Решение задач
В-10

Разработано Т. М. Мильчаковой

2013

Теорема умножения вероятностей

Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятностей этих событий.

$$P(A \text{ и } B)=P(A) * P(B)$$

Однажды ты оденешь красный и желтый

Теорема сложения вероятностей

Вероятность того, что произойдет одно из двух несовместных событий (все равно какое) равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A \text{ или } B)=P(A)+P(B)$$

Задача 1. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая — 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая — 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

- **Решение.**
  Вероятность того, что стекло куплено на первой фабрике и оно бракованное: $0,45 \cdot 0,03 = 0,0135$.

  Вероятность того, что стекло куплено на второй фабрике и оно бракованное: $0,55 \cdot 0,01 = 0,0055$.

  Поэтому по формуле полной вероятности вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным равна $0,0135 + 0,0055 = 0,019$.
  Ответ: 0,019.

Задача 2. Если гроссмейстер А. играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б. с вероятностью 0,52. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,3. Гроссмейстеры А. и Б. играют две партии, причем во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

- **Решение.** Возможность выиграть первую и вторую партию не зависят друг от друга. Вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей: $0{,}52 \cdot 0{,}3 = 0{,}156$.Ответ: 0,156.

Задача 3. Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые три раза попал в мишени, а последние два промахнулся. Результат округлите до сотых.

- **Решение.**
  Поскольку биатлонист попадает в мишени с вероятностью 0,8, он промахивается с вероятностью $1 - 0,8 = 0,2$.

  События попасть или промахнуться при каждом выстреле независимы, вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей. Тем самым, вероятность события «попал, попал, попал, промахнулся, промахнулся» равна

  Ответ: 0,02.

Задача 4. На экзамене по геометрии школьнику достаётся один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Вписанная окружность», равна 0,2. Вероятность того, что это вопрос на тему «Параллелограмм», равна 0,15. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

- **Решение.**
Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:
0,2 + 0,15 = 0,35.Ответ: 0,35.

Задача 5. Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,3. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

- **Решение.**
  Найдем вероятность того, что перегорят обе лампы. Эти события независимые, вероятность их произведения равно произведению вероятностей этих событий: $0,3 \cdot 0,3 = 0,09$.

  Событие, состоящее в том, что не перегорит хотя бы одна лампа, противоположное. Следовательно, его вероятность равна $1 - 0,09 = 0,91$.
  Ответ: 0,91.

Задача 6. В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,05 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

- **Решение.**
  Найдем вероятность того, что неисправны оба автомата. Эти события независимые, вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий: $0{,}05 \cdot 0{,}05 = 0{,}0025$.

  Событие, состоящее в том, что исправен хотя бы один автомат, противоположное. Следовательно, его вероятность равна $1 - 0{,}0025 = 0{,}9975$.

  Ответ: 0,9975.

Приведем другое решение.

Вероятность того, что исправен первый автомат (событие А) равна 0,95.

Вероятность того, что исправен второй автомат (событие В) равна 0,95.

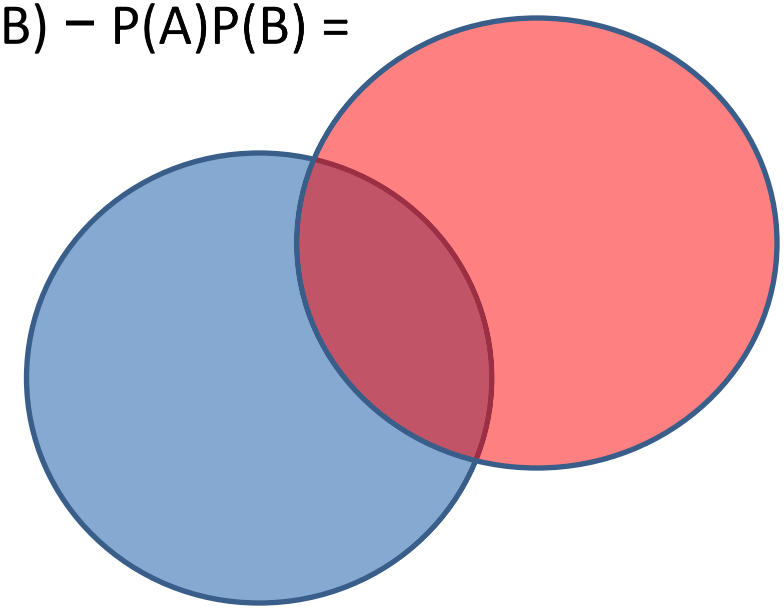
Это совместные независимые события.

Вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий, а вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий, уменьшенной на вероятность их произведения.

Имеем:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) =$$

$$0{,}95 + 0{,}95 - 0{,}95 \cdot 0{,}95 = 0{,}9975.$$



Задача 7. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

- **Решение.**
  Рассмотрим события

  A = кофе закончится в первом автомате,
  B = кофе закончится во втором автомате.
  Тогда
  $A \cdot B$ = кофе закончится в обоих автоматах,
  $A + B$ = кофе закончится хотя бы в одном автомате.

  По условию $P(A) = P(B) = 0,3$; $P(A \cdot B) = 0,12$.

  События A и B совместные, вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий, уменьшенной на вероятность их произведения:

  $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = 0,3 + 0,3 - 0,12 = 0,48.$

  Следовательно, вероятность противоположного события, состоящего в том, что кофе останется в обоих автоматах, равна

  $1 - 0,48 = 0,52$.Ответ: 0,52.

- **Приведем другое решение.**
  Вероятность того, что кофе останется в первом автомате равна $1 - 0{,}3 = 0{,}7$.

  Вероятность того, что кофе останется во втором автомате равна $1 - 0{,}3 = 0{,}7$.

  Вероятность того, что кофе останется в первом или втором автомате равна $1 - 0{,}12 = 0{,}88$.

  Поскольку $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A{\cdot}B)$, имеем:
  $0{,}88 = 0{,}7 + 0{,}7 - x$, откуда искомая вероятность $x = 0{,}52$.

  Примечание.
  Заметим, что события A и B не являются независимыми. Действительно, вероятность произведения независимых событий была бы равна произведению вероятностей этих событий:
  $P(A{\cdot}B) = 0{,}3{\cdot}0{,}3 = 0{,}09$, однако по условию эта вероятность равна 0,12.

Задача 8. Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, равна 0,97. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,89. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

- **Решение.**
  Пусть A = «чайник прослужит больше года, но меньше двух лет»,
  B = «чайник прослужит больше двух лет», тогда A + B = «чайник прослужит больше года».

  События A и B совместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий, уменьшенной на вероятность их произведения. Вероятность произведения этих событий, состоящего в том, что чайник выйдет из строя ровно через два года — строго в тот же день, час и секунду — равна нулю. Тогда:

  $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = P(A) + P(B)$,
  откуда, используя данные из условия, получаем

  $0,97 = P(A) + 0,89$.
  Тем самым, для искомой вероятности имеем:

  $P(A) = 0,97 - 0,89 = 0,08$.
  Ответ: 0,08.

Задача 9. Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 40% яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства — 20% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 35% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

- **Решение.**
  Пусть событие состоит в том, что яйцо имеет высшую категорию, события и состоят в том, что яйцо произведено в первом и втором хозяйствах соответственно. Тогда события и — события, состоящие в том, что яйцо высшей категории произведено в первом и втором хозяйстве соответственно. По формуле полной вероятности, вероятность того, что будет куплено яйцо высшей категории, равна:

$$P(AB_1) + P(AB_2) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) =$$
$$= 0,4 \cdot P(B_1) + 0,2 \cdot (1 - P(B_1)) = 0,2P(B_1) + 0,2.$$

Поскольку по условию эта вероятность равна 0,35, поэтому для вероятности того, что купленное яйцо произведено в первом хозяйстве имеем:

$$P(B_1) = (0,35 - 0,2) : 0,2 = 0,75.$$

Ответ: 0,75.

Приведем другое решение.
Пусть в первом хозяйстве агрофирма закупает x яиц, в том числе, $0,4x$ яиц высшей категории, а во втором хозяйстве — y яиц, в том числе $0,2y$ яиц высшей категории. Тем самым, всего агроформа закупает $x+y$ яиц, в том числе $0,4x+0,2y$ яиц высшей категории. По условию, высшую категорию имеют 35% яиц, тогда:

$$\frac{0,4x+0,2y}{x+y}=0,35 \Leftrightarrow 0,4x+0,2y=0,35(x+y) \Leftrightarrow 0,05x=0,15y \Leftrightarrow x=3y.$$

Следовательно, у первого хозяйства закупают в три раза больше яиц, чем у второго. Поэтому вероятность того, что купленное яйцо окажется из первого хозяйства равна

$$\frac{3y}{3y+y}=\frac{3}{4}=0,75.$$

Задача 10. Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,2. На столе лежит 10 револьверов, из них только 4 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.

- **Решение.**
  Джон промахнется, если схватит пристрелянный револьвер и промахнется из него, или если схватит непристрелянный револьвер и промахнется из него. По формуле условной вероятности, вероятности этих событий равны соответственно $0{,}4\cdot(1 - 0{,}9) = 0{,}04$ и $0{,}6\cdot(1 - 0{,}2) = 0{,}48$. Эти события несовместны, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий: $0{,}04 + 0{,}48 = 0{,}52$.
  Ответ: 0,52.

  Приведем другое решение.
  Джон попадает в муху, если схватит пристрелянный револьвер и попадет из него, или если схватит непристрелянный револьвер и попадает из него. По формуле условной вероятности, вероятности этих событий равны соответственно $0{,}4\cdot0{,}9 = 0{,}36$ и $0{,}6\cdot0{,}2 = 0{,}12$. Эти события несовместны, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий: $0{,}36 + 0{,}12 = 0{,}48$. Событие, состоящее в том, что Джон промахнется, противоположное. Его вероятность равна $1 - 0{,}48 = 0{,}52$.

Задача 11. На рок-фестивале выступают группы — по одной от каждой из заявленных стран. Порядок выступления определяется жребием. Какова вероятность того, что группа из Дании будет выступать после группы из Швеции и после группы из Норвегии? Результат округлите до сотых.

Решение.
Общее количество выступающих на фестивале групп для ответа на вопрос неважно. Сколько бы их ни было, для указанных стран есть 6 способов взаимного расположения среди выступающих (Д — Дания, Ш — Швеция, Н — Норвегия):

...Д...Ш...Н..., ...Д...Н...Ш..., ...Ш...Н...Д..., ...Ш...Д...Н..., ...Н...Д...Ш..., ...Н...Ш...Д...

Дания находится после Швеции и Норвегии в двух случаях. Поэтому вероятность того, что группы случайным образом будут распределены именно так, равна

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0,33.$$

Ответ: 0,33.

Замечание.
Пусть требуется найти вероятность того, что датские музыканты окажутся последними среди n выступающих от разных государств групп. Поставим команду Дании на последнее место и найдем количество перестановок без повторений из $n-1$ предыдущих групп: оно равно $(n-1)!$ Общее количество перестановок из всех n групп равно $n!$ Поэтому искомая вероятность равна

$$\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

Задача 12. При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,4, а при каждом последующем — 0,6. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,98?

- Найдем вероятность противоположного события, состоящего в том, что цель не будет уничтожена за n выстрелов. Вероятность промахнуться при первом выстреле равна 0,6, а при каждом следующем — 0,4. Эти события независимые, вероятность их произведения равна произведению вероятности этих событий. Поэтому вероятность промахнуться при n выстрелах равна: $0,6 \cdot (0,4)^{(n-1)}$.

  Осталось найти наименьшее натуральное решение неравенства

  $$0,6 \cdot (0,4)^{n-1} \leq 0,02 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \leq \frac{1}{30}.$$

  Последовательно проверяя значения n, равные 1, 2, 3 и т. д. находим, что искомым решением является $n = 5$. Следовательно, необходимо сделать 5 выстрелов.

  Ответ: 5.

  Примечание.
  Можно решать задачу «по действиям», вычисляя вероятность уцелеть после ряда последовательных промахов:

  P(1) = 0,6.
  P(2) = P(1)·0,4 = 0,24.
  P(3) = P(2)·0,4 = 0,096.
  P(4) = P(3)·0,4 = 0,0384;
  P(5) = P(4)·0,4 = 0,01536.

  Последняя вероятность меньше 0,02, поэтому достаточно пяти выстрелов по мишени.

Приведем другое решение.
Вероятность поразить мишень равна сумме вероятностей поразить ее при первом, втором, третьем и т. д. выстрелах. Поэтому задача сводится к нахождению наименьшего натурального решения неравенства

$$0,4 + 0,4 \cdot 0,6 + 0,4 \cdot (0,6)^2 + ... + (0,6)^{n-1} \geq 0,98.$$

В нашем случае неравенство решается подбором, в общем случае понадобится формула суммы геометрической прогрессии, использование которой сведет задачу к простейшему логарифмическому неравенству.

Задача 13. Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей — 1 очко, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,4.

- **Решение.**
  Команда может получить не меньше 4 очков в двух играх тремя способами: 3+1, 1+3, 3+3. Эти события несовместны, вероятность их суммы равна сумме их вероятностей. Каждое из этих событий представляет собой произведение двух независимых событий — результата в первой и во второй игре. Отсюда имеем:

$$P(N \geq 4) = P(3+1)+P(1+3)+P(3+3) = P(3)\cdot P(1)+P(1)\cdot P(3)+P(3)\cdot P(3) =$$
$$= 0,4 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,4 = 0,08 + 0,08 + 0,16 = 0,32.$$

Задача 14. При изготовлении подшипников диаметром 67 мм вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного не больше, чем на 0,01 мм, равна 0,965. Найдите вероятность того, что случайный подшипник будет иметь диаметр меньше чем 66,99 мм или больше чем 67,01 мм.

- **Решение.**
  По условию, диаметр подшипника будет лежать в пределах от 66,99 до 67,01 мм с вероятностью 0,965. Поэтому искомая вероятность противоположного события равна $1 - 0{,}965 = 0{,}035$.
  Ответ: 0,035.

Задача 15.Вероятность того, что на тесте по биологии учащийся О. верно решит больше 11 задач, равна 0,67. Вероятность того, что О. верно решит больше 10 задач, равна 0,74. Найдите вероятность того, что О. верно решит ровно 11 задач.

- **Решение.**
  Рассмотрим события A = «учащийся решит 11 задач» и B = «учащийся решит больше 11 задач». Их сумма — событие A + B = «учащийся решит больше 10 задач». События A и B несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

  $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

  Тогда, используя данные задачи, получаем: $0{,}74 = P(A) + 0{,}67$, откуда $P(A) = 0{,}74 - 0{,}67 = 0{,}07$.
  Ответ: 0,07.

Задача 16. Чтобы поступить в институт на специальность «Лингвистика», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность «Коммерция», нужно набрать не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и обществознание.
Вероятность того, что абитуриент З. получит не менее 70 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку — 0,8, по иностранному языку — 0,7 и по обществознанию — 0,5.
Найдите вероятность того, что З. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

- **Решение.**
- Для того, чтобы поступить хоть куда-нибудь, З. нужно сдать и русский, и математику как минимум на 70 баллов, а помимо этого еще сдать иностранный язык или обществознание не менее, чем на 70 баллов. Пусть A, B, C и D — это события, в которых З. сдает соответственно математику, русский, иностранный и обществознание не менее, чем на 70 баллов. Тогда поскольку

$$P(C + D) = P(C) + P(D) - P(C \cdot D),$$

для вероятности поступления имеем:

$$P(AB(C+D)) = P(A)\cdot P(B)\cdot P(C+D) = P(A)\cdot P(B)\cdot(P(C)+P(D)-P(C)\cdot P(D))$$
$$= 0,6 \cdot 0,8 \cdot (0,7 + 0,5 - 0,7 \cdot 0,5) = 0,408.$$

Задача 17. На фабрике керамической посуды 10% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 80% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Результат округлите до тысячных.

- **Решение.**
  Пусть завод произвел n тарелок. В продажу поступят все качественные тарелки и 20% невыявленных дефектных тарелок: 0,9n+0,2*0,1n=0,92n тарелок.

  Поскольку качественных из них 0,9n , вероятность купить качественную тарелку равна

$$\frac{0,9n}{0,92n} = \frac{90}{92} \approx 0,978.$$

Ответ: 0,978.

Задача 18. По отзывам покупателей Иван Иванович оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,8. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,9. Иван Иванович заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.

- **Решение.**
  Вероятность того, что первый магазин не доставит товар равна $1 - 0{,}9 = 0{,}1$. Вероятность того, что второй магазин не доставит товар равна $1 - 0{,}8 = 0{,}2$. Поскольку эти события независимы, вероятность их произведения (оба магазина не доставят товар) равна произведению вероятностей этих событий: $0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}02$.
  Ответ: 0,02.

Задача 19. Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 20 пассажиров, равна 0,94. Вероятость того, что окажется меньше 15 пассажиров, равна 0,56. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 15 до 19.

- **Решение.**
  Рассмотрим события A = «в автобусе меньше 15 пассажиров» и B = «в автобусе от 15 до 19 пассажиров». Их сумма — событие A + B = «в автобусе меньше 20 пассажиров». События A и B несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

  $P(A + B) = P(A) + P(B).$

  Тогда, используя данные задачи, получаем: $0{,}94 = 0{,}56 + P(B)$, откуда $P(B) = 0{,}94 - 0{,}56 = 0{,}38$.
  Ответ: 0,38.

Задача 20. Перед началом волейбольного матча капитаны команд тянут честный жребий, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Статор» по очереди играет с командами «Ротор», «Мотор» и «Стартер». Найдите вероятность того, что «Статор» будет начинать только первую и последнюю игры.

- **Решение.**
  Требуется найти вероятность произведения трех событий: «Статор» начинает первую игру, не начинает вторую игру, начинает третью игру. Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий. Вероятность каждого из них равна 0,5, откуда находим: $0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,125$.
  Ответ: 0,125.

Задача 21. В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,3. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно (считайте, что клиенты заходят независимо друг от друга).

- **Решение.**
  Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий. Поэтому вероятность того, что все три продавца заняты равна
  $0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3$

  Ответ: 0,027.

Задача 22. В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,8 погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня 3 июля, погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 6 июля в Волшебной стране будет отличная погода.

- **Решение.**
  Для погоды на 4, 5 и 6 июля есть 4 варианта: ХХО, ХОО, ОХО, ООО (здесь Х — хорошая, О — отличная погода). Найдем вероятности наступления такой погоды:

  P(XXO) = 0,8·0,8·0,2 = 0,128;
  P(XOO) = 0,8·0,2·0,8 = 0,128;
  P(OXO) = 0,2·0,2·0,2 = 0,008;
  P(OOO) = 0,2·0,8·0,8 = 0,128.

  Указанные события несовместные, вероятность их сумы равна сумме вероятностей этих событий:

  P(XXO) + P(XOO) + P(OXO) + P(OOO) = 0,128 + 0,128 + 0,008 + 0,12
  8 = 0,392.
  Ответ: 0,392.

Задача 23. Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,06. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две таких батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.

- **Решение.**
  Вероятность того, что батарейка исправна, равна 0,94.
  Вероятность произведения независимых событий (обе батарейки окажутся исправными) равна произведению вероятностей этих событий: $0,94 \cdot 0,94 = 0,8836$.
  Ответ: 0,8836.

Задача 24. В классе учится 21 человек. Среди них две подруги: Аня и Нина. Класс случайным образом делят на 7 групп, по 3 человека в каждой. Найти вероятность того. что Аня и Нина окажутся в одной группе.

Рассмотрим первую группу. Вероятность того, что Аня окажется в ней, равна $\frac{3}{21}$. Если Аня уже находится в первой группе, то вероятность того, что Нина окажется этой же группе равна $\frac{2}{20}$. Поскольку все семь групп равноправны, вероятность того, что подруги окажутся в одной группе, равна

$$7 \cdot \frac{3}{21} \cdot \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0,1.$$

Ответ: 0,1.

Приведем комбинаторное решение.
Всего способов выбрать 3 учащихся из 21 учащегося класса равно C_{21}^3. Выбрать пару «Аня и Нина» и поместить их в одну из семи групп можно $C_7^1 = 7$ способами. Добавить в эту группу еще одного из оставшихся 19 учащихся можно $C_{19}^1 = 19$ способами. Поэтому вероятность того, что девочки окажутся в одной группе равна

$$\frac{C_7^1 \cdot C_{19}^1}{C_{21}^3} = \frac{7 \cdot 19}{7 \cdot 10 \cdot 19} = \frac{1}{10}.$$

Приведем еще одно решение.
Пусть Аня оказалась в некоторой группе. Тогда для 20 оставшихся учащихся оказаться с ней в одной группе есть две возможности. Вероятность этого события равна 2 : 20 = 0,1.

Задача 25. В кармане у Пети было 2 монеты по 5 рублей и 4 монеты по 10 рублей. Петя, не глядя, переложил какие-то 3 монеты в другой карман. Найдите вероятность того, что пятирублевые монеты лежат теперь в разных карманах.

Решение.
Чтобы пятирублевые монеты оказались в разных карманах, Петя должен взять из кармана одну пятирублевую и две десятирублевые монеты. Это можно сделать тремя способами: 5, 10, 10; 10, 5, 10 или 10, 10, 5. Эти события несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$$\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{5}.$$

Другое рассуждение.
Вероятность того, что Петя взял пятирублевую монету, затем десятирублевую, и затем еще одну десятирублевую (в указанном порядке) равна

$$\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{5}.$$

Поскольку Петя мог достать пятирублевую монету не только первой, но и второй или третьей, вероятность достать набор из одной пятирублевой и двух десятирублевых монет в 3 раза больше. Тем самым, она равна 0,6.

Ответ: 0,6.

Приведем другое решение.

Количество способов взять 3 монеты из 6, чтобы переложить их в другой карман, равно C_6^3. Количество способов выбрать 1 пятирублевую монету из 2 пятирублевых монет и взять вместе с ней еще 2 десятирублевых монеты из имеющихся 4 десятирублевых монет по правилу произведения равно $C_2^1 \cdot C_4^2$. Поэтому искомая вероятность того, что пятирублевые монеты лежат в разных карманах, равна

$$\frac{C_2^1 \cdot C_4^2}{C_6^3} = \frac{2 \cdot 6}{20} = 0,6.$$

Задача 26. В кармане у Пети было 4 монеты по рублю и 2 монеты по два рубля. Петя, не глядя, переложил какие-то 3 монеты в другой карман. Найдите вероятность того, что обе двухрублёвые монеты лежат в одном кармане.

Решение.

Двухрублевые монеты могут лежать в одном кармане, если Петя переложил в другой карман три из четырех рублевых монет (а двухрублевые не перекладывал), или если переложил в другой карман обе двухрублевые монеты и одну рублевую одним из трех способов: 1, 2, 2; 2, 1, 2; 2, 2, 1. Эти события несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$$\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}+\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{4}=0,4.$$

Приведем другое решение.

Количество способов взять 3 монеты из 6, чтобы переложить их в другой карман, равно C_6^3. Количество способов выбрать 3 рублевых монеты из 4 рублевых монет равно 4. Количество способов взять вместе с двумя двухрублевыми монетами одну рублевую монету из имеющихся 4 рублевых монет тоже равно 4. Поэтому искомая вероятность того, что двухрублевые монеты лежат в разных карманах, равна

$$\frac{4+4}{C_6^3}=\frac{8}{20}=0,4.$$

Задача 27. В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет ровно два раза.

Решение. Возможны три варианта: орел-орел-решка, орел-решка-орел, решка-орел-орел. Эти события несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=0,375.$$

Приведем другое решение.

Можно перечислить все возможные случаи бросания монетки (О — орел, Р — решка): ООО, ООР, ОРО, ОРР, РОО, РОР, РРО, РРР и найти, в скольких из них орел выпал ровно два раза: ООР, ОРО, РОО. Тем самым, вероятность выпадения орла дважды равна 3 : 8 = 0,375. (Этот подход затруднителен в случае большого числа бросаний монетки.)

Приведем еще одно решение.
Вероятность выпадения монетки одной стороной и дважды — другой стороной равна 0,5·0,5·0,5 = 0,125. Выбрать из этих «трех» сторон два орла можно $C_3^2 = 3$ способами. Следовательно, искомая вероятность равна 0,375.

Примечание.
Последнее рассуждение — не что иное, как вывод формулы Бернулли для нашего случая. В общем случае, если проводится n испытаний, в каждом из которых некоторое событие наступает в вероятностью p, то вероятность наступления этого события ровно k раз дается формулой $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

Задача 28. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 60% этих стекол, вторая — 40%. Среди стёкол, выпускаемых первой фабрикой, брак составляет 3%.Среди стёкол, выпускаемых второй фабрикой, брак составляет 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

- **Решение.**
  Вероятность того, что стекло куплено на первой фабрике и оно бракованное: $0{,}6 \cdot 0{,}03 = 0{,}018$.

  Вероятность того, что стекло куплено на второй фабрике и оно бракованное: $0{,}4 \cdot 0{,}01 = 0{,}004$.

  Поэтому по формуле полной вероятности вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным равна
  $0{,}018 + 0{,}004 = 0{,}022$.
  Ответ: 0,022.

Задача 29.

В спортивных соревнованиях на три призовых места претендуют Миша, Коля и Павел. Сколько существует способов распределения между ними 1,2,3 мест?

Решение: построим граф-дерево

1 место	2 место	3 место
М	П	К
	К	П
К	М	П
	П	М
П	М	К
	К	М

Ответ

$$6 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \qquad 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Задача 30. Из 25 человек в классе собрания нужно выбрать старосту и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

Решение.

Старосту можно выбрать 25 способами, а его заместителя из 24 оставшихся, а значит - 24 способами. Важен порядок выбора.

$$25 \cdot 24$$

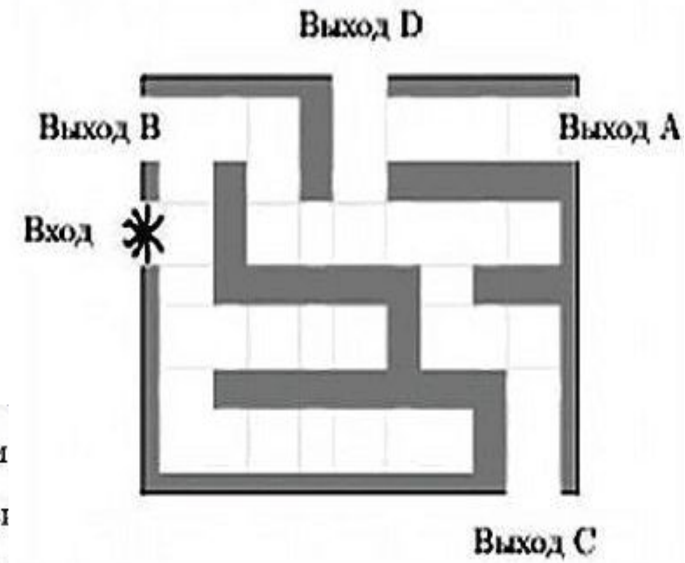
Задача 31. Из 25 человек нужно выбрать двоих дежурных. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ

Порядок не важен

$$\frac{25 \cdot 24}{2}$$

320212. На рисунке изображён лабиринт. Паук заползает в лабиринт в точке «Вход». Развернуться и ползти назад паук не может, поэтому на каждом разветвлении паук выбирает один из путей, по которому ещё не полз. Считая, что выбор дальнейшего пути чисто случайный, определите, с какой вероятностью паук придёт к выходу D.



Всего развилок четыре. На каждой развилке паук с вероятностью 0,5 м
выбрать путь, ведущий к выходу D, либо другой путь. Это независи
события, Вероятность того, что независимые события произойдут одновременно (паук на всех четырёх развилках выберет верное направление) равна произведению вероятностей этих событий. Таким образом, вероятность прийти к выходу D равна:

$$0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}0625$$

Ответ: 0,0625