

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ
ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

По *цели эксперимента* можно выделить

- планы *отсеивающего эксперимента*, цель которого — выявить значимые факторы;
- планы *оптимизации* (*экстремального эксперимента*), задачей которого является поиск оптимума — максимального или минимального значения параметра;
- планы *аппроксимации* для установления аналитической зависимости между параметрами и факторами.

ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

Математическая модель зависимости параметра от факторов обычно ищется в виде *полинома* первой, второй или высших степеней.

— планы **первого порядка**, предназначенные для поиска коэффициентов линей

$$Y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i X_i,$$

где Y — параметр; k — количество факторов; X_i — i -й фактор; b_0, b_i — искомые коэффициенты.

— планы **второго порядка**, в которых искомая зависимость аппроксимируется уравнением

$$Y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i X_i + \sum_{i,j=1}^c b_{ij} X_i X_j + \sum_{i=1}^k b_{ii} X_i^2,$$

ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

где j — порядковый номер, отличный от i , причем $j < i$; C — количество возможных сочетаний из k по 2:

$$C = \frac{k!}{2(k-2)!}$$

Оптимизация технологического процесса производства любой продукции содержит важный этап – определение (отыскание) математической модели или уравнения связи выходного показателя качества изделия (целевой функции, параметра оптимизации) с параметрами этого изделия или технологического процесса (входными факторами).

ПАРАМЕТРЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Прежде всего, необходимо выбрать зависимую переменную y , которую впредь будем называть целевой функцией или параметром оптимизации, за который принимают один из показателей качества продукции либо по каждой технологической операции отдельно, либо по всему технологическому процессу сразу.

Например,

- минимизация расхода материала на единицу выпускаемой продукции при сохранении качества;
- сокращение время обработки в целом или на отдельных операциях;
- снижение трудовых затрат на единицу продукции;
- улучшение показателей надежности и др.

ПАРАМЕТРЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Параметр оптимизации должен соответствовать следующим требованиям:

- *параметр должен измеряться при любом изменении (комбинации) режимов технологического процесса;*
- *параметр должен быть статистически эффективным, то есть измеряться с наибольшей точностью;*
- *параметр должен быть информационным, то есть всесторонне характеризовать технологический процесс (операцию);*
- *параметр должен иметь физический смысл, то есть осуществляться возможность достижения полезных результатов при соответствующих условиях процесса;*
- *параметр должен быть однозначным, то есть должна минимизироваться или максимизироваться только одна целевая функция.*

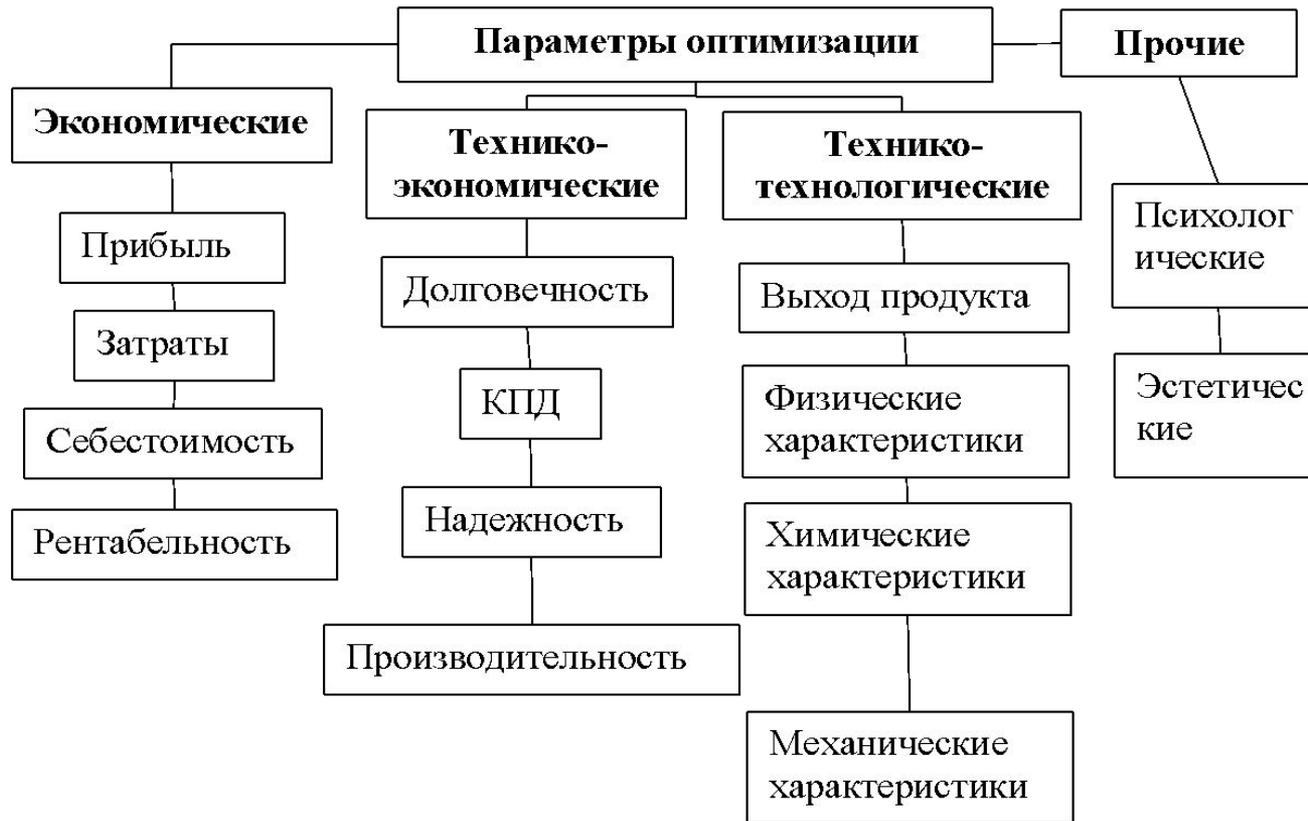
ПАРАМЕТРЫ ОПТИМИЗАЦИИ

В тех случаях, когда оптимизироваться должны две целевые функции (P и W), их можно объединить в один параметр оптимизации посредством линейной комбинации. В этом случае целевая функция имеет вид ,

$$y = \Psi_1 P + \Psi_2 W$$

где Ψ_1 и Ψ_2 – весовые коэффициенты.

ПАРАМЕТРЫ ОПТИМИЗАЦИИ



ФАКТОРЫ ОПТИМИЗАЦИИ

За фактор оптимизации принимают контролируемую величину объекта (изделия, процесса, операции), то есть величину, характеризующую то или иное свойство объекта или режим технологического оборудования. Эта величина, числовое значение которой измеряется в пределах (границах) изменения, должна влиять на параметр оптимизации.

В качестве факторов можно выбирать только контролируемые и управляемые переменные, т.е. такие, которые исследователь может поддерживать постоянными в течение каждого опыта на заданном уровне. В число факторов должны быть включены параметры процесса, оказывающие наиболее сильное влияние на функцию отклика.

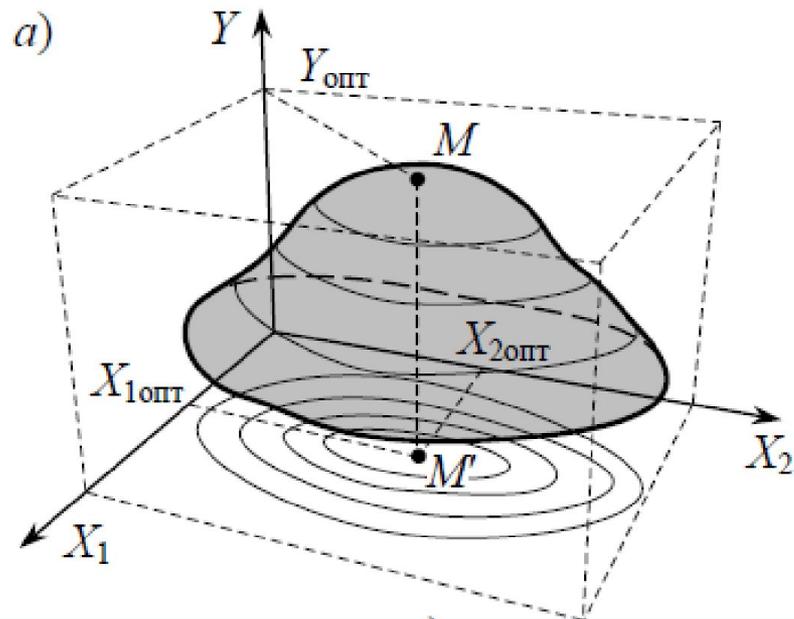
ФАКТОРЫ ОПТИМИЗАЦИИ

К факторам предъявляются требования:

- Фактор должен **оказывать влияние** на параметры оптимизации;
- Фактор **не** должен быть **коррелирован** с другими факторами;
- Фактор должен быть **количественным**;
- Совместимость – при всех сочетаниях их уровней эксперимент можно поставить и он будет **безопасным**;
- Операциональность – экспериментатору должно быть известно, как, где, каким прибором и с **какой точностью** контролировать величину фактора;
- Управляемость – экспериментатор должен иметь возможность устанавливать значение уровня фактора **по своему усмотрению**;
- Точность установления уровня фактора должна быть существенно, по крайней мере на порядок, **выше точности определения параметра**;
- **Однозначность** воздействия фактора на объект исследования.

ЭКСТРЕМАЛЬНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

Целью исследования часто является поиск **оптимальных условий функционирования** объекта. В большинстве случаев необходимо найти сочетание факторов, соответствующее **экстремальному** (наибольшему или наименьшему) значению параметра. В случае двух факторов функция отклика $Y = f(X_1, X_2)$ может быть представлена графически поверхностью, рис а):



ЭКСТРЕМАЛЬНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

В точке M функция отклика достигает *оптимального значения* $Y_{\text{опт}}$, которому соответствует сочетание факторов $(X_{1\text{опт}}, X_{2\text{опт}})$. Проекции сечений поверхности отклика горизонтальными плоскостями на плоскость X_1OX_2 образуют *линии равного отклика*.

В случае, если удастся описать процесс уравнением второго порядка, точку экстремума можно установить, используя методы *математического анализа*. При значительной нелинейности поверхности отклика этого сделать нельзя. В последнем случае ставят *экстремальный эксперимент*.

МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ ОПТИМУМА

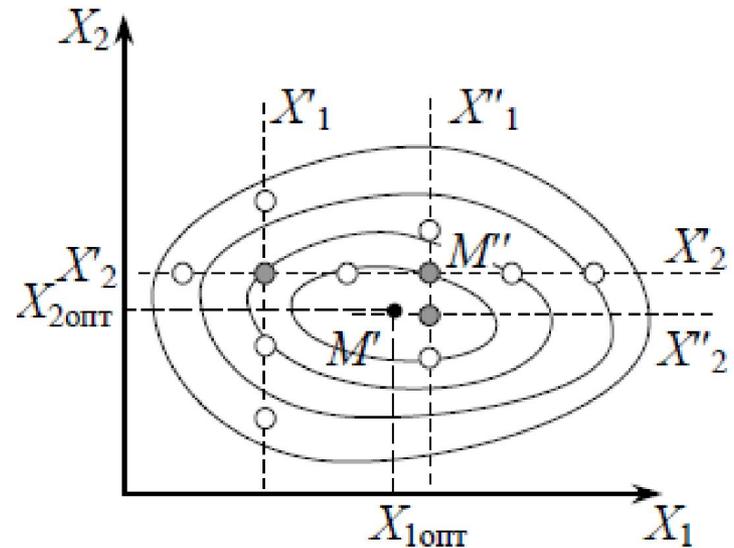
Как ставить эксперимент, чтобы найти оптимум при минимуме затрат? Существует несколько вариантов:

- перебор всех значений факторов – очень трудоемкая операция;
- случайный выбор некоторых состояний и определение откликов в надежде на оптимальный вариант. Таким способом можно попасть в оптимум быстро, но существует также вероятность перебирать их слишком долго;
- построение математической модели и предсказание по ней значений откликов, которые не изучались экспериментально

МЕТОД ПОКООРДИНАТНОГО СПУСКА

Классический метод для поиска экстремума заключается в следующем:

- 1) Фиксируя значения всех факторов, кроме одного, проводят серию опытов, варьируя выбранный фактор в пределах области его определения с некоторым шагом
- 2) Фиксируют выбранный фактор на том уровне, при котором получено максимальное значение функции отклика, после чего проводят следующую серию опытов, варьируя аналогичным образом следующий фактор.



МЕТОД ПОКООРДИНАТНОГО СПУСКА

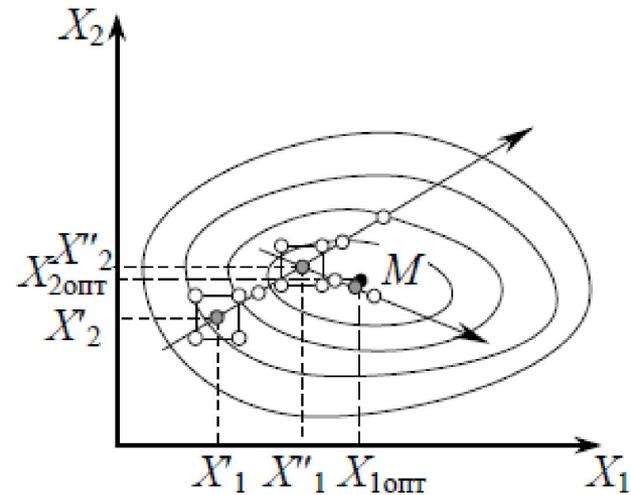
Классический метод для поиска экстремума заключается в следующем:

- 3) Проведя серии опытов для всех факторов, получают точку M'' , приближенную к оптимуму.
- 4) Если приближение к оптимуму недостаточно, проводят дополнительные серии опытов по изложенной методике, но факторы варьируются в меньшей области и с меньшим шагом. Это позволяет получить более точное приближение к точке оптимума.

Использование классического метода требует проведения весьма большого количества опытов, которое растет с увеличением числа факторов.

МЕТОД «КРУТОГО ВОСХОЖДЕНИЯ»

- 1) В области факторного пространства с центром в точке (X'_1, X'_2) , которую исследователь считает близкой к оптимуму, ставят эксперимент, находят уравнение регрессии в виде полинома первой степени и проверяют его адекватность.
- 2) По уравнению регрессии определяют градиент изменения параметра.
Градиентом называется вектор, направленный в сторону наиболее интенсивного, «крутого» возрастания значения функции.



МЕТОД «КРУТОГО ВОСХОЖДЕНИЯ»

- 1) В области факторного пространства с центром в точке (X'_1, X'_2) , которую исследователь считает близкой к оптимуму, ставят эксперимент, находят уравнение регрессии в виде полинома первой степени и проверяют его адекватность.
- 2) По уравнению регрессии определяют градиент изменения параметра. **Градиентом** называется вектор, направленный в сторону наиболее интенсивного, «крутого» возрастания значения функции.

$$\overline{gradY} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial Y}{\partial X_i} \bar{l}_i,$$

где \bar{l}_i — единичный вектор в направлении координаты X_i факторного пространства.

МЕТОД «КРУТОГО ВОСХОЖДЕНИЯ»

Поскольку функция отклика аппроксимирована полиномом первой степени в

$$Y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i X_i + \sum_{i,j=1}^c b_{ij} X_i X_j + \sum_{i=1}^k b_{ii} X_i^2$$

нетрудно видеть, что частные производные Y по факторам будут равны соответствующим коэффициентам:

$$\frac{\partial Y}{\partial X_i} = b_i \quad \text{или} \quad \overline{\text{grad}Y} = (\overline{b_1, b_2, \dots, b_k}).$$

- 3) Ставят ряд опытов в точках, лежащих на градиенте. Для этого выбирается базовый фактор, который оказывает наибольшее воздействие на параметр, т.е. для которого произведение $b_i \Delta X_i$ является наибольшим; здесь ΔX_i — интервал варьирования i -го фактора.

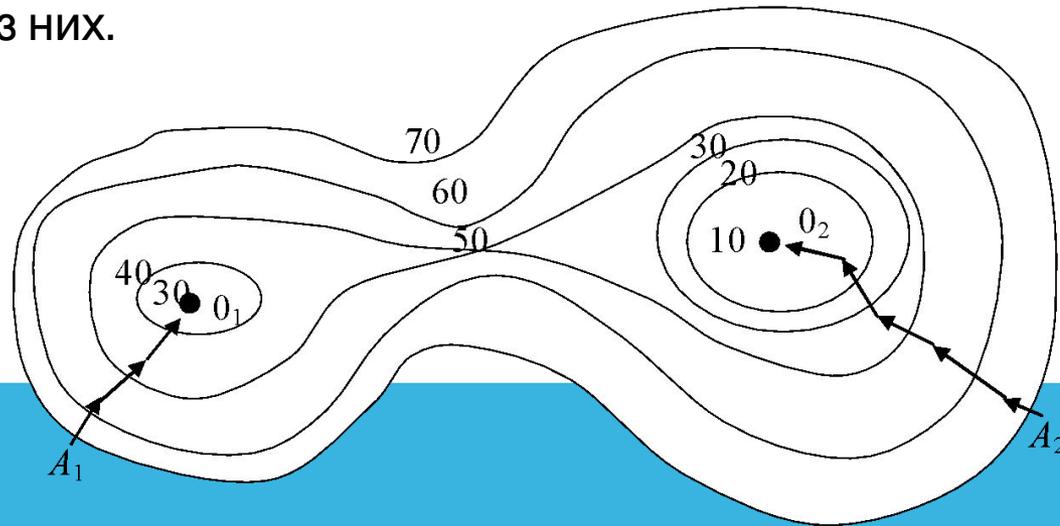
МЕТОД «КРУТОГО ВОСХОЖДЕНИЯ»

4) В точке частного экстремума ставят новый эксперимент. Находят уравнение регрессии. Проверяют его адекватность. Ищут направление нового градиента и осуществляют «крутое восхождение» по нему в соответствии с изложенным ранее.

Поиск прекращается, когда линейная модель оказывается неадекватной. Это означает, что достигнута область *оптимума*. В ней ставят *эксперимент второго порядка*, по которому уточняют положение оптимума, или просто принимают наилучший из полученных результатов.

ПРОБЛЕМА МНОГОЭКСТРЕМАЛЬНОСТИ

На рис. приведены линии уровня функции с двумя локальными минимумами в точках O_1 и O_2 . Такие функции принято называть многоэкстремальными. В нашем случае наименьшее значение функция принимает в точке O_2 . Начиная поиск минимума, из точки A_1 мы найдем только локальный минимум O_1 , так и не приходя к настоящему наименьшему значению O_2 . Самый простой способ решения состоит в том, что проводят поиск несколько раз, начиная его с разных точек. Если получаются разные результаты, выбирают наименьший из них.



ИСПОЛЬЗУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

- 1. Основы научных исследований. Курс лекций (для студентов инженерных специальностей) / Сост. Н. Г. Бойко, О. В. Федоров – Донецк: ДонНТУ, 2007. – 76 с.**