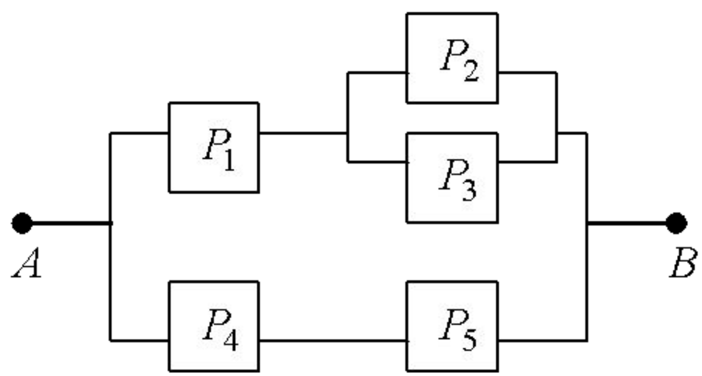
Переключательные схемы

Рассматриваются электрические ПС, представляющие собой соединенные проводниками переключатели и источники тока.

Условимся обозначать символом 1 протекание тока в проводниках и символом 0 – отсутствие тока в проводниках.



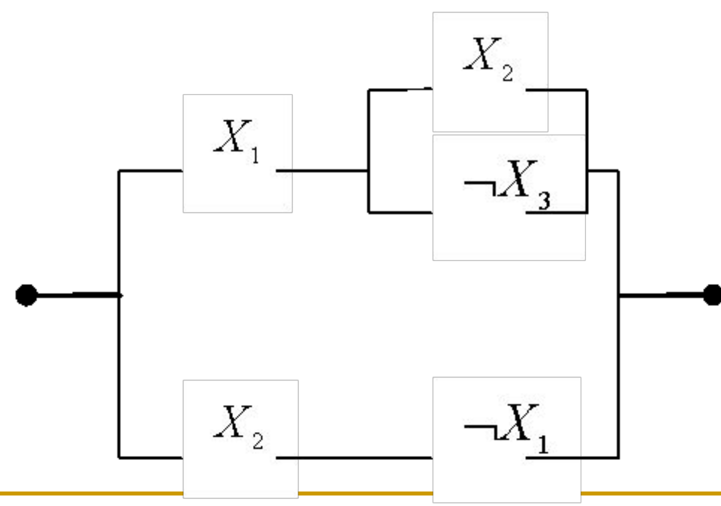
Переключатель - электромагнитное реле с контактами и индукционной катушкой, состояние которой моделируется пропозициональной переменной X: $X=1$ - в катушке идет ток, и $X=0$ - в катушке тока нет.

Контакты реле – замыкающие или размыкающие.

Через *замыкающий контакт* реле ток проходит в том и только том случае, если $X=1$ - такой контакт моделируется пропозициональной переменной X.

Через *размыкающий контакт* реле ток проходит в том и только том случае, если $X=0$ - такой контакт моделируется отрицанием пропозициональной переменной $\neg X$.

Пример. Пусть в ПС на рис.1 переключатели P_1, P_5 имеют общую катушку реле с током X_1 и переключатели P_2, P_4 имеют общую катушку реле с током X_2, причем контакты P_1, P_2, P_4 – замыкающие и контакты P_3, P_5 – размыкающие. Тогда такая ПС с помощью булевых переменных X_1, X_2, X_3 изображается следующей диаграммой:



Переключатели p, q могут быть соединены последовательно или параллельно.

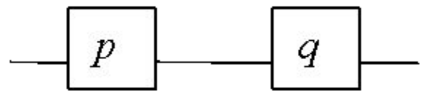


Рис.3

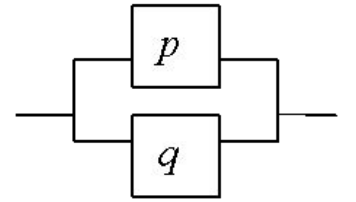


Рис.4

Через последовательно соединенные переключатели p, q ток проходит в том и только том случае, если моделирующие их формулы $\Phi = \Psi = 1$ - такое соединение моделируется формулой $\Phi \wedge \Psi$.

Через параллельно соединенные переключатели p, q ток не проходит в том и только том случае, если $\Phi = \Psi = 0$ - такое соединение моделируется формулой $\Phi \vee \Psi$.

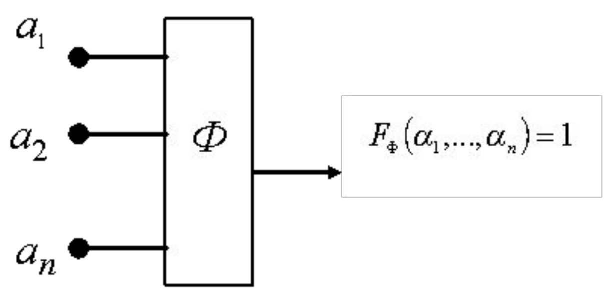
В результате любая электрическая ПС моделируется некоторой формулой Φ, которая принимает значение 1 в том и только том случае, если в ПС идет ток.

Соответствующая такой формуле Φ булева функция F_{Φ} называется *функцией проводимости ПС*, так как она показывает, при каких значениях булевых переменных (т.е. переключателей данной схемы) в ПС идет электрический ток.

С другой стороны, каждая формула $\Phi = \Phi(X_1,\ldots,X_n)$ моделирует ПС с функцией проводимости F_{Φ}: эта схема так конструируется из переключателей $X_1, \neg X_1, \ldots, X_n, \neg X_n$, что в ней при значениях $X_1 = \alpha_1, \ldots, X_n = \alpha_n$ проходит ток в том и только том случае, если $F_{\Phi}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = 1$.

Переключательную схему, моделирующую формулу $\Phi = \Phi(X_1,\dots,X_n)$, можно представлять в виде устройства с n входами и одним выходом, которое преобразует входные булевы значения $X_1 = \alpha_1,\dots,X_n = \alpha_n$ в выходное булево значение $F_\Phi(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = 1$.

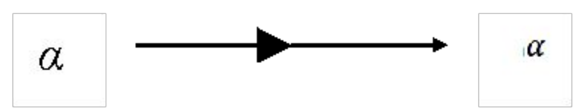
Графически такое устройство изображается диаграммой:



Простейшие формулы моделируют ПС, которые называются *логическими элементами* (или *вентилями*) и обозначаются специальными диаграммами.

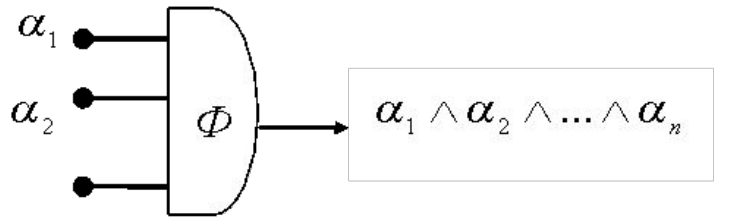
<u>Примеры</u>.

Формула $\Phi(X) = \neg X$ моделирует устройство с одним входом и одним выходом, которое изображается диаграммой



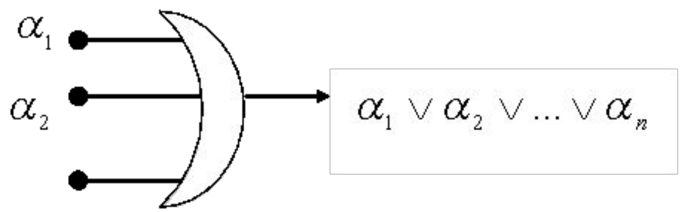
и называется *NOT-элементом.*

Формула $\Phi = \Phi(X_1 \ldots, X_n) = X_1 \wedge \ldots \wedge X_n$ моделирует устройство с n входами и одним выходом, которое изображается диаграммой



и называется *AND-элементом*.

Формула $\Phi = \Phi(X_1 \ldots, X_n) = X_1 \vee \ldots \vee X_n$ моделирует устройство с n входами и одним выходом, которое изображается диаграммой



и называется *OR-элементом.*

Примеры.

1. Построим ПС, которая моделирует сложение двух двоичных цифр и называется *полусумматором*. Такая ПС имеет два входа a_1, a_2 и два выхода $f(a_1,a_2), g(a_1,a_2)$, которые описывают два разряда суммы $a_1 + a_2$. Таблица этих булевых функций имеет следующий вид:

a_1	a_2	$f(a_1,a_2)$	$g(a_1,a_2)$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

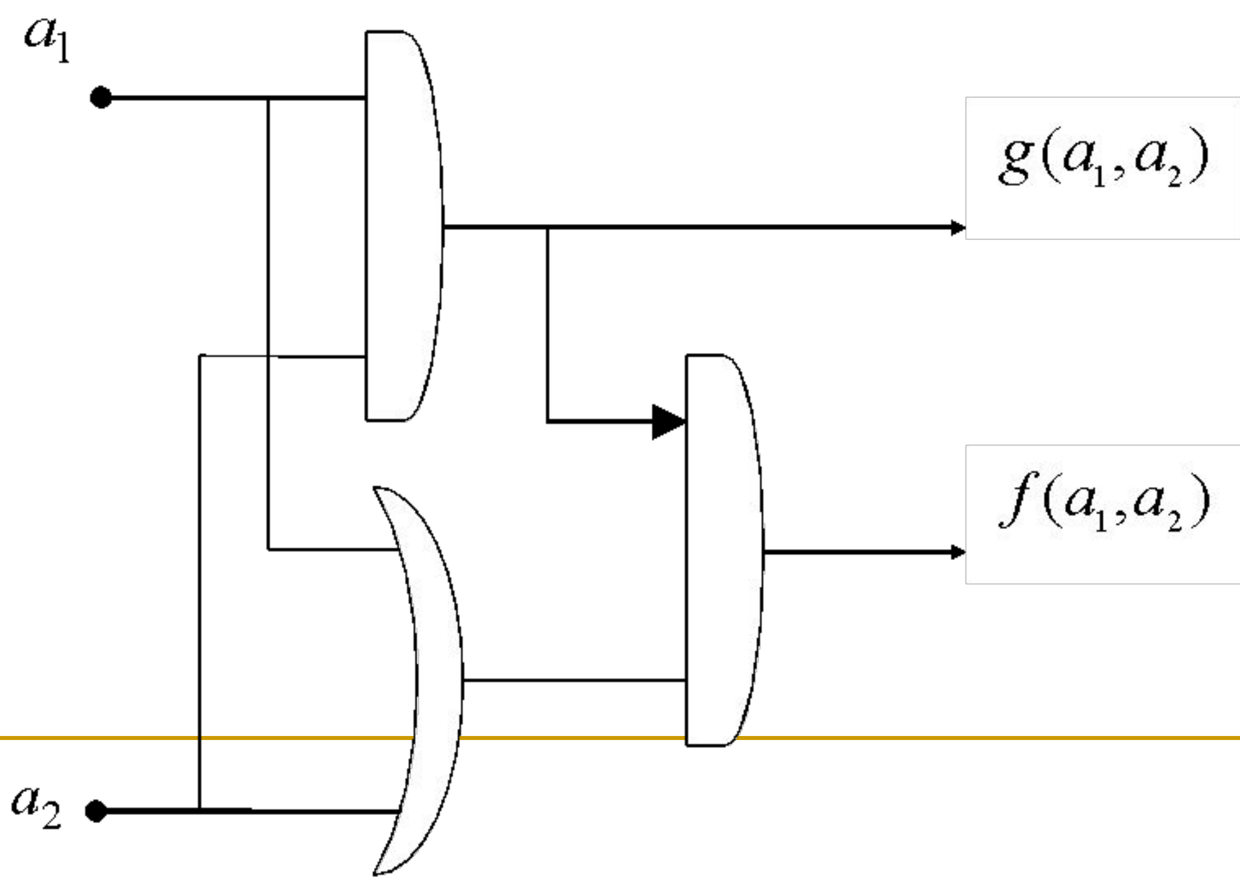
СДНФ функций:

$$\Phi_g(X_1, X_2) = X_1 \wedge X_2,$$

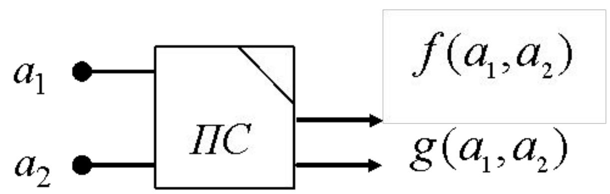
$$\Phi_f(X_1, X_2) = (\neg X_1 \wedge X_2) \vee (X_1 \wedge \neg X_2) =$$

$$= \neg(X_1 \wedge X_2) \wedge (X_1 \vee X_2) = \neg\Phi_g \wedge (X_1 \vee X_2)$$

Полусумматор представляется диаграммой:



Символически полусумматор изображается диаграммой:



2. Построим ПС, которая моделирует сложение трех двоичных цифр и называется *полным сумматором*. Такая ПС имеет три входа a_1, a_2, a_3 и два выхода $f(a_1, a_2, a_3)$, $g(a_1, a_2, a_3)$, которые описывают два разряда суммы $a_1 + a_2 + a_3$.

3. Построить ПС, которая моделирует сложение двух трехразрядных двоичных чисел $a_1 a_2 a_3, b_1 b_2 b_3$. Такая ПС имеет шесть входов $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ и четыре выхода d_1, d_2, d_3, d_4, которые описывают четыре разряда суммы $a_1 a_2 a_3 + b_1 b_2 b_3$.

Минимизация СДНФ

Рассмотрим вопрос минимизации ДНФ D. Конъюнкт q называется *импликантом* формы D, если $D \wedge q = q$. Импликанты, минимальные по числу вхождений в них булевых переменных, называются *простыми импликантами.* Дизъюнкция всех простых импликант формы D называется *сокращенной ДНФ.*

Лемма 1. Любая ДНФ D эквивалентна некоторой сокращенной ДНФ.

Сокращенную ДНФ формы СДНФ D можно получить *методом Квайна* с помощью последовательного применения следующих двух видов операций:

1) *операция склеивания,* которая для конъюнктов q и пропозициональных переменных X определяется по формуле:

$$(q \wedge X) \vee (q \wedge \neg X) = (q \wedge X) \vee (q \wedge \neg X) \vee q\,;$$

2) *операция поглощения,* которая для конъюнктов q, пропозициональных переменных X и значений $\alpha \in \{0,1\}$ определяется по формуле:

$$(q \wedge X^{\alpha}) \vee q = q\,.$$

Пример. Найдем сокращенную ДНФ для СДНФ

$$D = (\neg X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge Z) \vee$$
$$\vee (X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge Y \wedge Z).$$

В результате применения операции склеивания к различным парам конъюнктов многочлена D получим ДНФ и последующего применения операции поглощения к различным парам конъюнктов получим формулу $(X \wedge Z) \vee Y$, которая является сокращенной ДНФ формулы D.

В общем случае сокращенная ДНФ формы D не является минимальной формой, так как она может содержать *лишние* импликанты, удаление которых не изменяет булеву функцию F_D. В результате удаления таких лишних импликант получаются *тупиковые ДНФ.*

Тупиковые ДНФ с наименьшим числом вхождений в них булевых переменных называются *минимальными ДНФ.*

Лемма 2. Любая ДНФ D эквивалентна некоторой минимальной ДНФ.

Минимальная ДНФ формы D получается с помощью *матрицы Квайна*:

– столбцы матрицы помечаются конъюнктами $p_1,\dots,p_m$ формы D ;

– строки матрицы помечаются импликантами $q_1,\dots,q_k$ сокращенной ДНФ формы D ;

– на пересечении строки q_i и столбца p_j ставится символ *, если импликант q_i является частью конъюнкта p_j .

Тупиковые ДНФ - дизъюнкции тех минимальных наборов импликант, в строках которых имеются звездочки для всех столбцов матрицы Квайна.

Тупиковые ДНФ с наименьшим числом вхождений булевых переменных являются искомыми

Пример. Найдем минимальную ДНФ для формулы

$$D = (\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee$$
$$\vee (X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge Z).$$

В результате применения операций склеивания и поглощения получим $D = (\neg X \wedge \neg Y) \vee (\neg Y \wedge Z) \vee (X \wedge Z)$ - сокращенная ДНФ формулы D.

Минимальный набор импликант, в строках которых имеются звездочки для всех столбцов матрицы Квайна, состоит из конъюнктов $\neg X \wedge \neg Y$ и $X \wedge Z$. Значит, $(\neg X \wedge \neg Y) \vee (X \wedge Z)$ - минимальная ДНФ формулы D.

Следствие. Любая булева функция, не равная тождественно нулю, представима минимальной ДНФ и любая булева функция, не равная тождественно единице, представима минимальной КНФ.