

Комбинаторика

Виленкин Н.Я. Комбинаторика.

Виленкин Н.Я. Популярная комбинаторика.

Нефедов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики.

Липский В. Комбинаторика для программистов.

Андерсон Джеймс А. Дискретная математика и
комбинаторика.

Задачи комбинаторики – пересчет и перечисление элементов в конечных множествах.

Задача пересчета – сколько элементов, принадлежащих заданному конечному множеству, обладают заданным свойством.

Задача перечисления – выделение из конечного множества всех элементов, удовлетворяющих заданному свойству.

Пусть $|X| = n$. Тогда объект x может быть выбран из множества X n способами.

Правило суммы. Если объект x может быть выбран m способами, а объект y – другими n способами, то выбор «либо x , либо y » можно сделать $m + n$ способами.

Следствие. Пусть X_1, X_2, \dots, X_k – попарно непересекающиеся множества, тогда
$$\left| \bigcup_{i=1}^k X_i \right| = \sum_{i=1}^k |X_i|.$$

Правило произведения. Если объект x может быть выбран m способами и **после каждого из таких** выборов объект y в свою очередь может быть выбран n способами, то выбор упорядоченной пары $\langle x, y \rangle$, можно сделать mn способами.

Правило произведения. Если объект x может быть выбран m способами и **после каждого из таких** выборов объект y в свою очередь может быть выбран **n** способами, то выбор упорядоченной пары $\langle x, y \rangle$, можно сделать mn способами.

▣ Пусть объект x выбирается из множества $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Обозначим через X_i – множество пар $\langle x, y \rangle$ при $x = a_i$. Тогда множества X_i попарно не пересекаются и $|X_i| = n \quad \forall i = \overline{1, m}$. Следовательно,

$$\left| \prod_{i=1}^m X_i \right| = \sum_{i=1}^m |X_i| = \sum_{i=1}^m n = mn. \quad \square$$

Следствие. Если объект x_1 может быть выбран n_1 способами, **после чего** объект x_2 в свою очередь может быть выбран n_2 способами и $\forall i = \overline{2, m-1}$, после выбора объектов x_1, x_2, \dots, x_i объект x_{i+1} может быть выбран n_{i+1} способами, то выбор упорядоченной последовательности из m объектов $\langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle$ можно сделать $n_1 n_2 \dots n_m$ способами.

Формула включений и исключений.

Пусть X_i – конечные множества, $i = 1, 2, \dots, n$, $n \geq 2$. Тогда $|X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n| =$
 $= (|X_1| + |X_2| + \dots + |X_n|) - (|X_1 \cap X_2| + |X_1 \cap X_3| + \dots + |X_1 \cap X_n| + \dots + |X_{n-1} \cap X_n|) +$
 $+ (|X_1 \cap X_2 \cap X_3| + |X_1 \cap X_2 \cap X_4| + \dots + |X_{n-2} \cap X_{n-1} \cap X_n|) - \dots + (-1)^{n+1} |X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n|$.

□ Докажем методом математической индукции.

1. $n = 2$. Если $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, то $|X_1 \cap X_2| = |X_1| + |X_2|$. Если $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$, то в сумме $|X_1| + |X_2|$ каждый элемент множества $X_1 \cap X_2$ посчитан 2 раза, а значит,

$$|X_1 \cap X_2| = |X_1| + |X_2| - |X_1 \cap X_2|.$$

Пусть формула справедлива для n множеств. Тогда

$$\begin{aligned}
 & |X_1 \boxtimes X_2 \boxtimes \dots \boxtimes X_n \boxtimes X_{n+1}| = |(X_1 \boxtimes X_2 \boxtimes \dots \boxtimes X_n) \boxtimes X_{n+1}| = \\
 & = |X_1 \boxtimes X_2 \boxtimes \dots \boxtimes X_n| + |X_{n+1}| - |(X_1 \boxtimes X_2 \boxtimes \dots \boxtimes X_n) \boxtimes X_{n+1}| = \\
 & = |X_1| + |X_2| + \dots + |X_n| - (|X_1 \boxtimes X_2| + |X_1 \boxtimes X_3| + \dots + |X_1 \boxtimes X_n| + \dots + |X_{n-1} \boxtimes X_n|) + \\
 & \quad + (|X_1 \boxtimes X_2 \boxtimes X_3| + |X_1 \boxtimes X_2 \boxtimes X_4| + \dots + |X_{n-2} \boxtimes X_{n-1} \boxtimes X_n|) - \\
 & \quad + \dots + (-1)^{n+1} |X_1 \boxtimes X_2 \boxtimes \dots \boxtimes X_n| + \\
 & \quad + |X_{n+1}| - |(X_1 \boxtimes X_{n+1}) \boxtimes (X_2 \boxtimes X_{n+1}) \boxtimes \dots \boxtimes (X_n \boxtimes X_{n+1})| = \\
 & = |X_1| + |X_2| + \dots + |X_n| - (|X_1 \boxtimes X_2| + |X_1 \boxtimes X_3| + \dots + |X_1 \boxtimes X_n| + \dots + |X_{n-1} \boxtimes X_n|) + \\
 & \quad + (|X_1 \boxtimes X_2 \boxtimes X_3| + |X_1 \boxtimes X_2 \boxtimes X_4| + \dots + |X_{n-2} \boxtimes X_{n-1} \boxtimes X_n|) - \\
 & \quad + \dots + (-1)^{n+1} |X_1 \boxtimes X_2 \boxtimes \dots \boxtimes X_n| + \\
 & \quad + |X_{n+1}| - |X_1 \boxtimes X_{n+1}| - |X_2 \boxtimes X_{n+1}| - \dots - |X_n \boxtimes X_{n+1}| + \\
 & \quad + (|X_1 \boxtimes X_2 \boxtimes X_{n+1}| + |X_1 \boxtimes X_3 \boxtimes X_{n+1}| + \dots + |X_{n-1} \boxtimes X_n \boxtimes X_{n+1}|) + \\
 & \quad + \dots + (-1)^{n+1} (|X_2 \boxtimes X_3 \boxtimes \dots \boxtimes X_{n+1}| + |X_1 \boxtimes X_3 \boxtimes \dots \boxtimes X_{n+1}| + |X_1 \boxtimes X_2 \dots \boxtimes X_{n-1} \boxtimes X_{n+1}|) + \\
 & \quad + (-1)^{n+2} |X_1 \boxtimes X_2 \boxtimes \dots \boxtimes X_n \boxtimes X_{n+1}| \boxtimes
 \end{aligned}$$

Пример

В НИИ работает несколько человек, причем все они знают хотя бы по одному языку:

англ. – 6, англ. и нем. – 4, все три языка – 1.

франц. – 7, англ. и франц. – 2,

нем. – 6, нем. и франц. – 3,

1) Сколько человек в НИИ? $6 + 7 + 6 - (4 + 2 + 3) + 1 = 11$

2) Сколько человек знают только английский? $6 - (4 + 2) + 1 = 1$

3) Сколько человек знают только французский? $7 - (2 + 3) + 1 = 3$

1. Из города A в город B ведут пять дорог, а из города B в город C – три. Сколько путей, проходящих через B , ведут из города A в город C ? $5 \cdot 3$

2. На вершину горы ведут 5 дорог.

1) Сколькими способами турист может подняться на гору и потом спуститься? $5 \cdot 5$

2) Сколькими способами турист может подняться на гору и потом спуститься, если подъем и спуск происходят по разным дорогам? $5 \cdot 4$

3. В одном классе 25 учеников, а в другом 24. Сколькими способами можно выбрать:

1) одного ученика на конференцию, $25 + 24 = 49$

2) двух учеников на олимпиаду, $\frac{49 \cdot 48}{2}$

3) по одному человеку из каждого класса? $25 \cdot 24$

4. Сколькими способами можно указать на шахматной доске 2 квадрата:

1) белый и черный, $32 \cdot 32$

2) произвольного цвета? $\frac{64 \cdot 63}{2}$

Набор элементов $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}$ из множества $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ называется **выборкой** объема m из n элементов.

Выборка называется **упорядоченной**, если порядок следования элементов в ней задан. Если порядок следования элементов в выборке не является существенным, то выборка называется **неупорядоченной**.

В выборках могут допускаться или не допускаться повторения элементов.

Перестановкой называется упорядоченная выборка без повтора объема n из n элементов.

	Упорядоченная выборка	Неупорядоченная выборка
Без повторения элементов	<p>Размещения без повтора</p> $A_n^m = \begin{cases} \frac{n!}{(n-m)!}, & m \leq n \\ 0, & m > n \end{cases}$ <p>Перестановки $P_n = A_n^n = n!$</p>	<p>Сочетания без повтора</p> $C_n^m = \begin{cases} \frac{n!}{m!(n-m)!}, & m \leq n \\ 0, & m > n \end{cases},$
С повторением элементов	<p>Размещения с повтором</p> $\overline{A}_n^m = n^m$	<p>Сочетания с повтором</p> $\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = C_{n+m-1}^{n-1}$

Замечание: В случае нулевой выборки принято, что $A_n^0 = C_n^0 = \overline{A}_n^0 = \overline{C}_n^0 = 1$.

1. На вершину горы ведут 5 дорог.

1) Сколькими способами турист может подняться на гору и потом спуститься? $\overline{A}_5^2 = 5 \cdot 5$

2) Сколькими способами турист может подняться на гору и потом спуститься, если подъем и спуск происходят по разным дорогам?

$$A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = 5 \cdot 4$$

3. В одном классе 25 учеников, а в другом 24. Сколькими способами можно выбрать:

1) двух учеников на олимпиаду, $C_{49}^2 = \frac{49!}{2!47!} = \frac{49 \cdot 48}{2}$

2) 6 человек для участия в математическом бою (один из них – капитан), $49 \cdot C_{48}^5$

3) по три человека из каждого класса для дежурства в столовой? $C_{25}^3 \cdot C_{24}^3$

5. Трое ребят собрали с яблони 40 яблок. Сколькими способами они могут разделить яблоки между собой, если

1) все яблоки одинаковые, $\overline{C}_3^{40} = C_{42}^{40} = \frac{42!}{2!40!} = 21 \cdot 41$

2) все яблоки разные? $\overline{A}_3^{40} = 3^{40}$

6. Из колоды, состоящей из 52 карт, выбрали 10 карт.

Определить в скольких случаях среди них окажутся:

1) пиковая дама, $1 \cdot C_{52-1}^{10-1} = C_{51}^9$

2) все четыре дамы, $C_{52-4}^{10-4} = C_{48}^6$

3) все карты одного цвета, $C_{26}^{10} + C_{26}^{10}$ или $2 \cdot C_{26}^{10}$

4) все карты одной масти, $4 \cdot C_{13}^{10}$

5) ни одного туза, C_{48}^{10}

6) ровно один туз, $4 \cdot C_{48}^{10-1} = 4 \cdot C_{48}^9$

7) ровно два туза, $C_4^2 \cdot C_{48}^{10-2} = 6 \cdot C_{48}^8$

8) хотя бы один туз, $C_{52}^{10} - C_{48}^{10}$

9) не менее двух тузов? $C_{52}^{10} - C_{48}^{10} - 4 \cdot C_{48}^9$ или $C_4^2 C_{48}^8 + C_4^3 C_{48}^7 + C_4^4 C_{48}^6$

7. Найти все решения в целых неотрицательных числах уравнения

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n.$$

$$n = 5, \quad k = 3$$

$$1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \quad x_1 = 2, \ x_2 = 2, \ x_3 = 1$$

$$0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \quad x_1 = 0, \ x_2 = 0, \ x_3 = 5$$

$$1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \quad x_1 = 2, \ x_2 = 0, \ x_3 = 3$$

$$C_{n+k-1}^{k-1} = C_{n+k-1}^n$$

8. Сколько можно сделать перестановок из n элементов, в которых

1) два данные элемента a и b стоят рядом,

$$(n-1)! \cdot A_2^2 = 2(n-1)!$$

2) два данные элемента a и b **не** стоят рядом,

$$n! - A_2^2 (n-1)! = n! - 2(n-1)!$$

3) данные три элемента a , b и c не стоят рядом,

$$n! - A_3^3 (n-2)! = n! - 6(n-2)!$$

4) никакие два элемента из элементов a , b и c не стоят рядом,

$$n! - (A_3^2 (n-1)! - A_3^3 (n-2)!) = n! - 6(n-1)! + 6(n-2)!$$

5) никакие два элемента из элементов a , b , c и d не стоят рядом,

$$\begin{aligned} n! - (A_4^2 (n-1)! - A_4^3 (n-2)! + A_4^4 (n-3)!) = \\ = n! - 12(n-1)! + 24(n-2)! - 24(n-3)! \end{aligned}$$

Разбиения

Совокупность множеств X_1, X_2, \dots, X_k ($k \geq 1$) называется разбиением

множества X , если 1) $\bigcup_{i=1}^k X_i = X$, 2) $\forall i \neq j X_i \cap X_j = \emptyset$.

Разбиения могут быть упорядочены и неупорядочены.

Пример. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

1) $X_1 = \{1, 2\}$, $X_2 = \{3, 4\}$, $X_3 = \{5\}$,

2) $X_1 = \{3, 4\}$, $X_2 = \{1, 2\}$, $X_3 = \{5\}$,

3) $X_1 = \{2, 1\}$, $X_2 = \{5\}$, $X_3 = \{3, 4\}$,

4) $X_1 = \{1, 2\}$, $X_2 = \{4, 5\}$, $X_3 = \{3\}$.

Если рассматриваются неупорядоченные разбиения, то 1, 2 и 3 совпадают.

Упорядоченные разбиения

Множество X , $|X|=n$ разбивается на подмножества X_1, X_2, \dots, X_k такие, что $|X_i|=n_i, i = \overline{1, k}$. Количество таких разбиений можно вычислить по формуле:

$$C_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}.$$

Неупорядоченные разбиения

Множество X , $|X|=n$ разбивается на подмножества, среди которых m_i подмножеств с i элементами, причем $\sum_{i=1}^n m_i \cdot i = n$. Количество таких разбиений можно вычислить по формуле.

$$C_n^{1, 1, \dots, 1, 2, 2, \dots, 2, 3, 3, \dots, 3, \dots, n} = \frac{n!}{m_1! (2!)^{m_2} m_2! (3!)^{m_3} m_3! \dots (n!)^{m_n} m_n!}.$$

9. Квадрат 3x3. Сколько разных раскрасок четырьмя цветами таких, что

1-й цвет – 3 клетки,

2-й цвет – 2 клетки,

3-й цвет – 3 клетки,

4-й цвет – 1 клетка.

$$C_9^{3,2,3,1}$$

10. При игре в домино 4 игрока делят поровну 28 костей. Сколькими способами они могут это сделать?

$$C_{28}^{7,7,7,7}$$

10. Из 80 человек набирается несколько туристических группы:

- 1) Франция – 20, Англия – 30, Германия – 30, $C_{80}^{20,30,30}$
- 2) Франция – 20, Англия – 2 группы по 30 человек, $\frac{C_{80}^{20,30,30}}{2}$
- 3) Франция – 4 группы по 20 человек, $\frac{C_{80}^{20,20,20,20}}{4!}$
- 4) Франция – 5 групп по 8 человек,
Англия – 4 группы по 10 человек, $\frac{C_{80}^{8,8,8,8,8,10,10,10,10}}{5! 4!}$
- 5) Франция – 20, Англия – 3 группы по 10 человек,
Германия – 3 группы по 10 человек, $\frac{C_{80}^{20,10,10,10,10,10,10}}{3! 3!}$

Сколькими способами это можно сделать?

Перестановки с повторениями

Сколько существует размещений с повторениями $P(n_1, n_2, \dots, n_k)$ из n элементов, таких, что в выборке ровно

n_1 элементов 1-го типа,

n_2 элементов 2-го типа,

...

n_k элементов k -го типа.

☒ Каждой выборке поставим в соответствие разложение n элементов (номеров позиций) по k ящикам (типам элементов):

в 1-й ящик – элементы 1-го типа,

во 2-й ящик – элементы 2-го типа,

...

в k ящик – элементы k типа.

Получим разбиение n -элементного множества на k подмножеств с мощностями n_1, n_2, \dots, n_k . Следовательно, количество таких перестановок

$$C_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} \cdot \square$$

12.

1) У мамы 2 яблока и 3 груши. Сколькими способами она может выдавать по одному фрукту в течение 5 дней?

$$C_5^{2,3}$$

2) У мамы 2 яблока, 3 груши и 4 апельсина. Сколькими способами она может выдавать по одному фрукту в течение 9 дней?

$$C_9^{2,3,4}$$

3) У мамы 2 яблока, 3 груши и 4 апельсина. Сколькими способами она может выдавать не более чем по одному фрукту в течение 12 дней?

$$C_{12}^9 C_9^{2,3,4}$$

13. Сколько различных слов (без смысла) можно получить, переставляя буквы слова «математика».

$$C_{10}^{2,3,2,1,1,1}$$

Полиномиальная формула

$$\left(x_1 + x_2 + \dots + x_k\right)^n \equiv \sum_{m_1 + m_2 + \dots + m_k = n} C_n^{m_1, m_2, \dots, m_k} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_k^{m_k}.$$

$$\square \left(x_1 + x_2 + \dots + x_k\right)^n = \underbrace{\left(x_{\square} + x_{\square}^2 + \dots + x_{\square}\right)}_1 \underbrace{\left(x_{\square} + x_{\square}^2 + \dots + x_{\square}\right)}_2 \dots \underbrace{\left(x_{\square} + x_{\square}^2 + \dots + x_{\square}\right)}_n$$

Пусть $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ – множество номеров скобок.

Каждому многочлену $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_k^{m_k}$ поставим в соответствие разбиение множества A на подмножества A_1, A_2, \dots, A_k , где A_i множество номеров скобок из которых брали слагаемое x_i .

Тогда количество одинаковых слагаемых $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_k^{m_k}$ будет $C_n^{m_1, m_2, \dots, m_k} \square$.

Круглый стол

Сколькими способами n человек могут сесть за круглый стол.

	КОМПЛЕКСНЫЙ ОБЕД В СТОЛОВОЙ НА ПЕРЕМЕНЕ	НОВОГОДНИЙ ВЕЧЕР В ДОРОГОМ РЕСТОРАНЕ
без ограничений	$\frac{n!}{2n} = \frac{(n-1)!}{2}$	$n!$
a и b должны сидеть рядом	$2 \frac{(n-2)!}{2} = (n-2)!$	$2 \cdot n \cdot (n-2)!$
соседями c должны быть a и b	$2 \frac{(n-3)!}{2} = (n-3)!$	$2 \cdot n \cdot (n-3)!$

Круглый стол

Сколькими способами n человек могут сесть за круглый стол.

	КОМПЛЕКСНЫЙ ОБЕД В СТОЛОВОЙ НА ПЕРЕМЕНЕ	НОВОГОДНИЙ ВЕЧЕР В ДОРОГОМ РЕСТОРАНЕ
без ограничений	$\frac{n!}{2n} = \frac{(n-1)!}{2}$	$n!$
a и b должны сидеть рядом	$\frac{2n(n-2)!}{2n} = (n-2)!$	$2 \cdot n \cdot (n-2)!$
соседями c должны быть a и b	$\frac{2n(n-3)!}{2n} = (n-3)!$	$2 \cdot n \cdot (n-3)!$

Свойства сочетаний

$$1. C_n^0 = C_n^n = 1$$

$$2. C_n^k = C_n^{n-k}$$

$$4. C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$$

$$3. \sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$$

$$5. \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0$$

$$6. \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$$

$$7. \sum_{k=0}^n (-1)^k (C_n^k)^2 = \begin{cases} (-1)^m C_{2m}^m, & n = 2m, \\ 0, & n = 2m + 1. \end{cases}$$

$$8. \sum_{k=0}^m C_{n+k}^k = \sum_{k=0}^m C_{n+k}^n = \bar{C}_{n+2}^m$$

$$9. \sum_{k=0}^m (-1)^k C_n^k = (-1)^m C_{n-1}^m, \quad m < n$$

$$10. \sum_{k=0}^s C_m^k C_n^{s-k} = C_{m+n}^s, \quad s \leq m + n$$

$$11. \sum_{k=1}^n C_{2n}^{2k} = \sum_{k=1}^n C_{2n}^{2k-1} = 2^{n-1}$$

$$12. \sum_{k=1}^n k C_n^k x^{k-1} = n \cdot (1+x)^{n-1}$$

$$13. \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k x^{k+1}}{k+1} = \frac{(x+1)^{n+1} - 1}{n+1}$$

Комбинаторные доказательства

1. $C_n^0 = C_n^n = 1$

C_n^0 – выбрать 0 элементов, C_n^n – выбрать все элементы.

2. $C_n^k = C_n^{n-k}$

C_n^k , – выбрать k элементов, C_n^{n-k} , – выбрать $n - k$ элементов.

3. $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$

C_{n+1}^k , – из $n + 1$ элемента выбрать k элементов,

C_n^k – из $n + 1$ элемента выбрать k элементов так, чтобы среди них не было элемента a ,

C_n^{k-1} – из $n + 1$ элемента выбрать k элементов так, чтобы среди них был элемент a .

$$8. \sum_{k=0}^m C_{n+k}^k = \sum_{k=0}^m C_{n+k}^n = \bar{C}_{n+2}^m$$

Рассмотрим m -сочетания с повторениями, составленные из элементов $n+2$ типов. Количество таких сочетаний равно

$$\bar{C}_{n+2}^m = C_{m+n+1}^m.$$

Разобьем все эти сочетания на классы, отнеся к i -му классу сочетания, которые содержат ровно i элементов первого типа. Количество сочетаний для i -го класса определяется формулой $\bar{C}_{(n+2)-1}^{m-i} = \bar{C}_{n+1}^{m-i}$. Тогда общее количество m -сочетаний с повторением из элементов $n+2$ типов можно вычислить следующим образом:

$$\bar{C}_{n+2}^m = \sum_{i=0}^m \bar{C}_{n+1}^{m-i} = \sum_{i=0}^m C_{(n+1)+(m-i)-1}^{m-i} = \sum_{i=0}^m C_{n+m-i}^{m-i} = [k := m-i] = \sum_{k=0}^m C_{n+k}^k. \quad \square$$

Аналитические доказательства

$$1. C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1, \quad C_n^n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1$$

$$2. C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \Rightarrow C_n^k = C_n^{n-k}$$

$$\begin{aligned} 3. C_n^k + C_n^{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{(n-k+1)} \right) = \frac{(n+1)!}{(k-1)!(n-k+1)!} = C_{n+1}^k \end{aligned}$$

$$4. 2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot 1^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k$$

$$5. 0^n = (-1+1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot (-1)^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k$$

$$6. \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

⊠ Рассмотрим тождество $(1+x)^n (1+x)^n = (1+x)^{2n}$. Коэффициенты при x^n в левой и правой части тождества должны совпадать.

$$(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k = \dots + \binom{2n}{n} x^n + \dots$$

$$\begin{aligned} \left((1+x)^n \right)^2 &= \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \right)^2 = \left(\binom{n}{0} x^0 + \binom{n}{1} x^1 + \binom{n}{2} x^2 + \dots + \binom{n}{n} x^n \right)^2 = \\ &= \left(\binom{n}{0} x^0 + \binom{n}{1} x^1 + \binom{n}{2} x^2 + \dots + \binom{n}{n-2} x^{n-2} + \binom{n}{n-1} x^{n-1} + \binom{n}{n} x^n \right) \times \\ &\times \left(\binom{n}{n} x^n + \binom{n}{n-1} x^{n-1} + \binom{n}{n-2} x^{n-2} + \dots + \binom{n}{1} x^1 + \binom{n}{0} x^0 \right) = \\ &= \dots + \left(\binom{n}{n} \binom{n}{n} + \binom{n}{n-1} \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n-2} \binom{n}{n-2} + \dots + \binom{n}{n-2} \binom{n}{2} + \binom{n}{n-1} \binom{n}{1} + \binom{n}{n} \binom{n}{n} \right) x^n + \dots = \\ &= \left[\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \right] = \dots + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 x^k + \dots \quad \square \end{aligned}$$

$$7. \sum_{k=0}^n (-1)^k (C_n^k)^2 = \begin{cases} (-1)^m C_{2m}^m, & n = 2m, \\ 0, & n = 2m + 1. \end{cases}$$

▣ Рассмотрим тождество $(1-x)^n (1+x)^n = (1-x^2)^n$. Коэффициенты при x^n в левой и правой части тождества должны совпадать.

$$\begin{aligned} & (1-x)^n (1+x)^n = \\ & = \left(C_n^0 x^0 - C_n^1 x^1 + C_n^2 x^2 - \dots + (-1)^n C_n^n x^n \right) \times \left(C_n^0 x^0 + C_n^1 x^1 + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n \right) = \\ & = \dots + \left(C_n^0 C_n^n - C_n^1 C_n^{n-1} + C_n^2 C_n^{n-2} - \dots + (-1)^n C_n^n C_n^0 \right) x^n + \dots = \left[C_n^k = C_n^{n-k} \right] = \\ & = \dots + \sum_{k=0}^n (-1)^k (C_n^k)^2 x^n + \dots \end{aligned}$$

1. $n = 2m - 1$. Разложение $(1-x^2)^n$ не содержит нечетных степеней, поэтому коэффициент при x^n должен быть равен 0.

$$2. n = 2m: (1-x^2)^n = \dots + (-1)^m C_{2m}^m x^{2m} + \dots$$

$$10. \sum_{k=0}^s C_n^k C_m^{s-k} = C_{m+n}^s, \quad s \leq n + m$$

☒ Рассмотрим тождество

$$(1+x)^m (1+x)^n = (1+x)^{m+n}.$$

Коэффициенты при x^s в левой и правой части тождества должны совпадать.

$$\begin{aligned} (1+x)^{m+n} &= \sum_{k=0}^{m+n} C_{m+n}^k x^k = \dots + C_{m+n}^s x^s + \dots \\ (1+x)^m (1+x)^n &= \left(\sum_{k=0}^m C_m^k x^k \right) \left(\sum_{k=0}^n C_n^k x^k \right) = \\ &= \left(C_m^0 x^0 + C_m^1 x^1 + C_m^2 x^2 + \dots + C_m^m x^m \right) \times \left(C_n^0 x^0 + C_n^1 x^1 + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n \right) = \\ &= \dots + \left(C_m^0 C_n^s + C_m^1 C_n^{s-1} + C_m^2 C_n^{s-2} + \dots + C_m^s C_n^0 \right) x^s + \dots = \dots + \sum_{k=0}^s C_n^k C_m^{s-k} x^s + \dots \quad \square \end{aligned}$$

$$12. \sum_{k=1}^n k C_n^k x^{k-1} = n \cdot (1+x)^{n-1}$$

$$\boxtimes (1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k, \quad \left((1+x)^n \right)' = n(1+x)^{n-1}, \quad \left(\sum_{k=0}^n C_n^k x^k \right)' = \sum_{k=1}^n k C_n^k x^{k-1}. \quad \boxtimes$$

$$13. \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k x^{k+1}}{k+1} = \frac{(x+1)^{n+1} - 1}{n+1}$$

$$\boxtimes \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)k!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)(k+1)!(n-k)!} = \frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}.$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{C_n^k x^{k+1}}{k+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n C_{n+1}^{k+1} x^{k+1} = [l := k+1] =$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} C_{n+1}^l x^l = \frac{1}{n+1} \left(\sum_{l=0}^{n+1} C_{n+1}^l x^l - C_{n+1}^0 x^0 \right) = \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{n+1} \quad \boxtimes$$