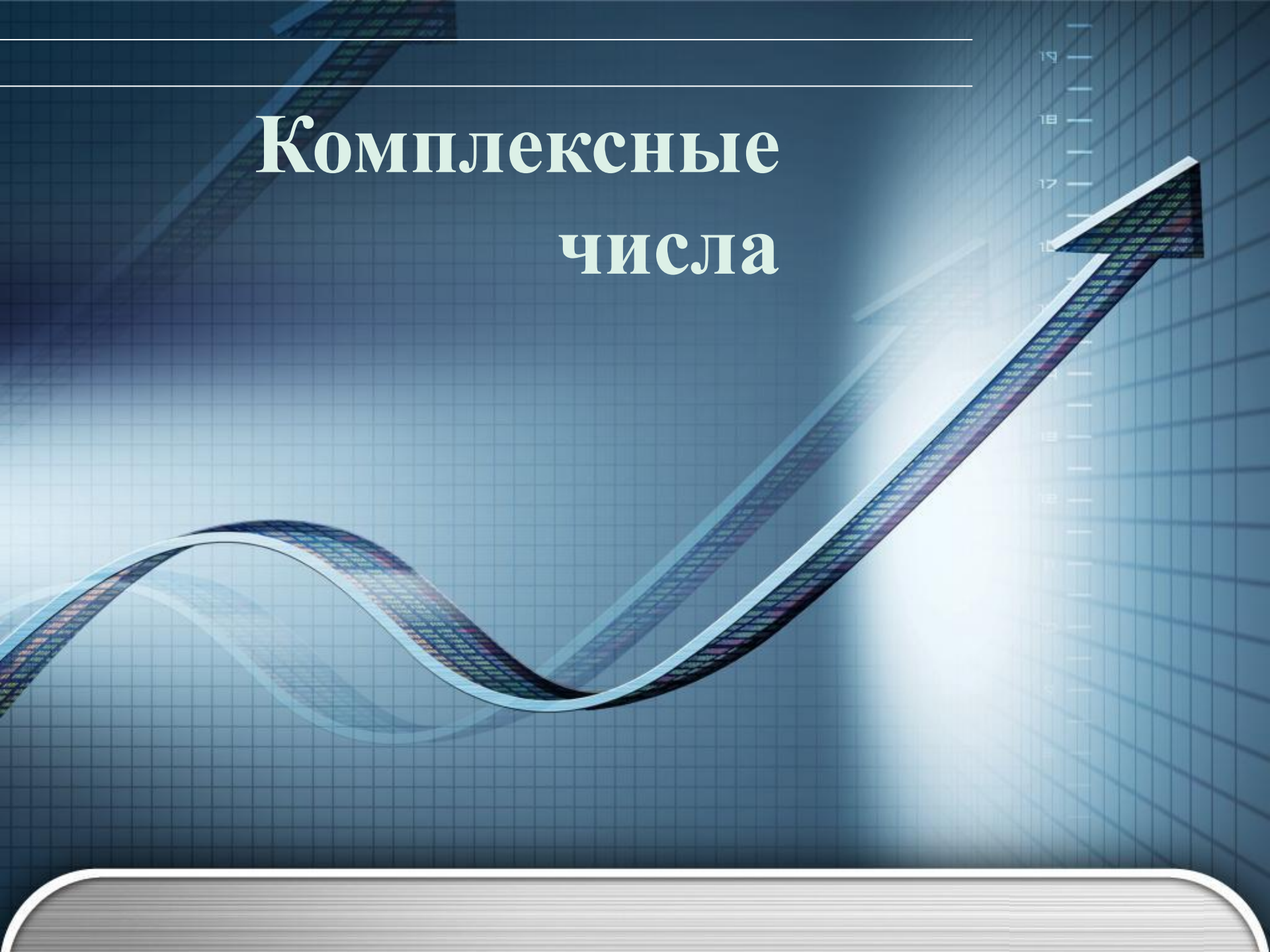
$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$$




# Алгебраические операции



# Комплексные числа





**"Комплексное число –  
это тонкое и поразительное  
средство божественного духа,  
почти амфибия между бытием и  
небытием".**

**Г. Лейбниц**



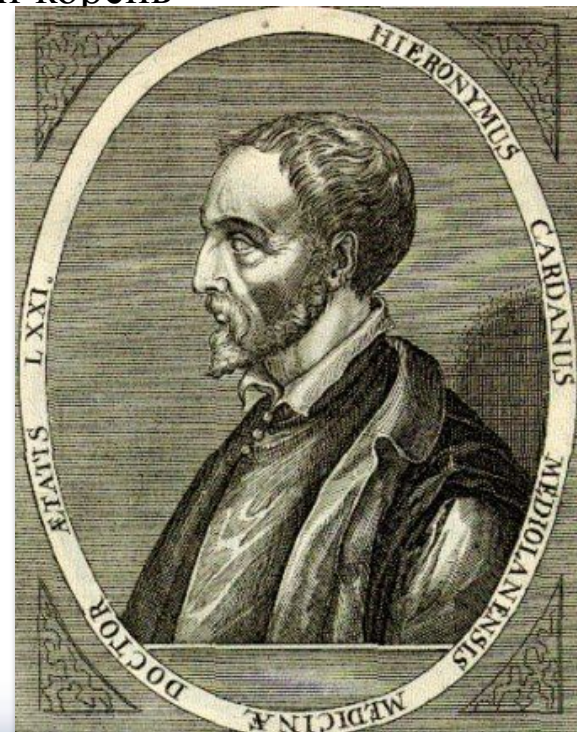
Многовековая история развития представления человека о  
числах –  
одна из самых ярких сторон развития человеческой  
культуры.

# Из истории комплексных чисел

Комплексные числа были введены в математику для того, чтобы сделать возможной операцию извлечения квадратного корня из любого действительного числа. Это, однако, не является достаточным основанием для того, чтобы вводить в математику новые числа. Оказалось, что если производить вычисления по обычным правилам над выражениями, в которых встречаются квадратный корень из отрицательного числа, то можно прийти к результату, уже не содержащему квадратный корень из отрицательного числа. В XVI в.

*Кардано* нашел формулу для решения кубического уравнения. Оказалось, когда кубическое уравнение имеет три действительных корня, в формуле Кардано встречается квадратный корень из отрицательного числа.

Впервые, по-видимому, мнимые величины появились в известном труде «Великое искусство, или об алгебраических правилах» *Кардано* (1545), который счёл их непригодными к употреблению.



Кардано Джероламо

# Из истории комплексных чисел

Он же дал некоторые простейшие правила действий с комплексными числами. Выражения вида  $a+b\sqrt{-1}$ , появляющиеся при решении квадратных и кубических уравнений, стали называть «мнимыми» в XVI-XVII веках, однако даже для многих крупных ученых XVII века алгебраическая и геометрическая сущность мнимых величин представлялась неясной. Известно, например, что *Ньютон* не включал мнимые величины в понятие числа, а *Лейбницу* принадлежит фраза: «Мнимые числа — это прекрасное и чудесное убежище божественного духа, почти что амфибия бытия с небытием»

Пользу мнимых величин, в частности, при решении кубического уравнения, в так называемом неприводимом случае (когда вещественные корни выражаются через кубические корни из мнимых величин), впервые оценил *Бомбелли* (1572). Задача о выражении корней степени  $n$  из данного числа была в основном решена в работах *Муавра* (1707) и *Котса* (1722).

Символ  $i=\sqrt{-1}$  предложил *Эйлер* (1777, опубл. 1794), взявший для этого первую букву слова *imaginarius*.



Леонард Эйлер



# Из истории комплексных чисел

Он же высказал в 1751 году мысль об алгебраической замкнутости поля комплексных чисел. К такому же выводу пришел *Д'Аламбер* (1747), но первое строгое доказательство этого факта принадлежит *Гауссу* (1799). *Гаусс* и ввёл в широкое употребление термин «комплексное число» в 1831 г, хотя этот термин ранее использовал в том же смысле французский математик *Лазар Карно* в 1803 году.

Полные гражданские права мнимым числам дал *Гаусс*, который назвал их комплексными числами, дал геометрическую интерпретацию и доказал основную теорему алгебры, утверждающую, что каждый многочлен имеет хотя бы один действительный корень. Геометрическое истолкование комплексных чисел и действий над ними появилось впервые в работе *Весселя* (англ.), (1799). Первые шаги в этом направлении были сделаны *Валлисом* (Англия) в 1685 году.



Карл Гаусс

# Понятие комплексного числа

Комплексное число  $z = (a; b)$  записывают как  $z = a + bi$ .

$$i^2 = -1, \quad i \text{ — мнимая единица.}$$

Число  $Re z$  называется действительной частью числа  $z$ ,  
а число  $Im z$  — мнимой частью числа  $z$ .

Их обозначают  $a$  и  $b$  соответственно:  $a = Re z$ ,  $b = Im z$ .

## Определение:

Числа вида  $a + bi$ , где  $a$  и  $b$  — действительные числа,  $i$  — мнимая единица, называются *комплексными*.

**Пример.** Решите уравнение:

$$x^2 - 6x + 13 = 0$$

*Решение.* Найдем дискриминант по формуле

$$D = b^2 - 4ac.$$

Так как  $a = 1$ ,  $b = -6$ ,  $c = 13$ , то

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = 36 - 52 = -16;$$

Корни уравнения находим по формулам

$$x = \frac{6 - 4i}{2}; x = \frac{6 + 4i}{2}$$

Решите уравнения:

$$x^2 - 4x + 13 = 0.$$

$$9x^2 + 12x + 29 = 0.$$

# Взаимопроверка

ОТВЕТЫ:

1)  $x = \frac{4 \pm 6i}{2}$

2)

# Действия над комплексными числами

## Сравнение

$a + bi = c + di$  означает, что  $a = c$  и  $b = d$  (два комплексных числа равны между собой тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части)

## Сложение

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

## Вычитание

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

## Умножение

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + bci + adi + bdi^2 = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

## Деление

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i$$

# Сопряженные числа

Числа  $z = a + bi$  и  $\bar{z} = a - bi$  называются  
*сопряженными*

## Прокомментировать:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(2 + 3i) + (5 + i) = (2 + 5) + (3 + 1)i = 7 + 4i;$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$(5 - 8i) - (2 + 3i) = (3 - 2) + (-8 - 3)i = 1 - 11i;$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac + bd) + (ad + bc)i$$

$$(-1 + 3i)(2 + 5i) = -2 - 5i + 6i + 15i^2 = -2 - 5i + 6i - 15 = -17 + i;$$

Произведение двух чисто мнимых чисел – действительное число:

$$bi \cdot di = bdi^2 = -bd$$

Например:

$$5i \cdot 3i = 15i^2 = -15;$$

**Работа в группах**





❖  $(-2 + 3i) + (1 - 8i) = (-2 + 1) + (3 + (-8))i = -1 - 5i;$

❖  $(-2 + 3i) + (1 - 3i) = (-2 + 1) + (3 + (-3))i = -1 + 0i = -1.$

❖  $(3 - 2i) - (1 - 2i) = (3 - 1) + ((-2) - (-2))i = 2 + 0i = 2.$

❖  $(2 + 3i)(2 - 3i) = 4 - 6i + 6i - 9i^2 = 4 + 9 = 13.$

❖  $-2i \cdot 3i = -6i^2 = 6.$

# Примеры

Произведение двух сопряженных чисел – действительное число:

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2i^2 = a^2 + b^2$$

Деление комплексного числа  $a + bi$  на комплексное число  $c + di \neq 0$

определяется как операция обратная умножению и выполняется по формуле:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i$$

Формула теряет смысл, если  $c + di = 0$ , так как тогда  $c^2 + d^2 = 0$ , т. е. деление на нуль и во множестве комплексных чисел исключается.

Обычно деление комплексных чисел выполняют путем умножения делимого и делителя на число, сопряженное делителю.


## Прокомментируйте

$$1). \quad \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{(1+i)^2}{1+1} = \frac{1+2i+i^2}{2} = i$$

$$2). \quad \frac{3+2i}{2+i} = \frac{(3+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{8+i}{2^2-i^2} = \frac{8+i}{5} = \frac{8}{5} + \frac{1}{5}i$$

Вычислите:





**«Мы приходим к выводу, что не существует никаких абсурдных, иррациональных, неправильных, необъяснимых или глухих чисел, но что среди чисел существует такое совершенство и согласие, что нам надо размышлять дни и ночи над их удивительной законченностью».**

**Симон Стевин.**

Спасибо  
за урок!

