МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Основная литература

1. *Молчанов, В. А.* Логика высказываний. – Саратов, 2014.
2. Ю. Л. Ершов, Е. А. Палютин. Математическая логика. – М., 2011.
3. *Игошин, В. И.* Математическая логика и теория алгоритмов. – М., 2010.
4. *Игошин, В. И.* Сборник задач по математической логике и теории алгоритмов. – М., 2008.

Предмет математической логики

Логика возникла в VI—IV вв. до н. э. как «анализ мышления», т.е. анализ принципов правильных рассуждений.

Основоположник логики – древнегреческий ученый Аристотель (384-322 гг. до н. э.), который в сочинениях «Аналитики» впервые изложил идею дедуктивного вывода.

ЛОГИКА (ФОРМАЛЬНАЯ)

изучает **формы,** в которых проявляются законы причинно-следственных связей, вне зависимости от содержания (смысла) тех явлений (предметов), к которым эти законы относятся.

Научные законы

Утверждения	Физика	География	Физиология
P_1	Каждый металл — проводник	В каждом южном городе летом тепло	Все люди смертны
P_2	Ртуть — металл	Сочи — южный город.	Сократ — человек
Заключение	Ртуть — проводник	В Сочи летом тепло	Сократ смертен

Общая форма всех этих законов - закон формальной логики

P_1. Каждый предмет, обладающий свойством R, обладает свойством Q.

P_2: Предмет a обладает свойством R.

Заключение: Предмет a обладает свойством Q.

Закон формальной логики в символьном виде

P_1: $(\forall x)(R(x) \Rightarrow Q(x))$.

P_2: $R(a)$

$Q(a)$.

Одна из основных задач логики - систематическая формализация и каталогизация правильных способов рассуждений.

В общем случае рассуждение - это последовательность умозаключений.

Умозаключение - способ получения новых суждений Ф из ранее известных суждений $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$. Схематически это изображается диаграммой:

$\dfrac{\Phi_1, \ldots, \Phi_n}{\Phi}$, где $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ – посылки и Ф – заключение умозаключения.

Математическая логика занимается задачами формализации правильных способов рассуждений с помощью **математического аппарата.**

Главная цель – изучение математических рассуждений с целью точного определения понятия «математическое доказательство».

Первый исследователь этого направления - немецкий математик Г.Лейбниц (1646—1716).

Этапы развития математической логики:

Английский математик Дж.Буль (1815—1864) создал алгебру логики.

Немецкий математик Г.Фреге (1848—1925) разработал логико-математические языки и теорию их осмысления (так называемую семантику).

Итальянский математик Дж.Пеано (1858—1932) изложил арифметику на языке математической логики.

В XIX веке математическая логика стала основой всех наук:

– открытие неевклидовой геометрии,
– поиски обоснования математического анализа,
– открытие парадоксов, т.е. рассуждений, приводящих к противоречиям.

Анализ парадоксов привел к созданию программы Д.Гильберта (1862—1943) обоснования математики на основе аксиоматического подхода.

Систематический подход к математике на основе математической логики впервые изложили английские математики Б.Рассел (1872—1970) и А.Уайтхед (1861—1947) в работе «Основания математики» (1910—1913).

К.Гедель (1906-1978) показал ограниченность аксиоматического подхода к обоснованию математики.

Бурное развитие математической логики и теории алгоритмов в наше время обусловлено:

- распространением информационно-коммуникационных технологий,
- необходимостью создания теоретических основ обработки и передачи информации, математического моделирования разнообразных задач и процессов.

Логика в информатике

В предыдущем примере:

- *исходные знания (база знаний):*

P_1: Каждый металл — проводник.

P_2: Ртуть — металл.

- *новые знания:*

Ртуть — проводник.

Новые знания –

результат применения закона формальной логики:

$$P_1\colon (\forall x)(R(x) \Rightarrow Q(x))$$

$$P_2\colon R(a)$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$Q(a)$$

Использована интерпретация формул закона логики:

$R(x)$ — «предмет x — металл»;

$Q(x)$ — «предмет x — проводник»;

a — «ртуть».

Другая интерпретация формул закона логики:

$R(x)$ — «предмет x — южный город »;

$Q(x)$ — «предмет x — теплый летом»;

a — «Сочи».

Знания — это представление информации в виде формальных высказываний.

Законы формальной логики преобразуют одни высказывания в другие, т.е. преобразуют информацию из одной формы представления в другую.

Законы формальной логики — это инструмент преобразования информации!

Основная задача формальной логики.

База знаний: $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$.

Предложение: ψ.

Задача (формальная): проверить, что ψ выводится из Γ по законам формальной логики.

Задача (неформальная): выяснить, является ли предложение ψ следствием утверждений базы знаний Г.

Приложение 1.

Базы знаний

(экспертные системы, Big Data и др.)

База знаний Γ — база знаний системы.

Предложение ψ — запрос к базе знаний.

Аппарат логического вывода — ядро системы анализа данных.

Приложение 2.

Семантический Web

База знаний Γ — ресурсы Интернет.

Предложение ψ — запрос к базе знаний.

Аппарат логического вывода — ядро системы анализа ресурсов.

Приложение 3.

Автоматизация научных исследований (логическое программирование)

База знаний Γ — система аксиом.

Предложение ψ — утверждение.

Аппарат логического вывода — ядро автоматической системы доказательства теорем.

Для реализации приложений необходимо:

- Создать формальный язык для представления знаний.
- Выделить необходимую систему законов формальной логики.
- Проверить корректность логических законов.
- Проверить полноту построенной системы логических законов.
- Разработать алгоритм проверки выводимости одних предложений из других по заданным логическим законам.

Логика высказываний

Высказывание - повествовательное предложение, о котором можно судить, истинное оно или ложное.

Обозначаются высказывания $A, B, C, \dots$

Истинностное значение высказывания A обозначается символом $\lambda(A)$ и определяется по формуле:

$\lambda(A)=1$, если высказывание A истинно, и

$\lambda(A)=0$, если A ложно.

Алгебра высказываний

Из высказываний путем соединения их различными способами (с помощью связок «не», «и», «или», «следует», «равносильно») можно составлять новые, более сложные высказывания.

При этом главное внимание уделяется истинностно-функциональным комбинациям, в которых истинность или ложность новых высказываний определяется истинностью или ложностью составляющих их высказываний.

Определение. *Алгеброй высказываний* называется множество всех высказываний P с логическими операциями $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.