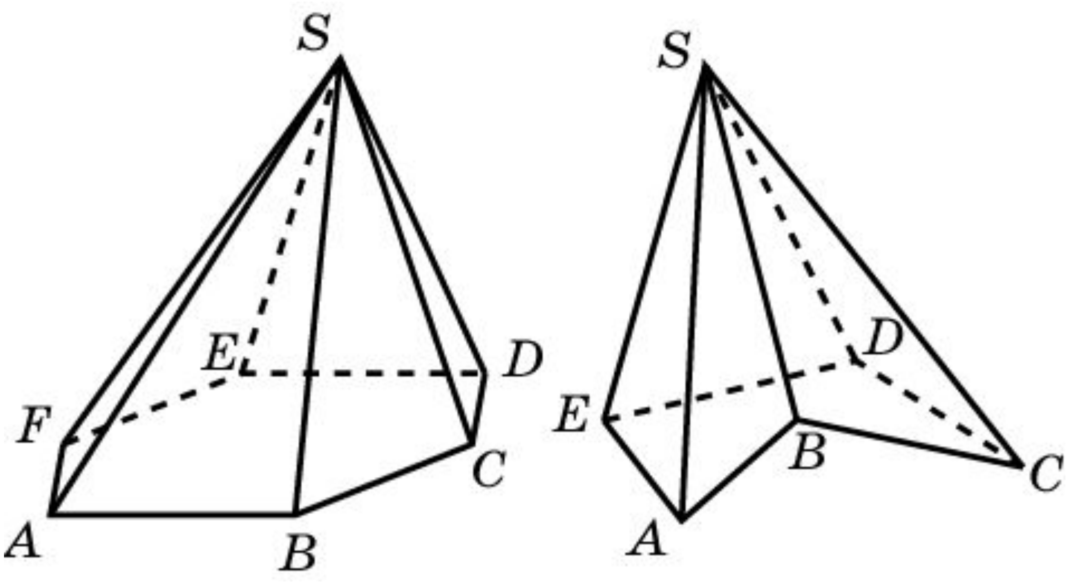
ВЫПУКЛЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Многогранник угол называется выпуклым, если он является выпуклой фигурой, т. е. вместе с любыми двумя своими точками целиком содержит и соединяющий их отрезок.

Куб, параллелепипед, треугольные призма и пирамида являются выпуклыми многогранниками.

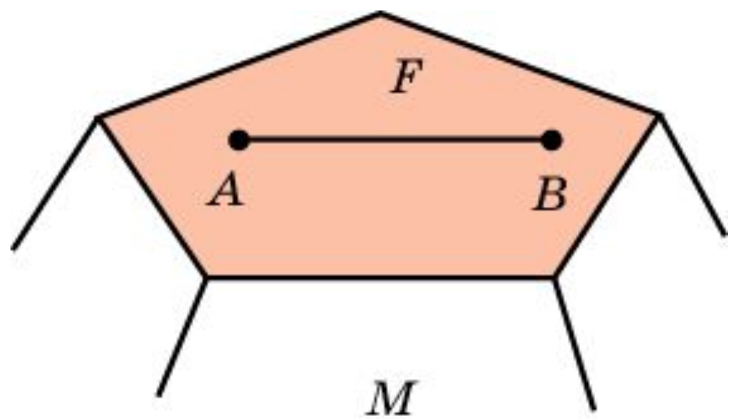
На рисунке приведены примеры выпуклой и невыпуклой пирамиды.



СВОЙСТВО 1

Свойство 1. В выпуклом многограннике все грани являются выпуклыми многоугольниками.

Действительно, пусть F - какая-нибудь грань многогранника M, и точки A, B принадлежат грани F. Из условия выпуклости многогранника M, следует, что отрезок AB целиком содержится в многограннике M. Поскольку этот отрезок лежит в плоскости многоугольника F, он будет целиком содержаться и в этом многоугольнике, т. е. F - выпуклый многоугольник.



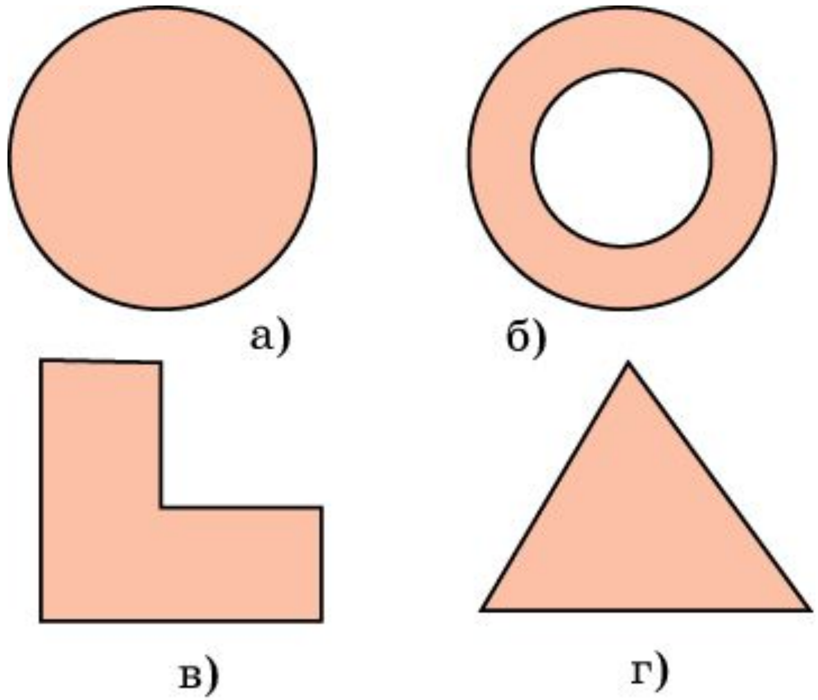
СВОЙСТВО 2

Свойство 2. Всякий выпуклый многогранник может быть составлен из пирамид с общей вершиной, основания которых образуют поверхность многогранника.

Действительно, пусть M - выпуклый многогранник. Возьмем какую-нибудь внутреннюю точку S многогранника M, т. е. такую его точку, которая не принадлежит ни одной грани многогранника M. Соединим точку S с вершинами многогранника M отрезками. Заметим, что в силу выпуклости многогранника M, все эти отрезки содержатся в M. Рассмотрим пирамиды с вершиной S, основаниями которых являются грани многогранника M. Эти пирамиды целиком содержатся в M, и все вместе составляют многогранник M.

Упражнение 1

На рисунке укажите выпуклые и невыпуклые плоские фигуры.



Ответ: а), г) – выпуклые; б), в) – невыпуклые.

Упражнение 2

Всегда ли пересечение выпуклых фигур является выпуклой фигурой?

Ответ: Да.

Упражнение 3

Всегда ли объединение выпуклых фигур является выпуклой фигурой?

Ответ: Нет.

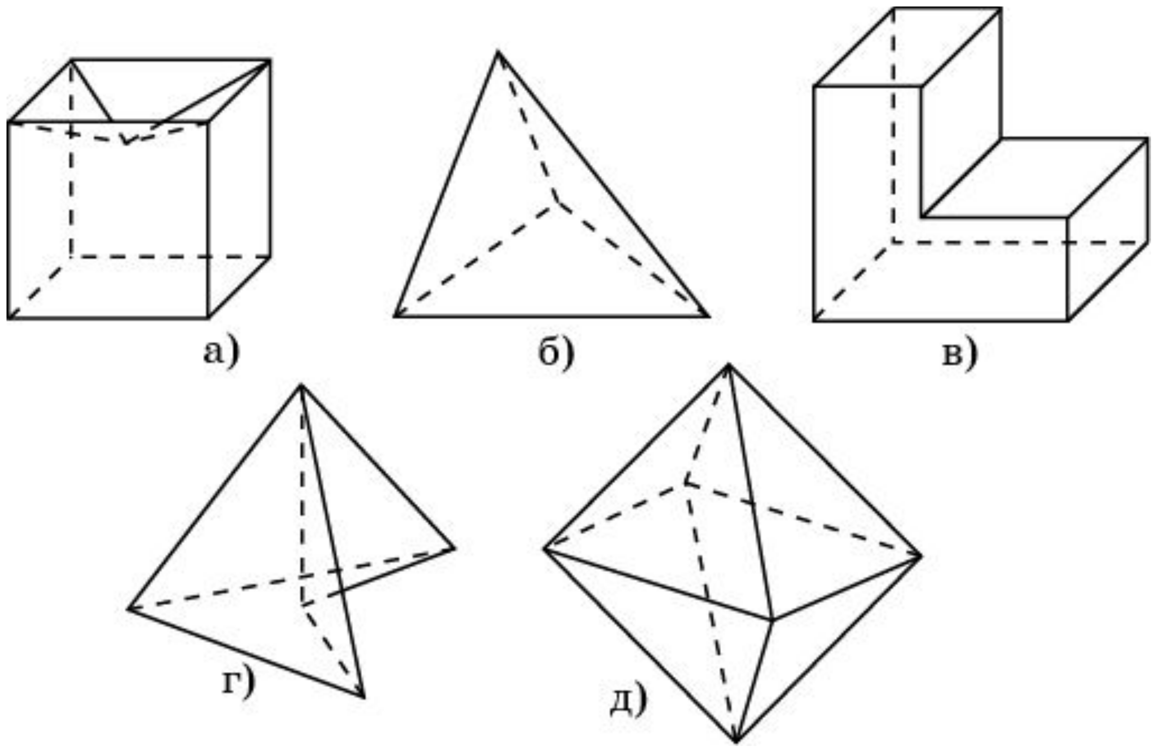
Упражнение 4

Можно ли составить выпуклый четырёхгранный угол с такими плоскими углами: а) 56^{o}, 98^{o}, 139^{o} и 72^{o}; б) 32^{o}, 49^{o}, 78^{o} и 162^{o}; в) 85^{o}, 112^{o}, 34^{o} и 129^{o}; г) 43^{o}, 84^{o}, 125^{o} и 101^{o}.

Ответ: а) Нет; б) да; в) нет; г) да.

Упражнение 5

На рисунке укажите выпуклые и невыпуклые многогранники.



Ответ: б), д) – выпуклые; а), в), г) – невыпуклые.

Упражнение 6

Может ли невыпуклый многоугольник быть гранью выпуклого многогранника?

Ответ: Нет.

Упражнение 7

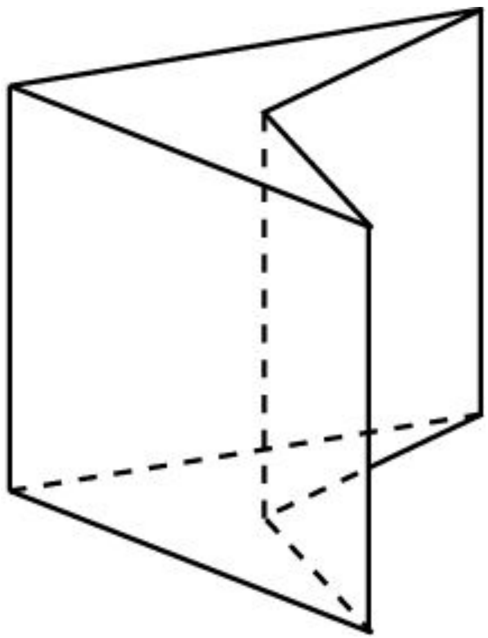
Может ли сечением выпуклого многогранника плоскостью быть невыпуклый многоугольник?

Ответ: Нет.

Упражнение 8

Нарисуйте какую-нибудь невыпуклую призму.

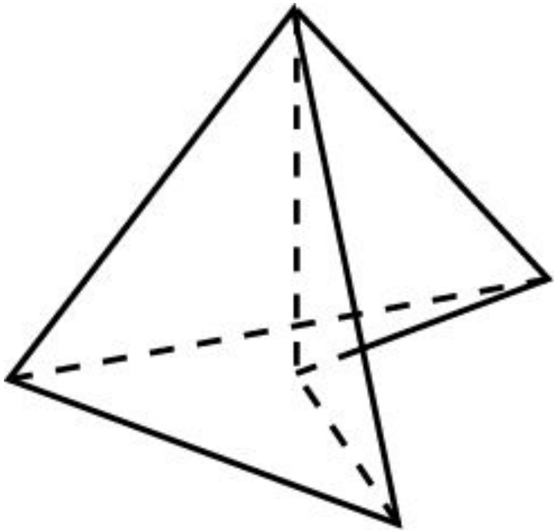
Ответ: Например,



Упражнение 9

Нарисуйте какую-нибудь невыпуклую пирамиду.

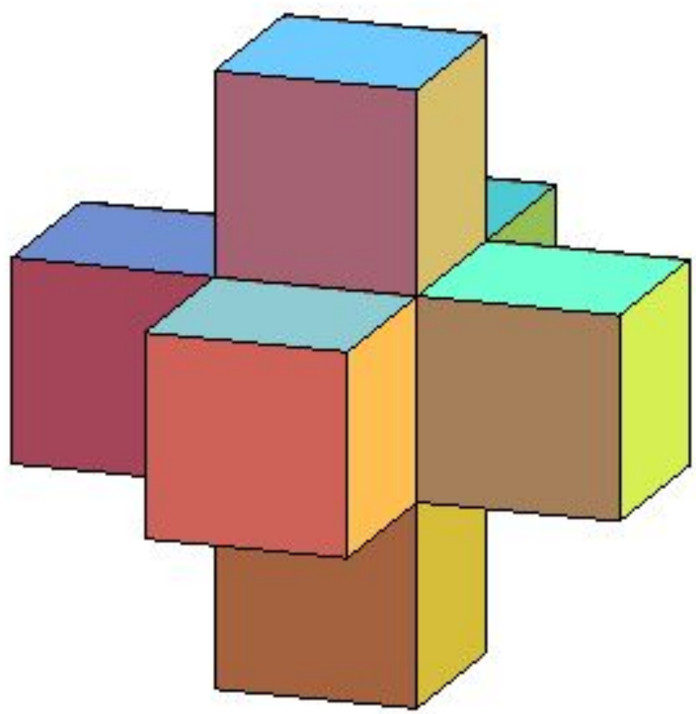
Ответ: Например,



Упражнение 10

Приведите пример невыпуклого многогранника, у которого все грани являются выпуклыми многоугольниками.

Ответ: Например, многогранник, составленный из семи кубов, называемый пространственным крестом.



Упражнение 11*

Докажите, что для любого $n > 7$ существует многогранник с n ребрами.

Решение. Если $n = 2k$ ($k > 2$), то примером многогранника с n ребрами является k-угольная пирамида.

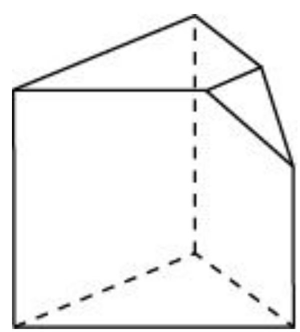
Если $n = 2k + 3$ ($k > 2$), то примером многогранника с n ребрами является k-угольная пирамида, у которой отрезан один угол при основании, как это было сделано ранее.

Упражнение 12*

Докажите, что для у любого многогранника найдутся две грани с одинаковым числом ребер. Приведите пример многогранника, у которого нет трех граней с одинаковым числом ребер

Решение. Рассмотрим грань многогранника с наибольшим числом ребер. Обозначим это число ребер *n*. К этой грани примыкают *n* граней, числа ребер которых могут быть 3, …, *n*. Таких чисел *n* – 2. Следовательно, среди этих *n* граней найдутся грани, имеющие одинаковое число ребер.

Пример многогранника, у которого нет трех граней с одинаковым числом ребер, изображен на рисунке.

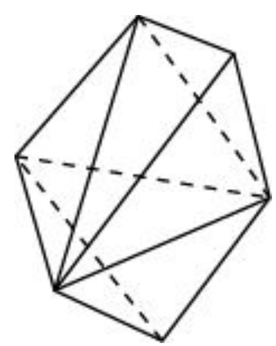


Упражнение 13*

Докажите, что для у любого многогранника найдутся две вершины, в которых сходится одинаковое число ребер. Приведите пример многогранника, у которого нет трех вершин с одинаковым числом ребер

Решение. Рассмотрим вершину многогранника с наибольшим числом ребер. Обозначим это число ребер n. Концами этих ребер являются n вершин, числа ребер которых могут быть 3, …, n. Таких чисел n – 2. Следовательно, среди этих n вершин найдутся вершины, в которых сходится одинаковое число ребер.

Пример многогранника, у которого нет трех вершин, в которых сходится одинаковое число ребер, изображен на рисунке.



Упражнение 14*

Докажите, что для у любого многогранника число граней с нечетным числом ребер четно.

Решение. Предположим, что число граней с нечетным числом ребер нечетно. Тогда общее число ребер в этих гранях будет нечетным. Общее число ребер в гранях с четным числом ребер четно. Поэтому число ребер всех граней будет нечетно. Однако каждое ребро входит ровно в две грани, и при подсчете ребер, входящих в грани, мы считали каждое ребро дважды, т.е. оно должно быть четным. Противоречие. Следовательно, число граней с нечетным числом ребер должно быть четно.

Упражнение 15*

Докажите, что для у любого многогранника число вершин, в которых сходится нечетное число ребер, четно.

Решение. Предположим, что число вершин с нечетным числом ребер нечетно. Тогда общее число ребер в этих вершинах будет нечетным. Общее число ребер в вершинах с четным числом ребер четно. Поэтому число ребер всех вершин будет нечетно. Однако каждое ребро соединяет ровно две вершины, и при подсчете ребер мы посчитали каждое ребро дважды, т.е. оно должно быть четным. Противоречие. Следовательно, число вершин с нечетным числом ребер должно быть четно.