

Лекция №2

Статические и динамические
характеристики объектов и звеньев
управления

План лекции:

1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА
 2. ОПЕРАТОРНАЯ ФОРМА ЗАПИСИ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
 3. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ, ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ
УРАВНЕНИЕ
 4. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
СТРУКТУРНЫХ СХЕМ
 5. ПОНЯТИЕ О СТАТИЧЕСКИХ И ДИНАМИЧЕСКИХ
ХАРАКТЕРИСТИКАХ САУ
1. ТИПОВЫЕ ВХОДНЫЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ
 2. ПЕРЕХОДНАЯ ФУНКЦИЯ САУ

1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

Преобразованием Лапласа функции $x(t)$ называется функция

$$X(p) = L[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-pt} dt,$$

*Здесь $x(t)$ - оригинал функции,
 $X(p)$ - ее изображение по Лапласу,
 L – оператор преобразования.*

Свойства преобразования Лапласа

Изображение производной:

$$L[x(t)] = X(p); \tag{1}$$

$$L[\dot{x}(t)] = p \cdot X(p) - x(0);$$

$$L[\ddot{x}(t)] = p^2 X(p) - px(0) - \dot{x}(0);$$

.....

$x(0), \dot{x}(0), \dots$ - начальные условия

Изображение производной при нулевых начальных условиях:

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \dots$$

$$L[x(t)] = X(p);$$

$$L[\dot{x}(t)] = p \cdot X(p);$$

$$L[\ddot{x}(t)] = p^2 X(p);$$

.....

$$L[x^{(n)}(t)] = p^n X(p). \quad (2)$$

Изображение интеграла:

$$L\left[\int_0^t x(\tau) d\tau\right] = \frac{X(p)}{p} \quad (3)$$

Предельные теоремы:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} x(t) &= \lim_{p \rightarrow \infty} pX(p); \\ \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) &= \lim_{p \rightarrow 0} pX(p). \end{aligned} \quad (4)$$

Обратное преобразование Лапласа

$$x(t) = L^{-1} [X(p)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(p) \cdot e^{pt} dp,$$

*Таблица
преобразований
Лапласа*

*Теорема
разложения*

Таблица преобразований Лапласа

$x(t) = L^{-1}[X(p)]$	$X(p) = L[x(t)]$
$1(t)$	$\frac{1}{p}$
t^k	$\frac{k!}{p^{k+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{p(p+a)}$

2. ОПЕРАТОРНАЯ ФОРМА ЗАПИСИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть оператор САУ имеет вид:

$$a_3 y^{(3)}(t) + a_2 y^{(2)}(t) + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_2 x^{(2)}(t) + b_1 x^{(1)}(t) + b_0 x(t) \quad (5)$$

Слева – всегда оператор выходного сигнала, справа – оператор входного сигнала.

Размерность системы равна максимальной степени производной!!

Напомним, что

$$L[y^{(n)}(t)] = p^n Y(p); \quad L[x^{(n)}(t)] = p^n X(p).$$

Применим преобразование Лапласа к уравнению (5),

$$a_3 p^3 Y(p) + a_2 p^2 Y(p) + a_1 p Y(p) + a_0 Y(p) = b_2 p^2 X(p) + b_1 p X(p) + b_0 X(p), \quad \Rightarrow$$

$$(a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0) Y(p) = (b_2 p^2 + b_1 p + b_0) X(p), \quad \Rightarrow$$

$$A(p) Y(p) = B(p) X(p), \quad (6)$$

$$A(p) = a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0,$$

$$B(p) = b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0.$$

Уравнение (6) называется операторным.

Операторная форма позволяет свести анализ дифференциальных уравнений к исследованию алгебраических уравнений.

3. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ, ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Передаточной функцией линейной стационарной САУ называется отношение изображения по Лапласу выходного сигнала $Y(p)$ к такому же изображению входного сигнала $X(p)$ при нулевых начальных условиях:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} \quad (7)$$

Из операторной формы записи следует, что

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0} = \frac{B(p)}{A(p)} \quad (8)$$

Уравнение $A(p) = a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0 = 0$

называется характеристическим.

Корни знаменателя передаточной функции

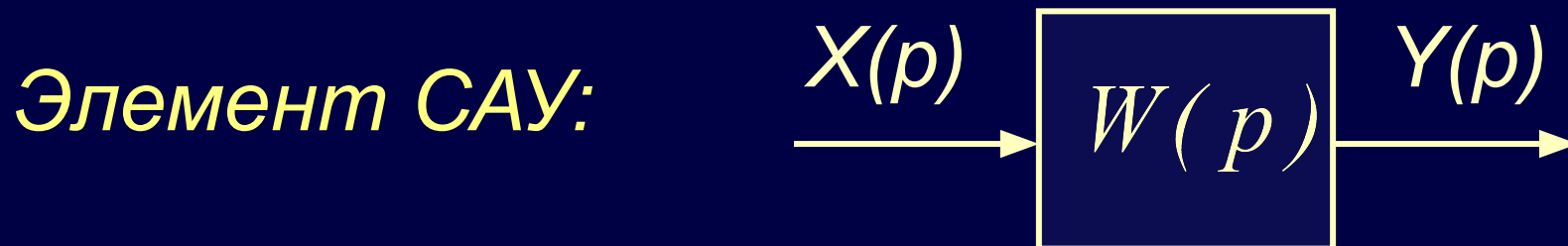
$A(p) = 0$ называются ее полюсами, корни

числителя $B(p) = 0$ называются нулями.

СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ САУ

Структурной схемой САУ называется графическое изображение ее элементов, представленных своими передаточными функциями, и связей между ними.

Условные обозначения структурных схем



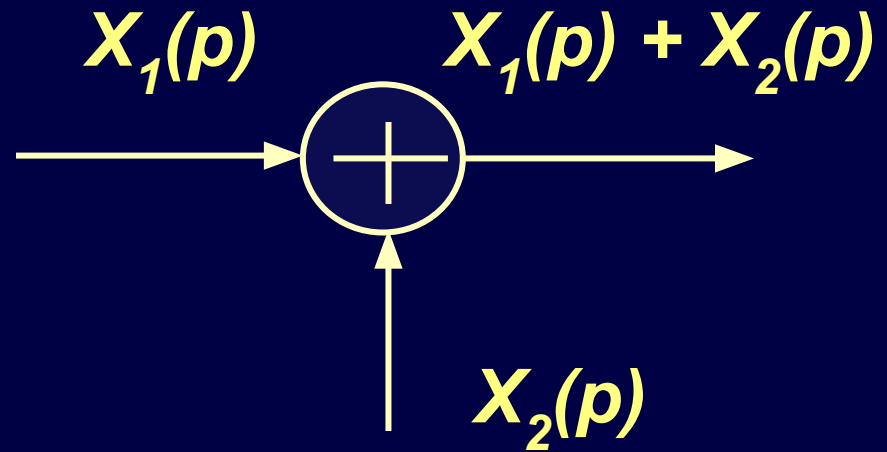
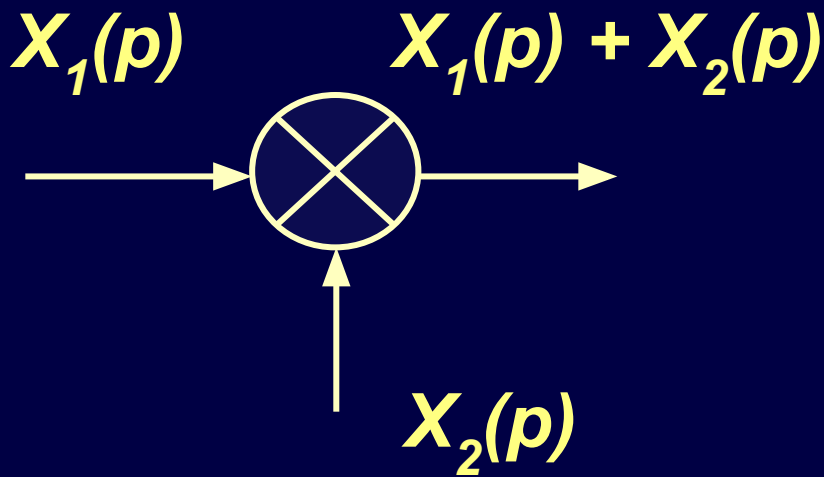
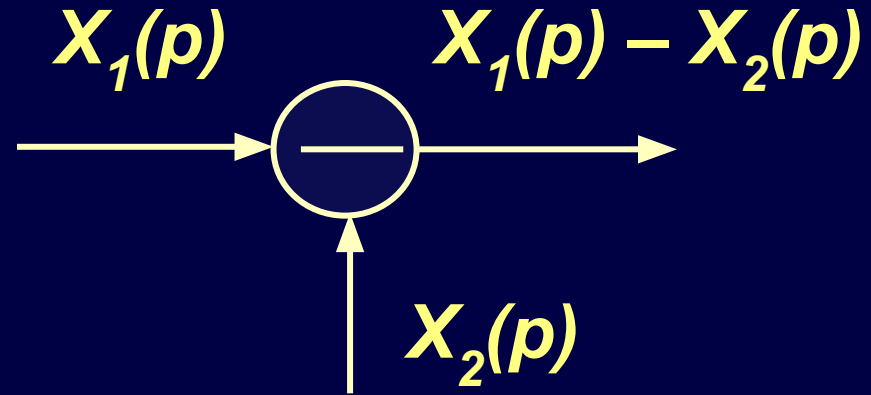
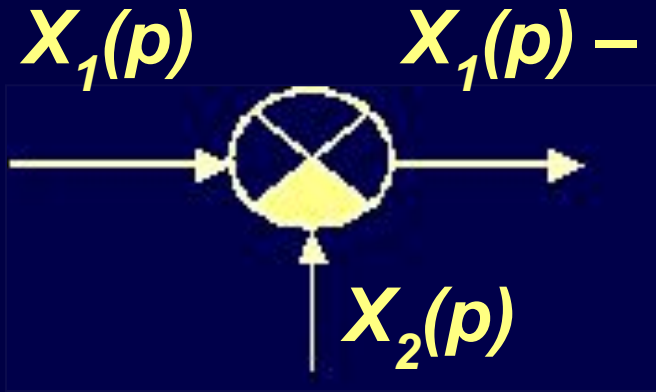
4. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СТРУКТУРНЫХ СХЕМ

Структурной схемой САУ называется графическое изображение ее элементов, представленных своими передаточными функциями, и связей между ними.

4.1. Условные обозначения структурных схем

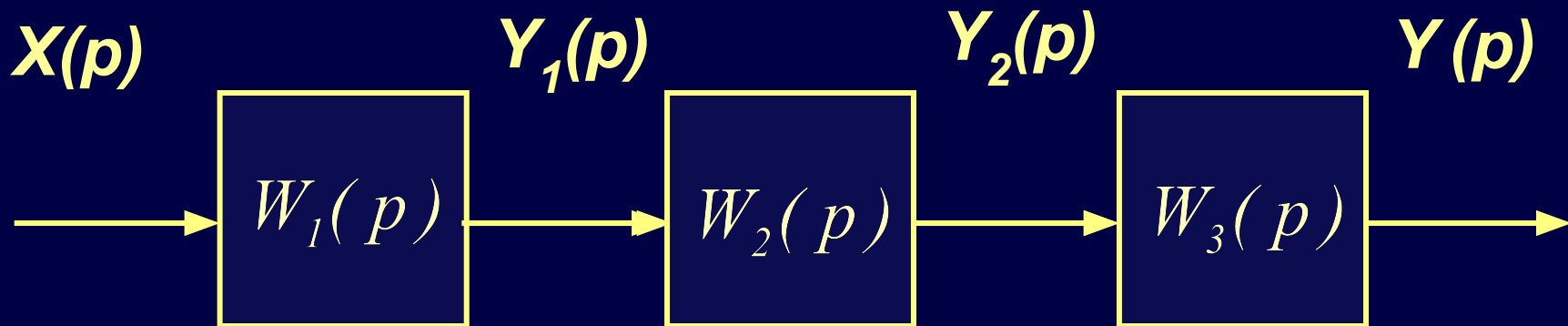


Сумматор:



4.2. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ СОЕДИНЕНИЙ ЗВЕНЬЕВ САУ

Последовательное соединение звеньев



$$Y_1(p) = W_1(p) X(p)$$

$$Y_2(p) = W_2(p) Y_1(p)$$

$$Y(p) = W_3(p) Y_2(p)$$

*Исключая промежуточные переменные,
получим:*

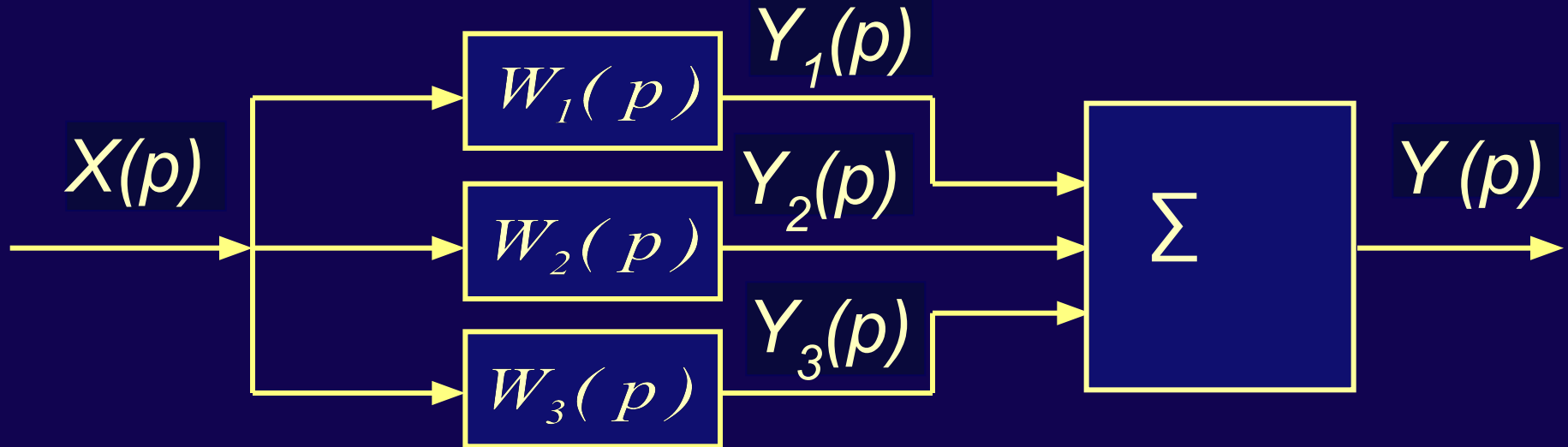
$$Y_2(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot X(p);$$

$$Y(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_3(p) \cdot X(p).$$

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot \dots = \prod_{i=1}^n W_i(p).$$

*При последовательном соединении
звеньев их ПФ перемножаются:*

Параллельное соединение звеньев 22

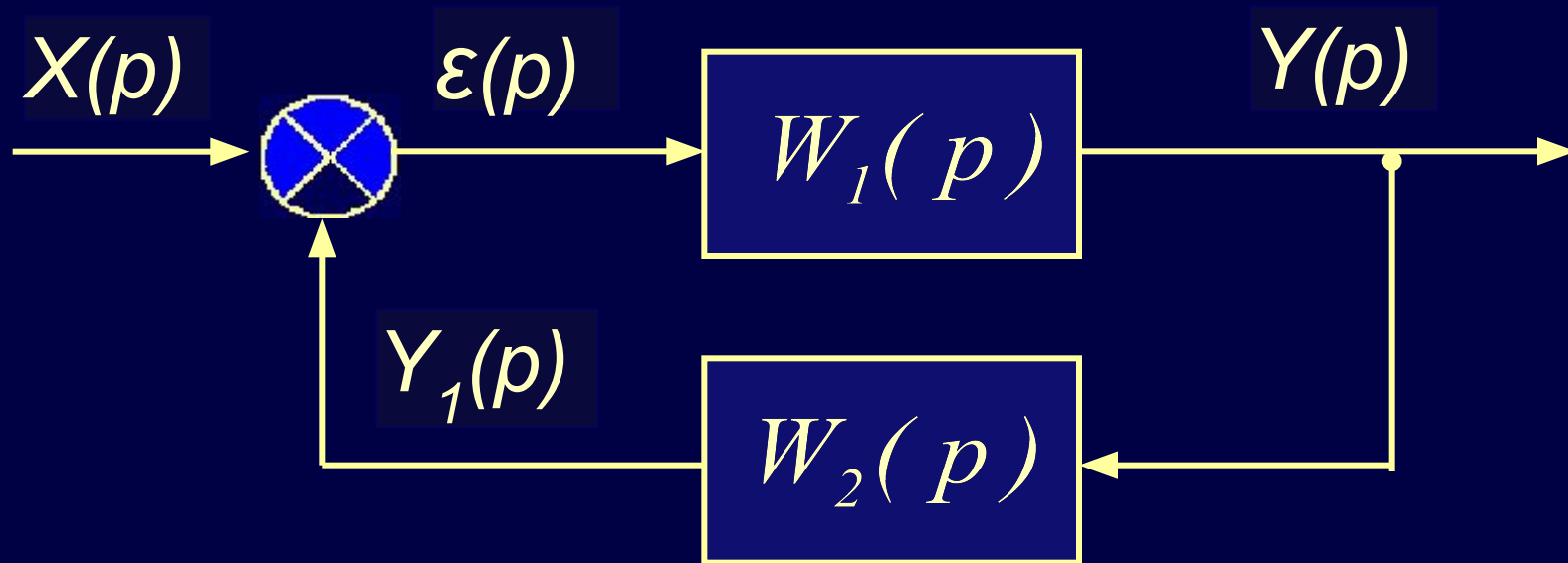


$$Y(p) = \sum_{i=1}^n Y_i(p) = [W_1(p) + W_2(p) + W_3(p)] \cdot X(p).$$

$$W_{\text{ЭК}}(p) = W_1(p) + W_2(p) + \dots = \sum_{i=1}^n W_i(p).$$

При параллельном соединении звеньев их ПФ складываются.

Встречно-параллельное соединение звеньев



$$\varepsilon(p) = X(p) - Y_1(p);$$

$$Y(p) = W_1(p) \varepsilon(p);$$

$$Y_1(p) = W_2(p) Y(p).$$

1. Исключаем $\varepsilon(p)$:

$$Y(p) = W_1(p) [X(p) - Y_1(p)];$$

$$Y_1(p) = W_2(p) Y(p).$$

2. Исключаем $Y_1(p)$:

$$Y(p) = W_1(p) [X(p) - W_2(p) Y(p)] \implies$$

$$[1 + W_2(p) W_1(p)] Y(p) = W_1(p) X(p) \implies$$

$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p) W_2(p)}.$$

ПФ встречно-параллельного соединения звеньев с положительной обратной связью :

$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 - W_1(p)W_2(p)}.$$

Для определения ПФ САУ методом преобразования структурных схем последовательно упрощают структурную схему САУ, объединяя звенья, соединенные последовательно, параллельно и встречно-параллельно с использованием полученных формул.

5. ПОНЯТИЕ О СТАТИЧЕСКИХ И ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ САУ

Системы автоматического управления являются динамическими системами, поэтому их качество оценивается по поведению в двух режимах работы.

```
graph TD; A[Системы автоматического управления являются динамическими системами, поэтому их качество оценивается по поведению в двух режимах работы.] --> B[Установившийся (статический режим)]; A --> C[Переходный (динамический режим)];
```

Установившийся
(статический
режим)

Переходный
(динамический
режим)

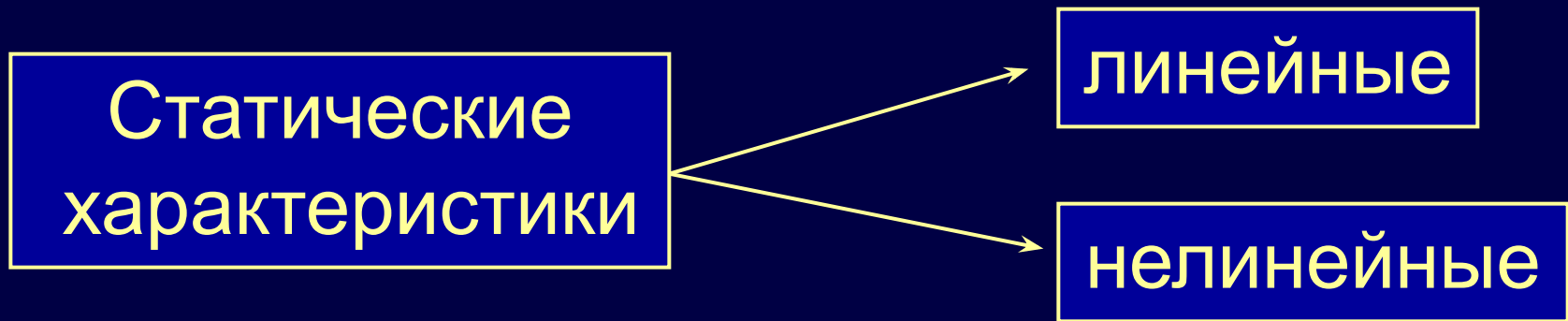
Установившийся (статический режим)

- это реакция системы, остающаяся спустя большой промежуток времени с момента приложения входного сигнала.

Решаются две задачи:

согласование диапазонов изменения переменных в элементах СУ с диапазоном изменения переменных ОУ и определение коэффициента усиления УУ.

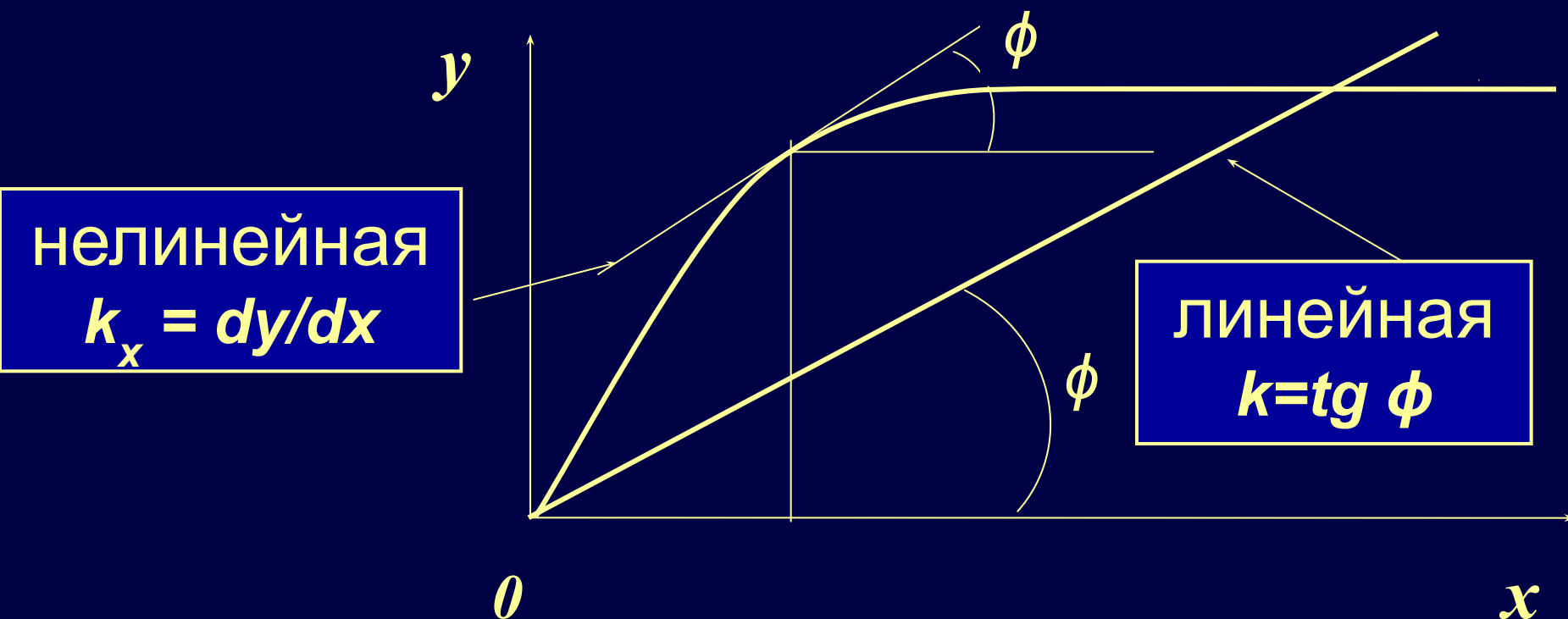
Зависимость между входным и выходным сигналами в установившемся режиме называется статической.



Линейными называются статические характеристики, описываемые уравнением

$$y = k \cdot x + b,$$

Примеры статических характеристик



Значение производной dy/dx в какой-либо точке статической характеристики называется коэффициентом усиления в этой точке.

Переходный (динамический режим)

- характеризуется переходом динамической системы из одного равновесного состояния в другое.

Характеристики поведения САУ в ПП называются ДИНАМИЧЕСКИМИ.

УСТАНОВИВШЕМСЯ называется режим, наступающий после завершения ПП.

Любая САР состоит из 2-х основных элементов: объекта регулирования (ОР) и регулятора. Основными свойствами объектов регулирования являются емкость объекта, самовыравнивание, время регулирования и запаздывания.

Емкость объекта – способность объекта аккумулировать вещество или энергию.

Самовыравнивание – свойство ОР после внесения возмущения (например, нарушение равновесия между притоком и расходом вещества) самостоятельно, без участия человека или регулятора, переходить в новое равновесное состояние. Самовыравнивание облегчает функционирование регулятора.

Объекты регулирования, обладающие свойством самовыравнивания, называются статическими, а не обладающие этим свойством – астатическими.

6. ТИПОВЫЕ ВХОДНЫЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ

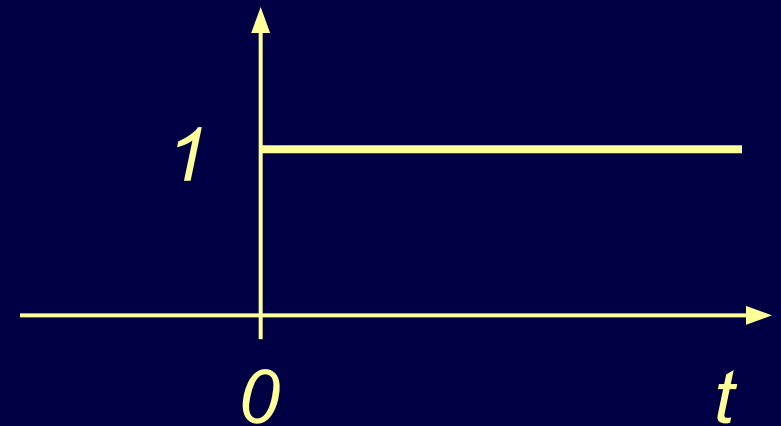
О динамических свойствах системы судят по ее реакции на типовые входные воздействия.

Временной характеристикой звена называют закон изменения выходной величины звена во времени $y(t)$ в ответ на изменение входного воздействия $x(t)$ при условии, что до приложения входного воздействия звено находилось в покое.

А) Единичная ступенчатая функция

ЕДИНИЧНОЙ СТУПЕНЧАТОЙ называется функция, удовлетворяющая условиям:

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \forall t < 0, \\ 1 & \forall t \geq 0. \end{cases}$$

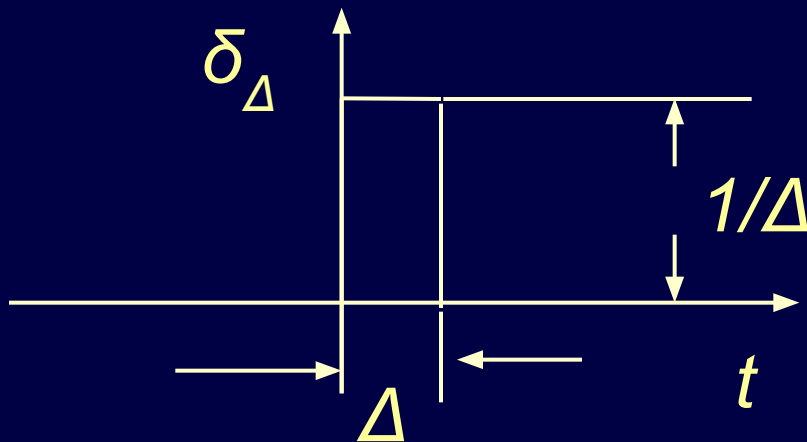


$$L[1(t)] = \int_0^{\infty} 1(t) \cdot e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p}.$$

Б) Единичный импульс

ЕДИНИЧНЫМ ИМПУЛЬСОМ
 (“дельта” функцией, функцией Дирака)
 называется функция, удовлетворяющая
 условиям:

$$\int_0^t \delta(\tau) d\tau = 1; \quad \delta(t) = \begin{cases} 0 & \forall t \neq 0, \\ \infty & \forall t = 0. \end{cases}$$



$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t).$$

$$L[\delta(t)] = 1.$$

В) Гармонический входной сигнал

ГАРМОНИЧЕСКИЙ ВХОДНОЙ СИГНАЛ

имеет вид:

$$x(t) = A_x \operatorname{Sin} (\omega t + \phi_x),$$

A_x - амплитуда входного сигнала;

ω - круговая частота (рад/с);

ϕ_x - начальная фаза (рад).

7. ПЕРЕХОДНАЯ ФУНКЦИЯ САУ

При анализе качества системы управления обычно выбирается ступенчатый сигнал

ПЕРЕХОДНОЙ ФУНКЦИЕЙ $h(t)$

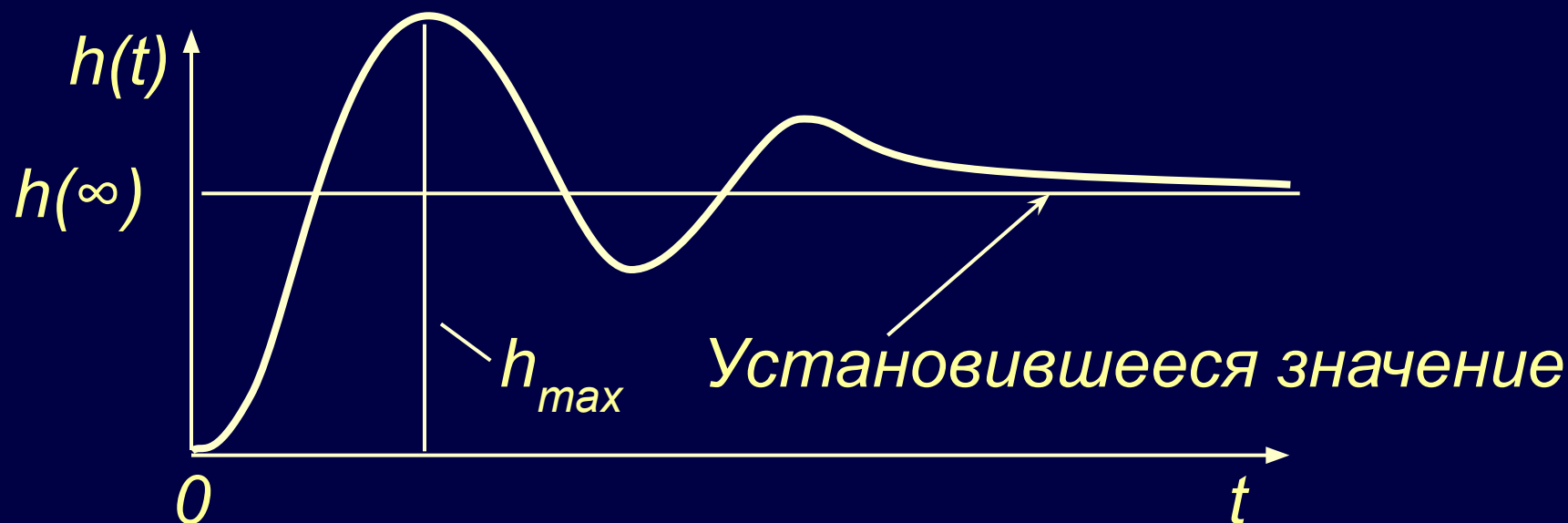
САУ называется ее реакция на

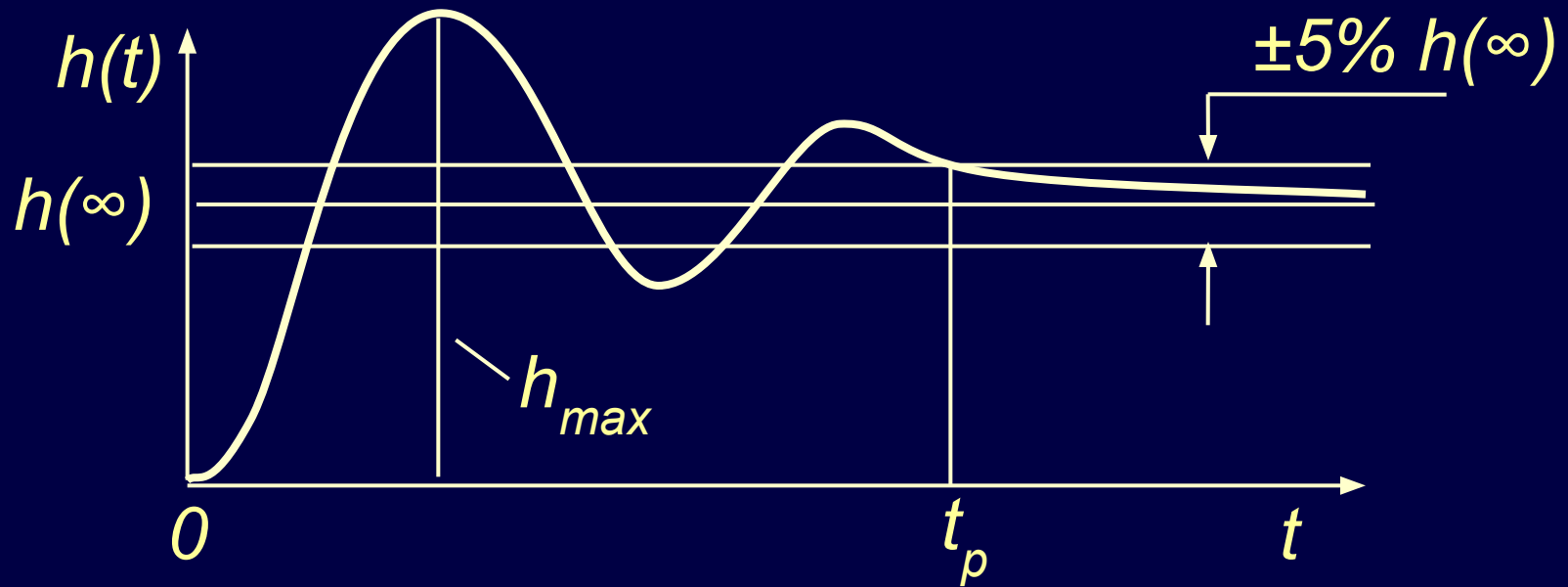
единичный ступенчатый сигнал при нулевых начальных условиях.

Функция $h(t)$ характеризует переход САУ из одного равновесного состояния в другое.

Графическое изображение переходной функции – переходная характеристика.

Время переходного процесса характеризует быстродействие системы и, как правило должно быть минимальным.





ПЕРЕРЕГУЛИРОВАНИЕ - это величина, определяемая формулой:

$$\sigma = \frac{h_{max} - h(\infty)}{h(\infty)} 100\%$$

ВРЕМЕНЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ называется момент времени t_p , когда график переходной функции $h(t)$ входит в "трубку" $\pm 5\% h(\infty)$ и в дальнейшем не выходит из нее.