ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ПОНЯТИЕ И СВОЙСТВА

ОГЛАВЛЕНИЕ

Определение

Существование определенного интеграла

Свойства

Формула Ньютона-Лейбница (примеры)

Способы решения интеграла:

- Метод замены переменной (пример)
- Интегрирование по частям (пример)

Приложения определенного интеграла

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

- **Определенный интеграл от функции f(x) на [a;b] – это предел её интегральной суммы при max $\Delta x_i \geq 0$, если этот предел существует, конечен и не зависит от способа разбиения [a;b] на отрезке $[x_{i-1};x_i]$ и от выбора $xi \in [x_{i-1};x_i]$**

Обозначение: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{max \Delta x \to 0} \sum_{i-1}^{n} f(Ei)\Delta xi$

Числа a и b – нижний и верхний пределы интеграла

f(x) – подынтегральная функция

СУЩЕСТВОВАНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

- Для того чтобы определенный интеграл существовал, достаточно чтобы подынтегральная функция была непрерывной на отрезке интегрирования.

1. Интеграл $\int_{-5}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ не существует, поскольку отрезок интегрирования [-5;-2] не входит в область определения подынтегральной функции (значения под квадратным корнем не могут быть отрицательными).
2. Интеграл $\int_{-2}^{3} tgx \ dx$ тоже не существует, так как в точках x=$\pm\frac{\pi}{2}$, отрезка [-2;3] не существует тангенса.

СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю: $\int_a^b f(x)dx = 0$
2. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла: $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$
3. При перестановке пределов интегрирования меняет свой знак на обратный: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)dx$
4. Интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме двух интегралов от этих функций: $\int_a^b \big(f(x) \mp g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx \mp \int_a^b g(x)dx$
5. Интеграл по всему отрезку равен сумме интегралов по частям этого отрезка. Свойство аддитивности: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)dx$

СВОЙСТВА

1. Если функция f(x) интегрируема на [a,b], a<b и f(x)≥0, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
2. Если функции f(x) и g(x) интегрируемы на [a,b], a<b и f(x)≥g(x), то $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
3. Пусть функция f(x) интегрируема на [a,b] и удовлетворяет на [a,b] условию m≤f(x)≤M. Тогда m(a-b)≤$\int_a^b f(x)dx$≤M(b-a)
4. Теорема о среднем. Если функция f(x) непрерывна на [a,b], то существует такое μ ∈ [a,b], что $\int_a^b f(x)dx = f(\mu)(b-a)$

ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА

- Теорема (формула Ньютона-Лейбница).

Пусть функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b]. Если функция Ф является произвольной первообразной для f(x) на этом отрезке, то $\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a) = \Phi|_a^b$

Доказательство. Рассмотрим разность Ф(x) − F(x), тогда (Ф(x) − F(x))′ = Ф′(x) − F′(x) = f(x) − f(x) = 0.

По свойству первообразных эта разность есть постоянная величина на [a, b], т.е. Ф(x) − F(x) = c.

Следовательно, Ф(a) − F(a) = Ф(a) − 0 = c, т.е. c = Ф(a).

С другой стороны $\mathrm{F(b)} = \int_a^b f(t)dt$.

Поэтому $\int_a^b f(t)dt$= F(b) = Ф(b) − c = Ф(b) − Ф(a).

ПРИМЕР

1. $\int_0^3 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} = 9$
2. $\int_0^1 sinx\ \ dx = -cosx|\,_0^1 = -cos1 + 1$
3. $\int_1^e \frac{dx}{x} = ln|\,_1^e = lne - ln1 = 1$
4. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = arctgx|_0^1 = arctg1 - arctg0 = \frac{\pi}{4}$

ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ

Пусть дан интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где f(x) –непрерывная на отрезке [a,b] функция. Введем новую переменную, положив x=φ(t). Пусть φ(α)=a, φ(β)=b и значения φ(t) не выходят за пределы [a,b], когда t изменяется на [α,β]. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi`(t)dt$$

Действительно, если F`(x)= f(x), то

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi`(t)dt = F(\varphi(t))|_\alpha^\beta = F\big(\varphi(\beta)\big) - F\big(\varphi(\alpha)\big) = F(b) - F(a)$$

откуда и вытекает доказываемое равенство

При вычислении определенного интеграла с помощью замены переменной нет необходимости возвращаться к старой переменной, т.е. делать обратную замену.

ПРИМЕР

Пример: $\int_{1/2}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}*\,dx$

Решение:

Применим подстановку $x=\sin(t)$**. Тогда** $dx=\cos dx, t=\arcsin x, t=\frac{\pi}{6}$ **при** $\mathrm{x}=\frac{1}{2}, t=\frac{\pi}{2}$ **при** $\mathrm{x}=1$**.**

Получаем:

$$\int_{1/2}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}*dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{1-sin^2t}}{sin^2t}*cost\ dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{cos^2t}{sin^2t}*dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-sin^2t}{sin^2t}*dt$$

$$=(-ctgt-t)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{\pi}{2}+\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

- Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке [a,b]. Тогда $(uv)` = u`v + uv`$.

Интегрируем обе части этого равенства:

$\int_a^b (uv)`dx = \int_a^b u`v\ dx + \int_a^b uv`\ dx$ так как

$\int (uv)`dx = uv + C$, то $\int_a^b (uv)`dx = uv|\,_a^b$. Получаем

$uv|\,_a^b = \int_a^b vdu + \int_a^b udv$.

Следовательно, $\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu$.

Полученное равенств, называется формулой интегрирования по частям в определенном интеграле.

ПРИМЕР

Пример: $\int_1^e x\, lnx\; dx$

Решение:

Положим $u = \ln x$, $du = xdx$. Тогда $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^2}{2}$.

Получаем:

$$\int_1^e x\, lnx\; dx = \frac{x^2}{2}\ \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}x^2 \Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$$

ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

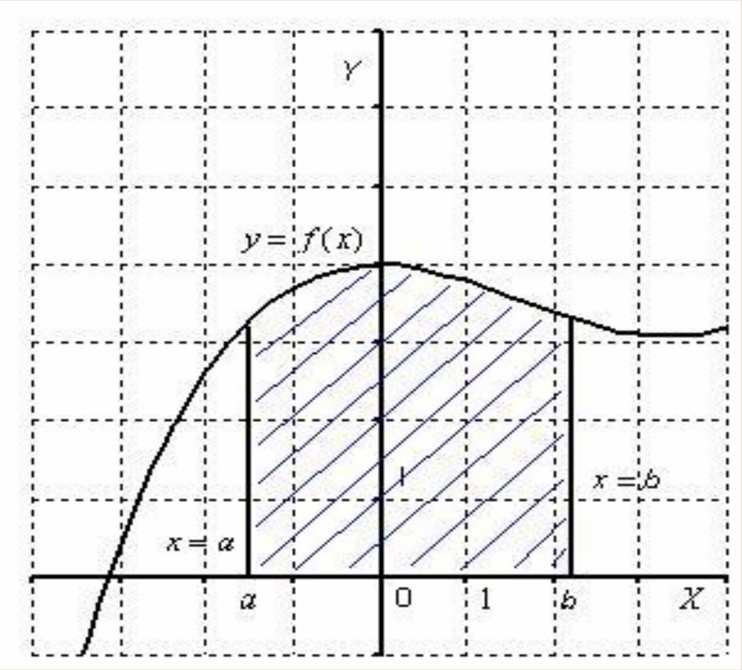
ОГЛАВЛЕНИЕ

Приложения определенного интеграла:

- Применение определённого интеграла для вычисления площадей плоских фигур (пример 1), (пример2)
- Применение определённого интеграла для вычисления объема тела вращения (пример 1), (пример2)
- Применение определённого интеграла для вычисления длины дуги плоской фигуры (пример)
- Применение определённого интеграла для вычисления площади поверхности вращения (пример)
- Список литературы

Криволинейной трапецией называется плоская фигура, ограниченная осью OX, прямыми x=b, и графиком непрерывной на отрезке [a,b] функции y=f(x), которая не меняет знак на этом промежутке. Пусть данная фигура расположена не ниже оси абсцисс:

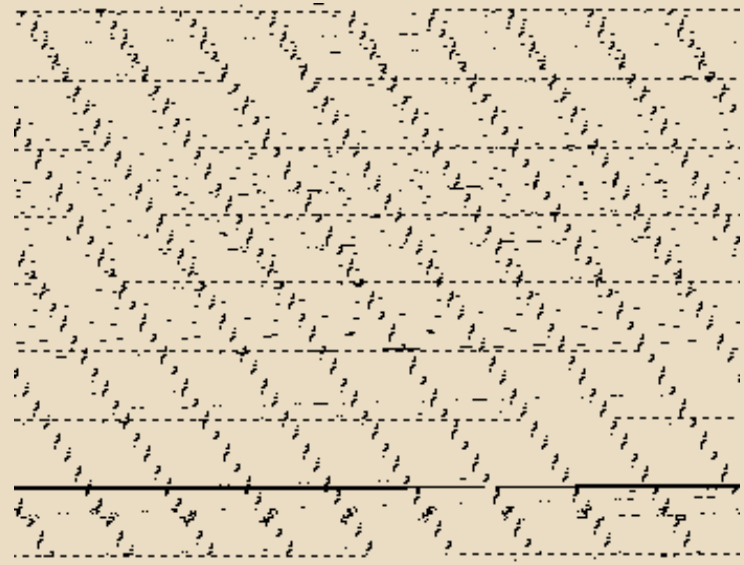
Тогда площадь криволинейной трапеции численно равна определенному интегралу $\int_a^b f(x)dx$. У любого определенного интеграла (который существует) есть геометрический смысл. Определенный интеграл – это число. С точки зрения геометрии определенный интеграл – это площадь.



То есть, определенному интегралу (если он существует) геометрически соответствует площадь некоторой фигуры.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 2,\ y = 0,\ x = -2,\ x = 1.$

Сначала, построение чертежа. Лучше построить все прямые (если они есть) и только потом – параболы, гиперболы, графики других функций.

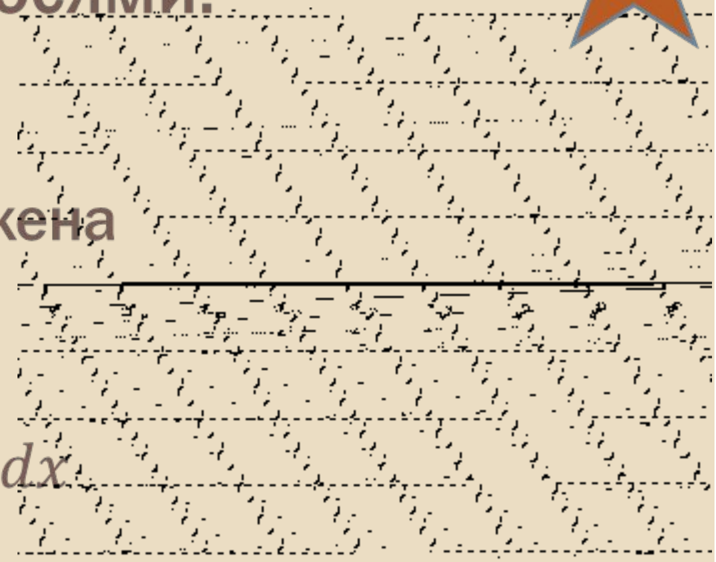


На отрезке [-2;1] график функции у=$x^2 + 2$ расположен над осью ОХ, поэтому:

$$S = \int_{-2}^{1}(x^2+2)dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2x\right)\Big|_{-2}^{1} = \frac{1}{3} + 2 - \left(-\frac{8}{3} - 4\right) = \frac{1}{3} + 2 + \frac{8}{3} + 4 = 9$$

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -e^x$, $x = 1$ и координатными осями.

Решение: Выполним чертеж:



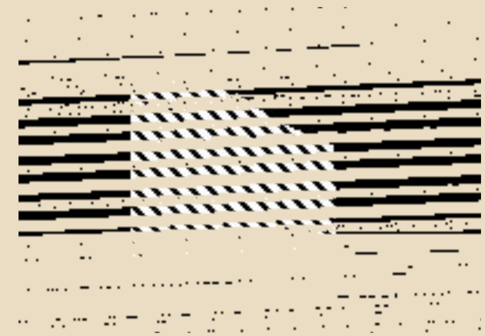
Если криволинейная трапеция расположена под осью ОХ (или, по крайней мере, не выше данной оси), то её площадь можно найти по формуле: $S = -\int_a^b f(x)dx$.

$$S = -\int_0^1 (-e^x)dx = \int_0^1 e^x dx = e^x|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

Ответ: (е-1) $\text{ед}^2 \approx 1{,}72\ \text{ед}^2$

ОБЪЕМ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

- **Объем тела, образованного вращением вокруг оси *Ox* криволинейной трапеции, ограниченной кривой** $y = f(x)$ **, отрезком оси абсцисс** $a \le x \le b$ **и прямыми** $y = a, x = b$**, вычисляется по формуле**
$V_x = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$



Объем тела, образованного вращением вокруг оси *Oy* фигуры, ограниченной кривой $x = g(y)$ **, отрезком оси ординат** $c \le y \le d$ **и прямыми** $y = c, y = d$ **, вычисляется по формуле** $V_y = \pi \int_c^d (g(y))^2 dy$

ПРИМЕР

Фигура, ограниченная линиями у=x^2 и у=$\sqrt{x}$, вращается вокруг оси Ох. Найти объем тела вращения.

Решение:

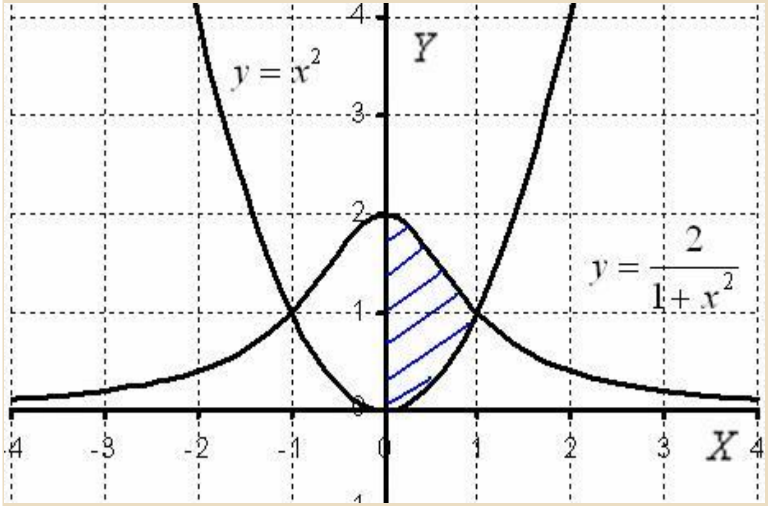
Искомый объем можно найти как разность объемов, полученных вращением вокруг оси Ох криволинейных трапеций, ограниченных линиями у=x^2 и у=$\sqrt{x}$.

Тогда V_x = $\pi\int_0^1(\sqrt{x})^2dx - \pi\int_0^1(x^2)^2dx =$

$\pi\int_0^1 xdx - \pi\int_0^1 x^4\,dx = \pi\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \pi\frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}$

ПРИМЕР

Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной кривыми y=$\frac{2}{1+x^2}$ и y=x^2 .



Для цели нахождения объема тела вращения достаточно использовать правую половину фигуры. Обе функции являются четными, их графики симметричны относительно оси , симметрична и наша фигура. Таким образом, заштрихованная правая часть, вращаясь вокруг оси , непременно совпадёт с левой незаштрихованной частью. Перейдем к обратным функциям, то есть, выразим «иксы» через «игреки»: $y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$

$y = \frac{2}{1+x^2} \Rightarrow 1 + x^2 = \frac{2}{y} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2}{y} - 1}$

$$V = V_1 - V_2$$

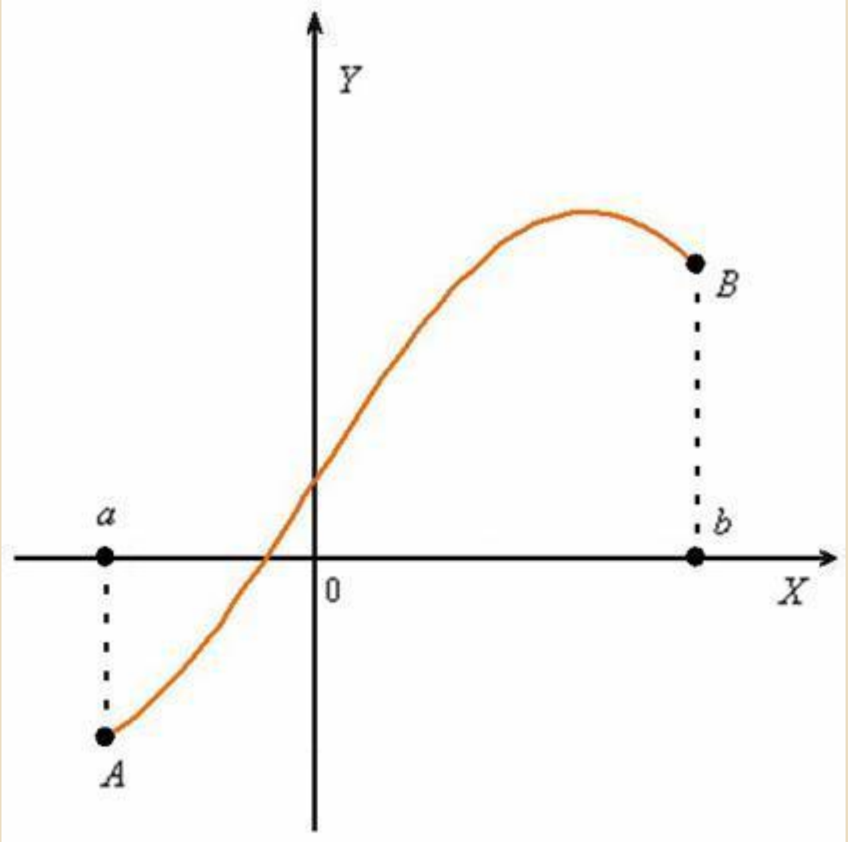
$$= \pi \int_0^1 (\sqrt{y})^2\, dy + \pi \int_1^2 (\sqrt{\frac{2}{y} - 1})^2\, dy = \frac{\pi}{2}(y^2)|_0^1 + \pi(2 \ln y - y)|\,_1^2 = \frac{\pi}{2}(1 - 0) + \pi(2 \ln 2 - 2 - 0 + 1)$$

$$= \frac{\pi}{2} + \pi(2 \ln 2 - 1) = \pi(2 \ln 2 - \frac{1}{2})$$

Ответ: V=π(2ln 2-$\frac{1}{2}$) ед^2 $\approx 2,78$ед^2

ДЛИНА ДУГИ КРИВОЙ

Пусть некоторая функция непрерывна на отрезке , и её график на данном промежутке представляет собой кривую или, что то же самое, дугу кривой :



В предположение о непрерывности производной f`(x) на [ab] , длина кривой выражается формулой:

$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y`)^2}\, dx$

Согласно геометрическому смыслу, длина не может быть отрицательной, это гарантируется неотрицательностью подынтегральной функции $\sqrt{1 + (y`)^2} \geq 0$ **(при разумеющемся условии a<b).**

ПРИМЕР

Найти длину дуги кривой $y = \ln \sin x$ от $x = \frac{\pi}{3}$ до $x = \frac{2\pi}{3}$

Решение: Вычисляем производную y`=ctg x и подставляем её в формулу $L = \int_a^b \sqrt{1 + (y`)^2}\,dx$

$$L = \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sqrt{1 + ctg^2 x}\,dx = \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{dx}{\sin x} = \ln tg\frac{x}{2} \Big|_{\pi/3}^{2\pi/3} = ln3$$

ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ КРИВОЙ

- Найдем площадь поверхности, которая образуется вращением кривой y=f(x) вокруг оси Ox , где x ∈ [a,b].

Указанную площадь можно получить вычислением определенного интеграла:

$$S_x = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f`(x))^2}dx$$

Теперь рассмотрим случай, когда вращаем кривую x=F(y) вокруг оси Oy , где y ∈ [c,d]

В этом случае площадь определяется вычислением следующего определенного интеграла:

$$S_y = 2\pi \int_c^d F(x)\sqrt{1 + (F`(y))^2}dy$$

ПРИМЕР

- Вычислить площадь поверхности тела, полученного вращением параболы $y^2 = x$ вокруг оси Ох на промежутке 0≤x≤4.

Решение: вычислим площадь поверхности, образованной вращением верхней ветви y=$\sqrt{x}$ вокруг оси абсцисс. Используем формулу $P = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + (y`)^2}dx$

Таким образом: y`=$(\sqrt{x})` = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

$$\sqrt{1 + (y`)^2} = \sqrt{1 + (\frac{1}{2\sqrt{x}})^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} = \sqrt{\frac{4x + 1}{4x}} = \frac{\sqrt{4x + 1}}{2\sqrt{x}}$$

$$P = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + (y`)^2}dx = 2\pi \int_0^4 \sqrt{x}\frac{\sqrt{4x + 1}}{2\sqrt{x}}dx == \pi \int_0^4 \sqrt{4x + 1}dx = \frac{\pi}{4}\int_0^4 (4x + 1)^{\frac{1}{2}}d(4x + 1) = \frac{\pi}{4} * \frac{2}{3}(4x + 1)^{2/3}|_0^4 = \frac{\pi}{6} * (17\sqrt{17} - 1)$$

Ответ: P=$\frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 1\right)$ ед^2 $\approx 36{,}18$ ед^2

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Клюшкин В.Л. Высшая математика для экономистов
- Кириллов А.Л. Математика для управленцев
- Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике
- http://mathprofi.ru/

Спасибо за внимание!