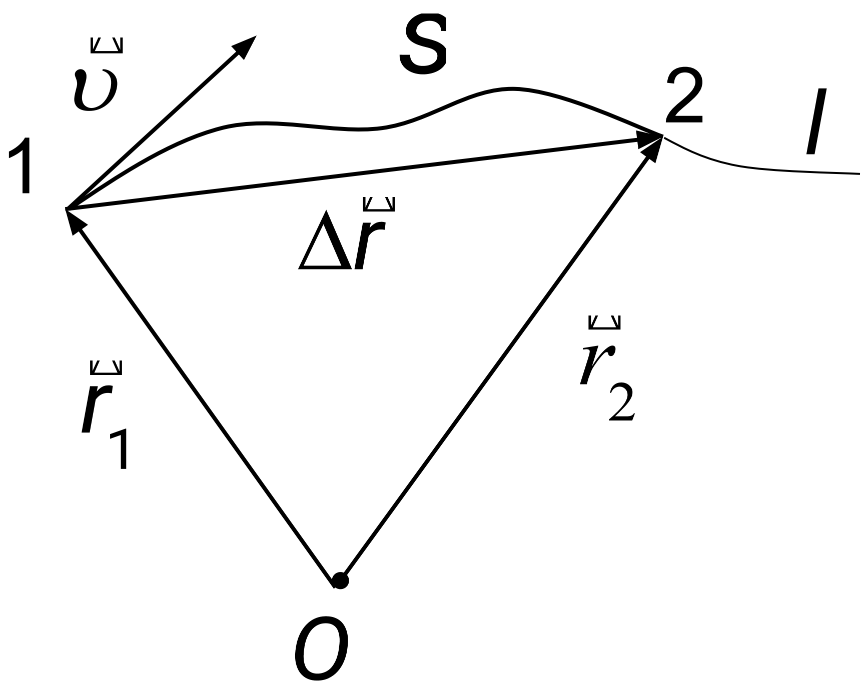
Кинематика материальной точки



Пусть за интервал времени от t_1 до t_2 материальная точка переместилась из положения 1 в положение 2.

O – начало отсчёта.

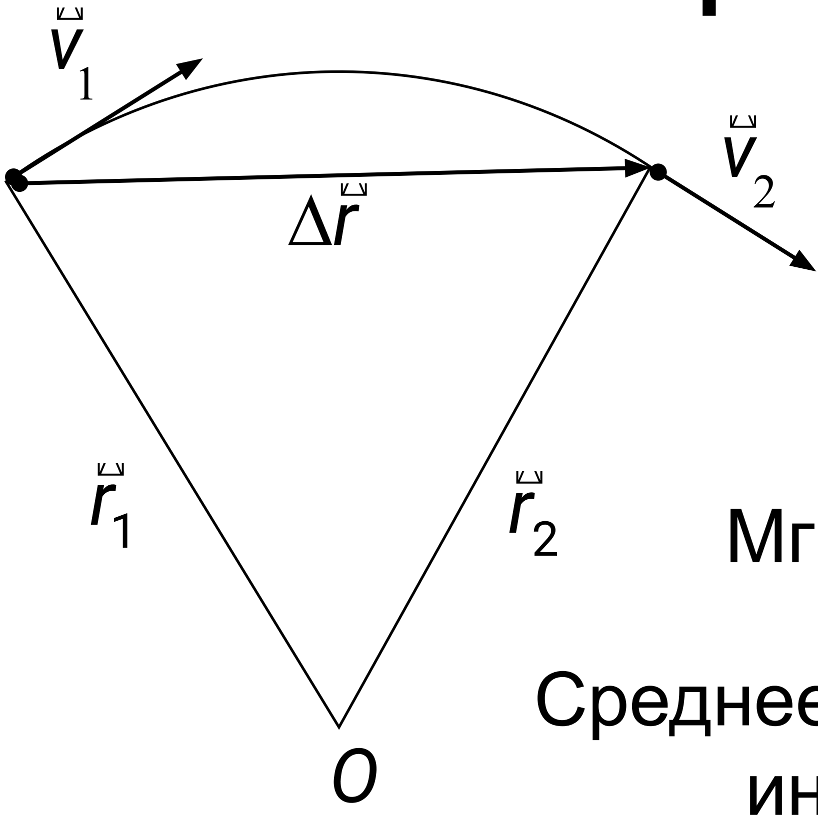
$\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ – радиусы-векторы точки в моменты времени t_1 и t_2 соответственно.

l – траектория материальной точки.

S – путь, пройденный материальной точкой за интервал времени от t_1 до t_2.

$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ перемещение материальной точки за интервал времени от t_1 до t_2.

Линейная скорость материальной точки.



Средняя скорость материальной точки в интервале времени от t_1 до t_2:

$$\vec{v}_{ср} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Мгновенная скорость: $$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Среднее ускорение материальной точки в интервале времени от t_1 до t_2:

$$\vec{a}_{ср} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_2} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

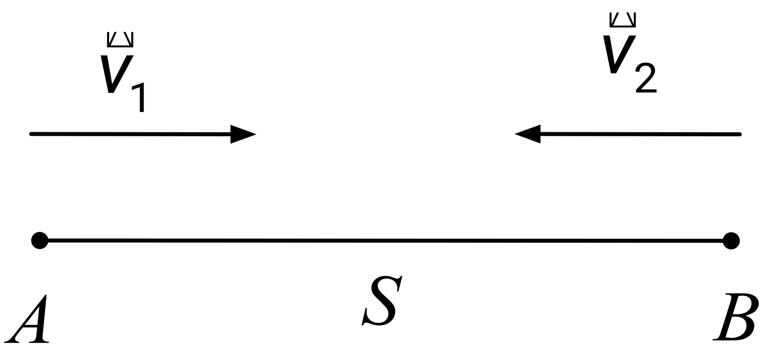
Мгновенное ускорение: $$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Средняя скорость прохождения отрезка пути.

$$v_{ср} = \frac{S}{\Delta t}$$

Средний путевой скоростью движения точки называется скалярная величина равная отношению пути, пройденного точкой за интервал времени Δt к его продолжительности.

Пример:



$$v_{ср} = \frac{2S}{\left(\frac{S}{v_1} + \frac{S}{v_2}\right)} = \frac{v_1 v_2}{v_1 + v_2}$$

Векторный способ описания движения

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

Скорость материальной точки: $$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Ускорение материальной точки: $$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt}$$

Скорость материальной точки в момент времени t:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t)\ dt,$$

где $\vec{\upsilon}_0$ – скорость материальной точки в момент времени $t=0$.

Радиус-вектор материальной точки в момент времени t:

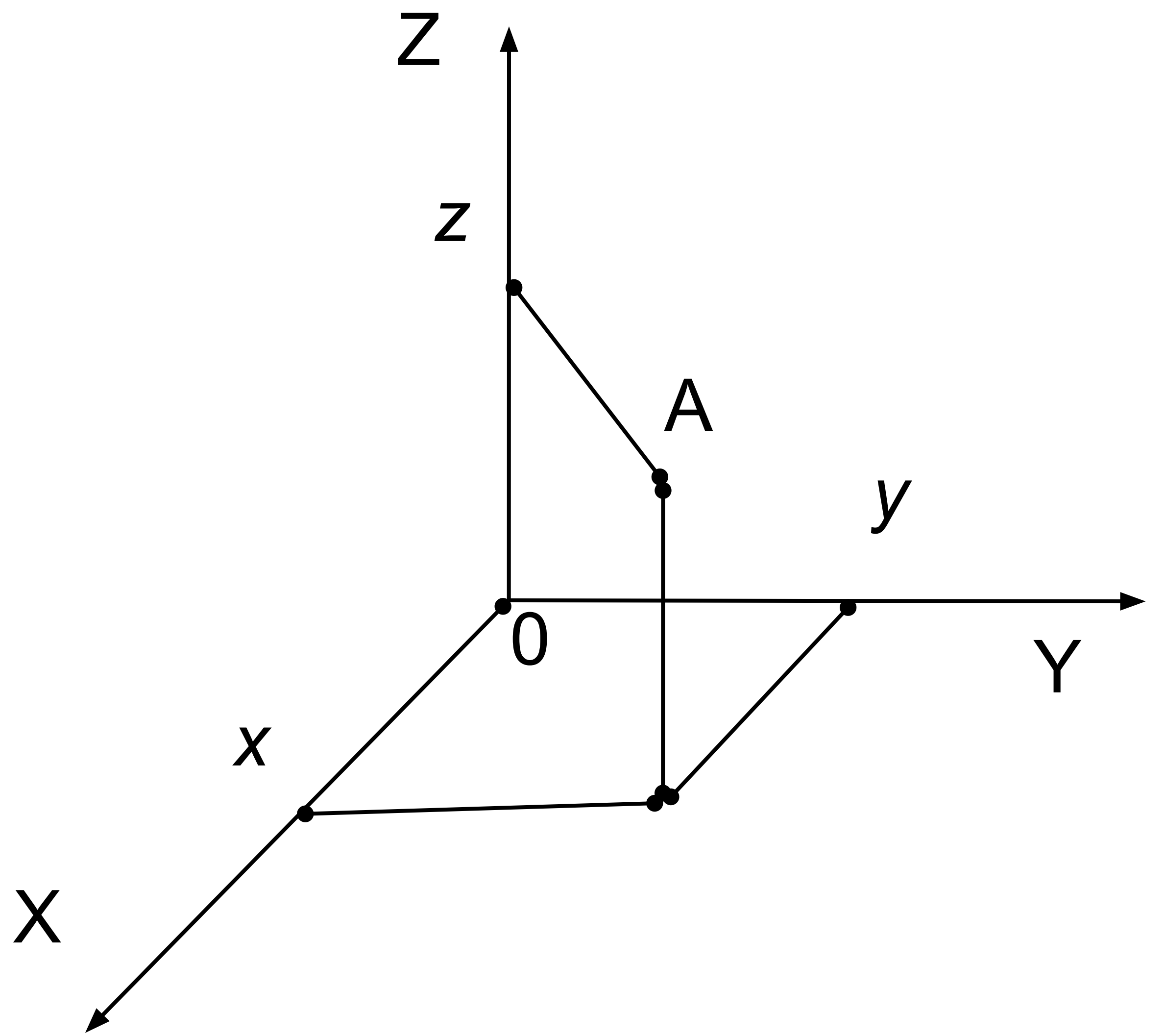
$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(t)\ dt$$

Перемещение материальной точки за интервал времени от 0 до t:

$$\Delta\vec{r} = \int_0^t \vec{v}(t)\ dt$$

Описание движения материальной точки в декартовой системе координат

I.



$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$
$$z = z(t)$$

II. Скорость материальной точки

Проекции вектора скорости на оси координат:

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

Модуль вектора скорости: $\left|\vec{v}\right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

Косинусы углов, которые вектор скорости составляет с осями *Ox*, *Oy*, *Oz*:

$$Cos\,\alpha = \frac{v_x}{\left|\vec{v}\right|}; \quad Cos\,\beta = \frac{v_y}{\left|\vec{v}\right|}; \quad Cos\,\gamma = \frac{v_z}{\left|\vec{v}\right|}$$

III. Ускорение материальной точки

Проекция вектора ускорения на оси координат:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

Модуль вектора ускорения: $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Косинусы углов, которые вектор ускорения составляет с осями *Ox*, *Oy*, *Oz*:

$$Cos\alpha = \frac{a_x}{\left|\vec{a}\right|}; \quad Cos\beta = \frac{a_y}{\left|\vec{a}\right|}; \quad Cos\gamma = \frac{a_z}{\left|\vec{a}\right|}$$

IV. Перемещение материальной точки за интервал времени от t_1 до t_2

Проекция вектора перемещения на оси координат:

$$\Delta r_x = x_2 - x_1$$
$$\Delta r_y = y_2 - y_1$$
$$\Delta r_z = z_2 - z_1$$

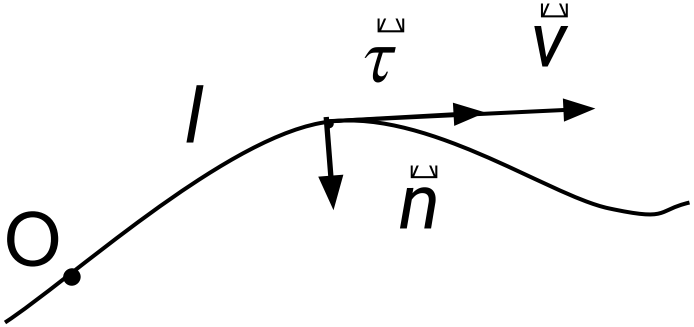
Модуль вектора перемещения:

$$\left|\Delta \vec{r}\right| = \sqrt{\Delta r_x^2 + \Delta r_y^2 + \Delta r_z^2}$$

Косинусы углов, которые вектор перемещения составляет с осями *Ox*, *Oy*, *Oz*:

$$Cos\alpha = \frac{\Delta r_x}{\left|\Delta \vec{r}\right|};\ Cos\beta = \frac{\Delta r_y}{\left|\Delta \vec{r}\right|};\ Cos\gamma = \frac{\Delta r_z}{\left|\Delta \vec{r}\right|}$$

Траекторный способ описания движения



Дуговая координата: *l=l(t)*

Скорость материальной точки: $\vec{v} = \frac{dl}{dt} \cdot \vec{\tau} = |\vec{v}| \cdot \vec{\tau}$

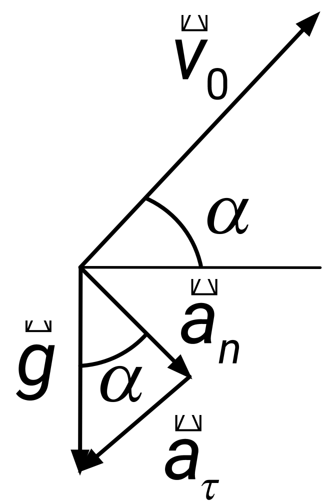
Полное ускорение материальной точки:

$$\vec{a} = \underbrace{\frac{d|\vec{v}|}{dt} \cdot \vec{\tau}}_{\vec{a}_\tau} + \underbrace{\frac{|\vec{v}| \cdot d\vec{\tau}}{dt}}_{\vec{a}_n} = \underbrace{\frac{d|\vec{v}|}{dt} \cdot \vec{\tau}}_{\vec{a}_\tau} + \underbrace{|\vec{v}|^2 \cdot \frac{1}{R_{кр}} \cdot \vec{n}}_{\vec{a}_n}$$

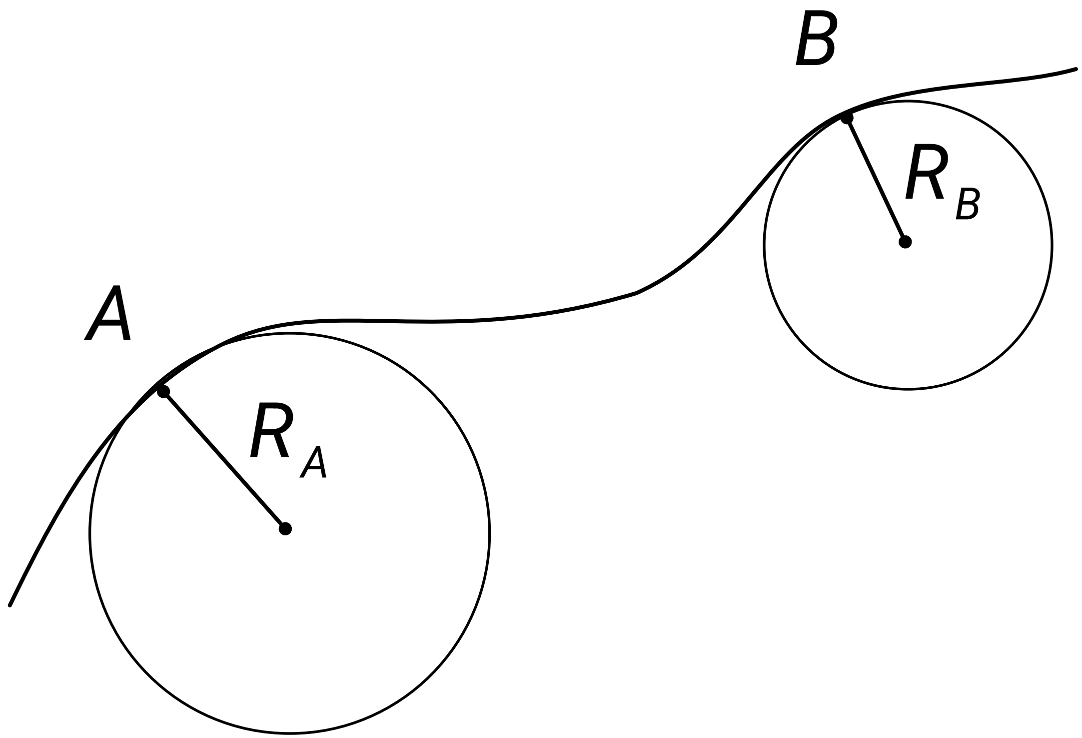
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

Если $|\vec{v}| \uparrow$, $\vec{a}_\tau \uparrow\uparrow \vec{v}$

Если $|\vec{v}| \downarrow$, $\vec{a}_\tau \uparrow\downarrow \vec{v}$



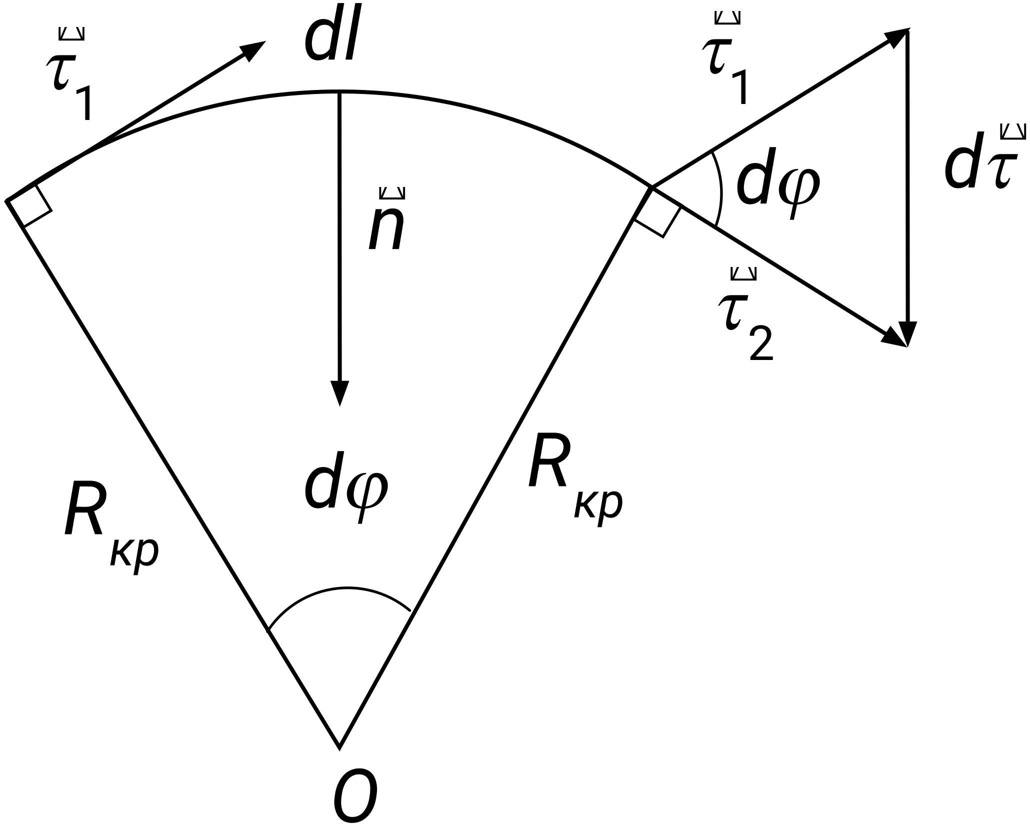
Радиус кривизны траектории



Радиус окружности, аппроксимирующий траекторию
в данной точке

Выразим нормальное ускорение материальной точки через радиус кривизны её траектории:

$$\vec{a}_n = |\vec{v}| \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt} = |\vec{v}| \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dl} \cdot \frac{dl}{dt} = |\vec{v}|^2 \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dl}$$



$$\frac{d\vec{\tau}}{dl} = \frac{|\vec{\tau}_1|}{R_{кр}} \cdot \vec{n} = \frac{1}{R_{кр}} \cdot \vec{n}$$

$$\boxed{\vec{a}_n = |\vec{v}|^2 \cdot \frac{1}{R_{кр}} \cdot \vec{n}}$$

Движение с постоянным ускорением $\vec{a} = const$.

Зависимость скорости материальной точки от времени:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$$

$\vec{v}_0$ - скорость материальной точки в момент времени t=0.

Зависимость радиуса-вектора материальной точки от времени:

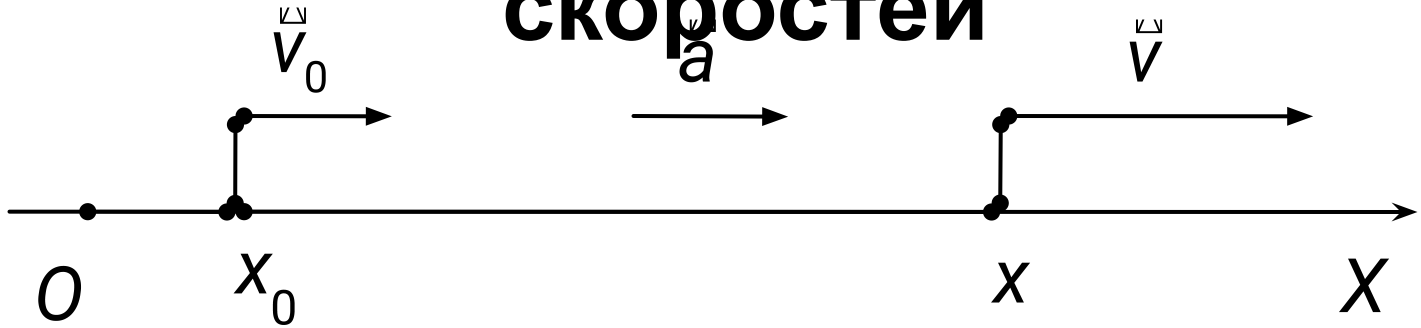
$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2}$$

$\vec{r}_0$ - радиус-вектор материальной точки в момент времени t=0.

Перемещение материальной точки за интервал времени от 0 до t:

$$\Delta\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2}$$

Движение с постоянным ускорением
Формула для разности квадратов скоростей



$$\vec{v}_x = \vec{v}_{0x} + a_x \cdot t \qquad x = x_0 + \vec{v}_{0x} \cdot t + \frac{a_x \cdot t^2}{2}$$

Приращение координаты материальной точки за интервал времени от *0* до *t*:

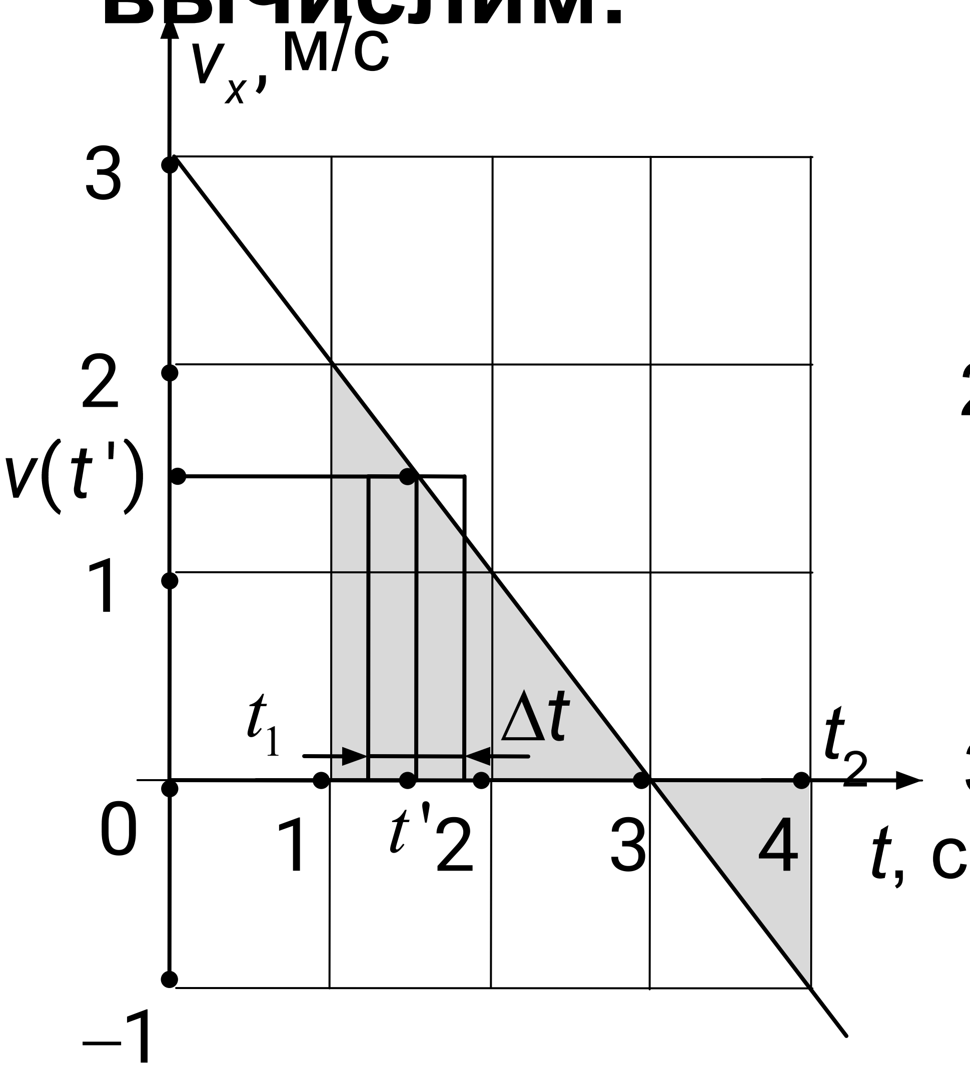
$$\Delta x = x - x_0 = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}$$

Проекция на ось Ox перемещения материальной точки за интервал времени от *0* до *t*:

$$\left(\Delta\vec{r}\right)_x = \Delta x = \frac{\vec{v}_x^2 - \vec{v}_{0x}^2}{2a_x}$$

Материальная точка движется вдоль оси Ох.

По графику зависимости $\upsilon_x(t)$ вычислим:



1). Путь, пройденный материальной точкой за интервал времени от t_1 до t_2:

$$S = 2 + 0{,}5 = 2{,}5\,м$$

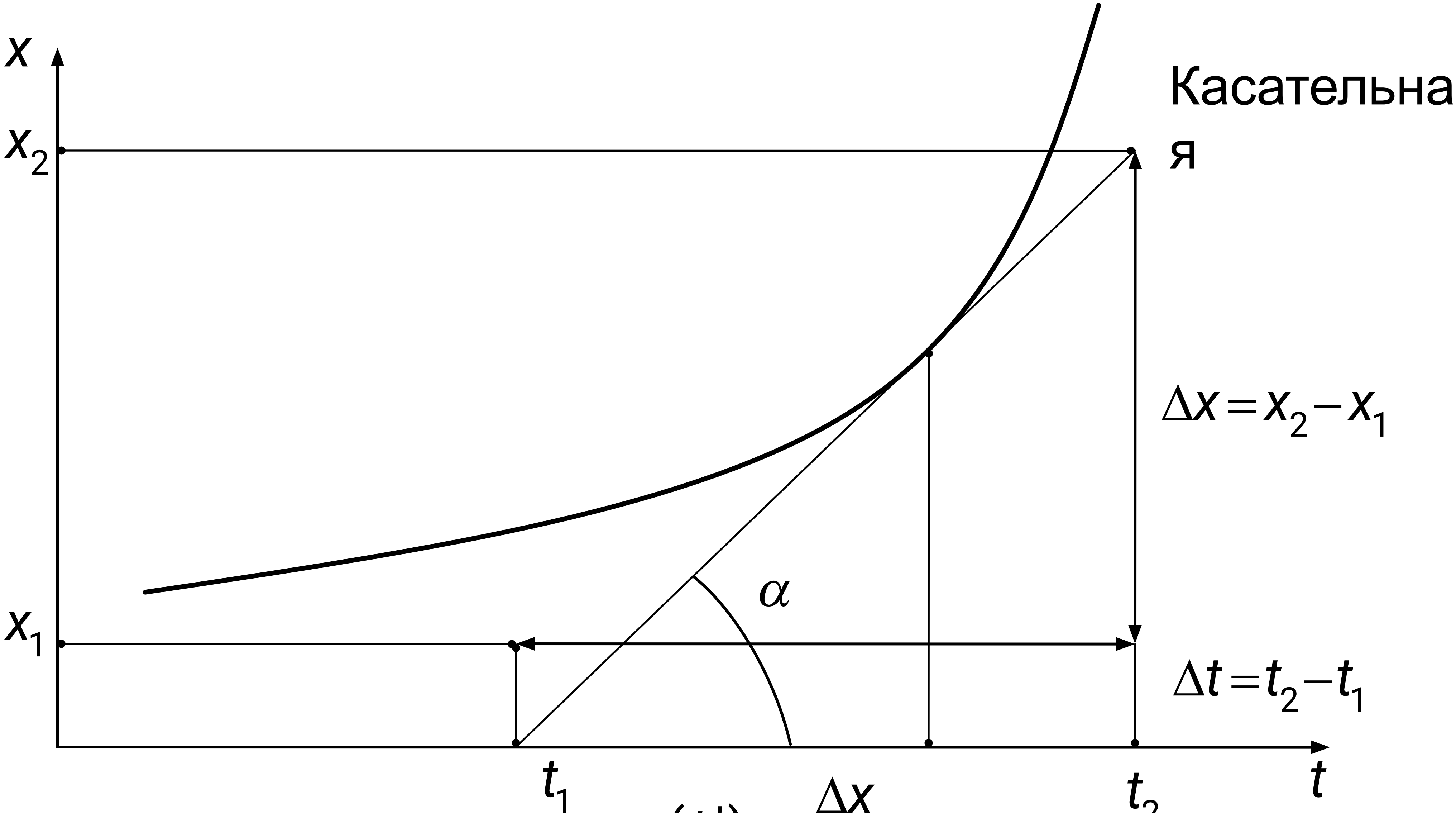
2). Приращение координаты материальной точки за интервал времени от t_1 до t_2:

$$x_2 - x_1 = 2 - 0{,}5 = 1{,}5\,м$$

3). Проекцию перемещения материальной точки за интервал времени от t_1 до t_2:

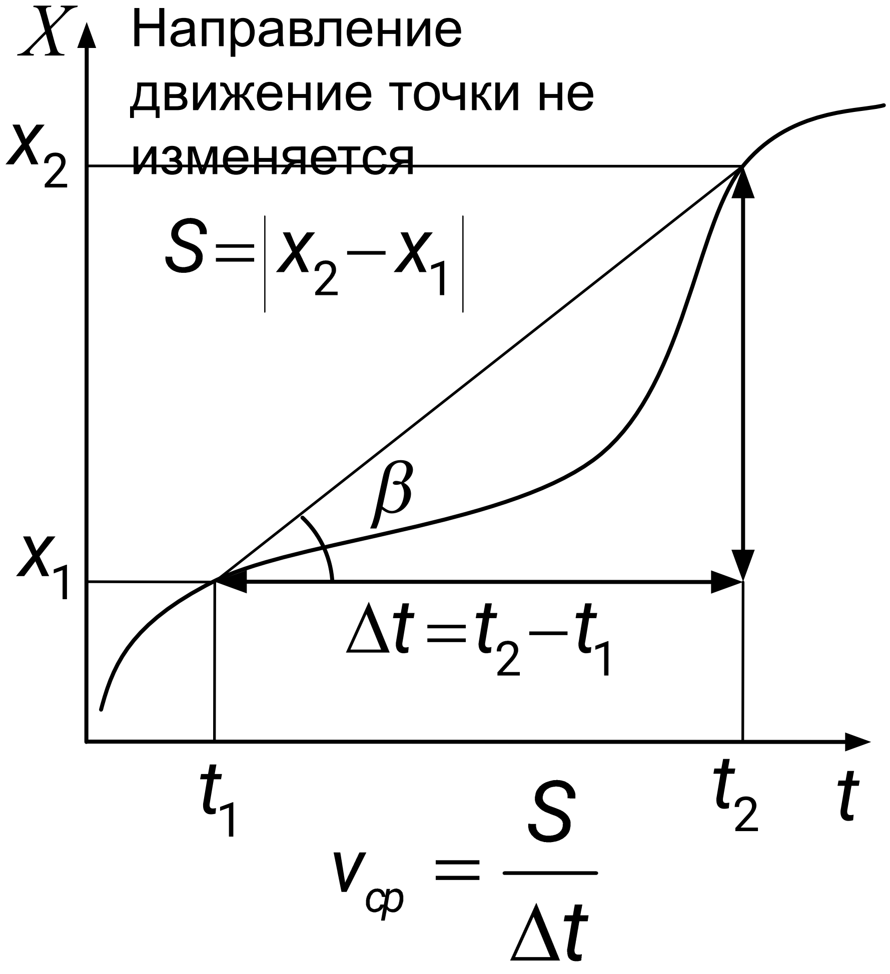
$$\left(\Delta \vec{r}\right)_x = 2 - 0{,}5 = 1{,}5\,м$$

По графику зависимости *x(t)* вычислим $v_x(t)$



$$v_x(t') = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Материальная точка движется вдоль оси Ox. По графику зависимости *x(t)* вычислим $v_{ср}$

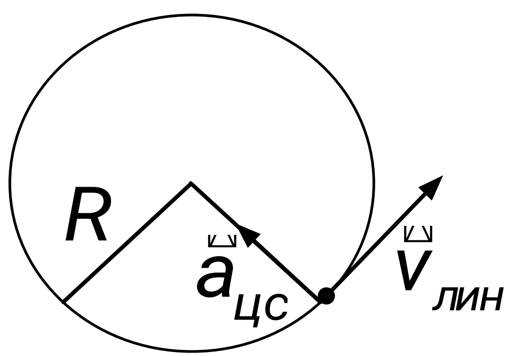


Кинематика равномерного вращения материальной точки по окружности

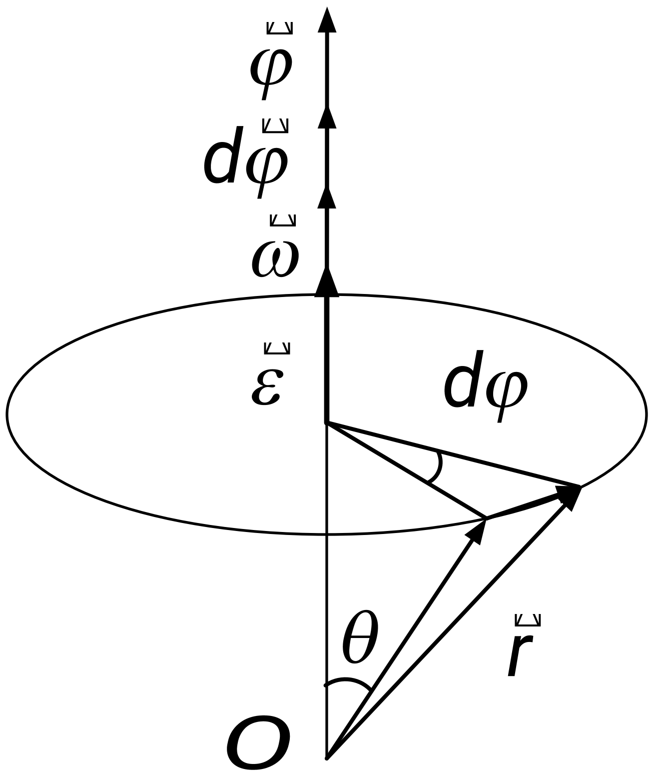
Период обращения точки: $T = \dfrac{2\pi R}{\upsilon} = \dfrac{2\pi}{\omega}$ $\quad [T] = c$

Частота обращения точки: $\nu = \dfrac{1}{T}$ $\quad [\nu] = c^{-1}$

Центростремительное ускорение: $a_{цс} = \omega^2 R = \dfrac{v^2}{R}$



Кинематика вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси.



Угол поворота: $\vec{\varphi}$

Угловая скорость:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \qquad [\omega] = \frac{рад}{с}$$

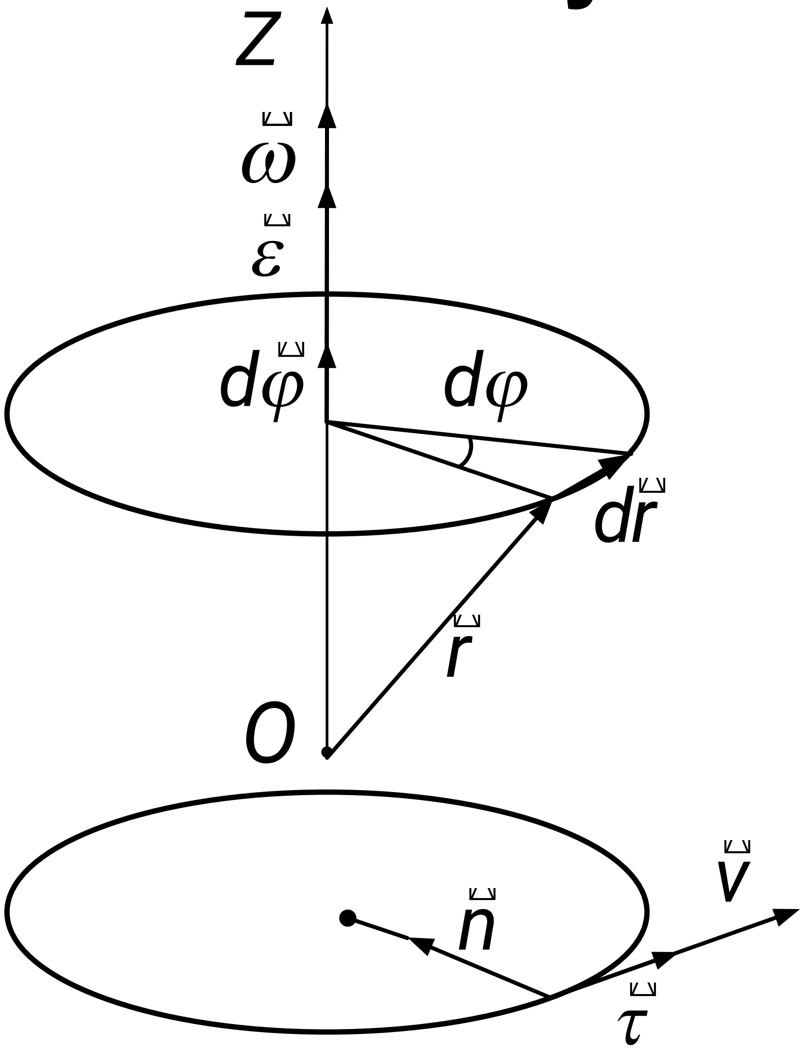
Угловое ускорение:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2} \qquad [\varepsilon] = \frac{рад}{с^2}$$

Если: $|\vec{\omega}|\uparrow, \vec{\varepsilon}\uparrow\uparrow\vec{\omega}$, если: $|\vec{\omega}|\downarrow, \vec{\varepsilon}\uparrow\downarrow\vec{\omega}$.

Если $\vec{\varepsilon} = const$, $\quad \vec{\omega}(t) = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon}\cdot t$, $\quad \Delta\vec{\varphi}(t) = \vec{\omega}_0\cdot t + \dfrac{\vec{\varepsilon}\cdot t^2}{2}$

Кинематика вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси. Связь линейных и угловых величин.



$$d\vec{r} = \left[d\vec{\varphi}, \vec{r} \right] \qquad :dt$$

$$\vec{\upsilon} = \left[\vec{\omega}, \vec{r} \right]$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{r} \right] + \left[\vec{\omega}, \frac{d\vec{r}}{dt} \right] =$$

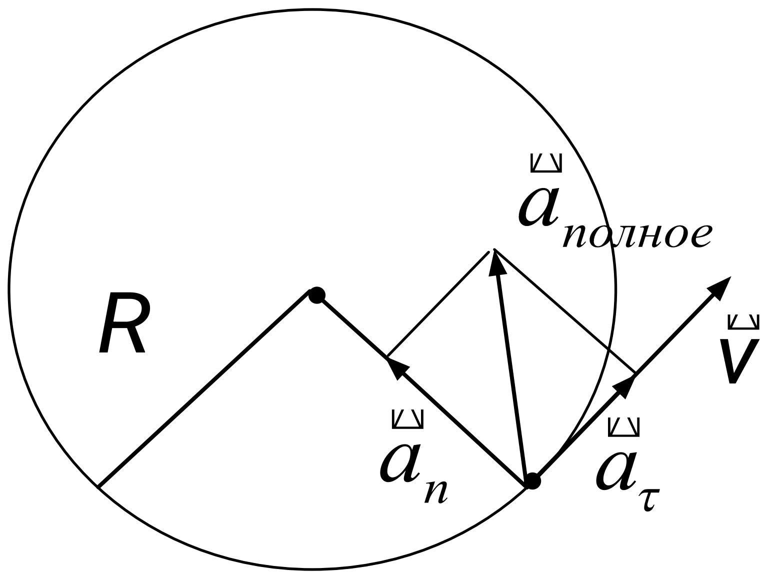
$$= \left[\vec{\varepsilon}, \vec{r} \right] + \left[\vec{\omega}, \left[\vec{\omega}, \vec{r} \right] \right] =$$

$$= \varepsilon_z \cdot \rho \cdot \vec{\tau} + \omega^2 \cdot \rho \cdot \vec{n} =$$

$$= \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

Пример:

Материальная точка начинает движение по окружности радиусом R с постоянным угловым ускорением ε. Вычислите угол между векторами её скорости и полного ускорения через *t* секунд после начала движения.

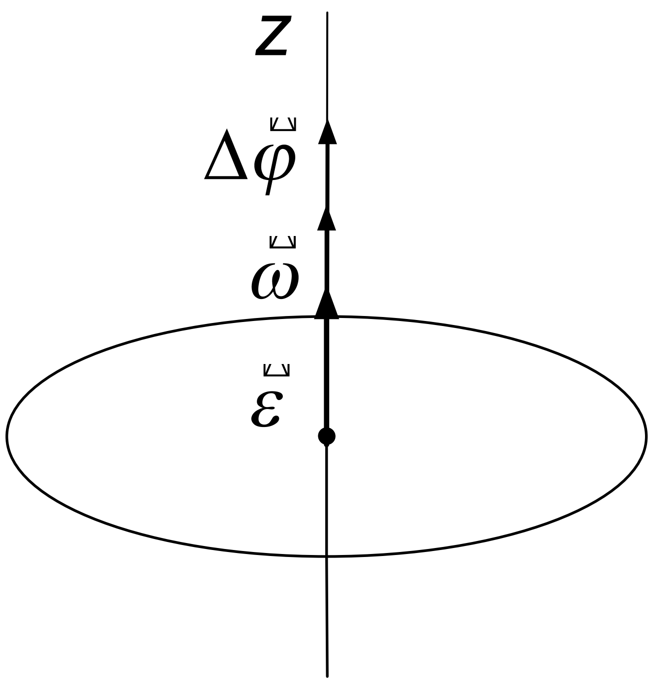


$$a_\tau = \varepsilon R$$

$$a_n = \omega^2 R = \varepsilon^2 t^2 R$$

$$\alpha = arctg\,\frac{a_n}{a_\tau} = arctg\;\varepsilon t^2$$

Равноускоренное движение материальной точки по окружности.



Зависимость угловой скорости от времени:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon}\cdot t$$

Зависимость приращения угла поворота от времени:

$$\Delta\vec{\varphi} = \vec{\omega}_0 t + \frac{\vec{\varepsilon}\cdot t^2}{2}$$

$$\omega_z = \omega_{0z} + \varepsilon_z \cdot t$$

$$\Delta\varphi_z = \omega_{0z} t + \frac{\varepsilon_z \cdot t^2}{2}$$