

Угол между прямыми

Угол между прямыми в пространстве можно находить используя формулу

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|},$$

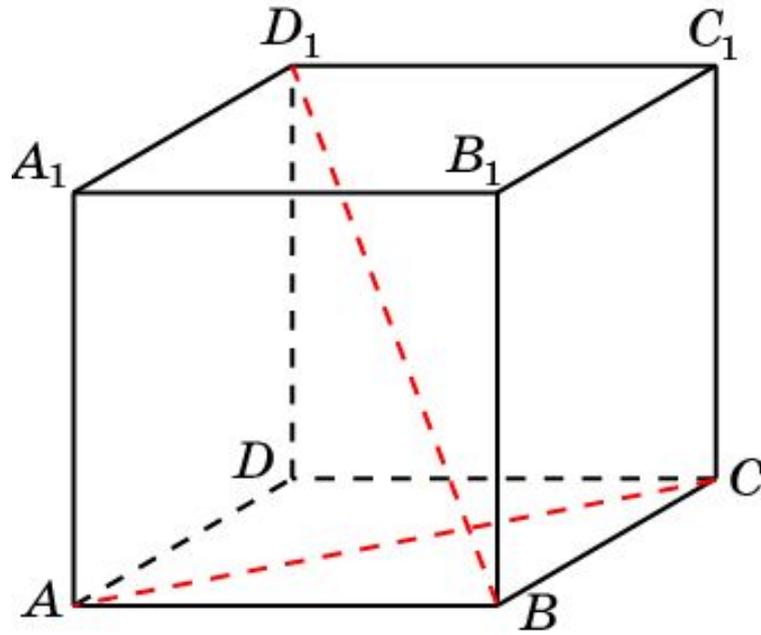
где \vec{a}_1 , \vec{a}_2 - направляющие векторы данных прямых.

Однако угол между векторами может быть тупым, а угол между прямыми нет. Поэтому, если косинус угла между векторами получился отрицательным, то в ответе нужно указывать его модуль.

Здесь мы рассмотрим примеры решения задач на нахождение угла между прямыми в пространстве, используя указанную выше формулу.

Куб 1

В кубе $A\dots D_1$ найдите угол между прямыми AC и BD_1 .



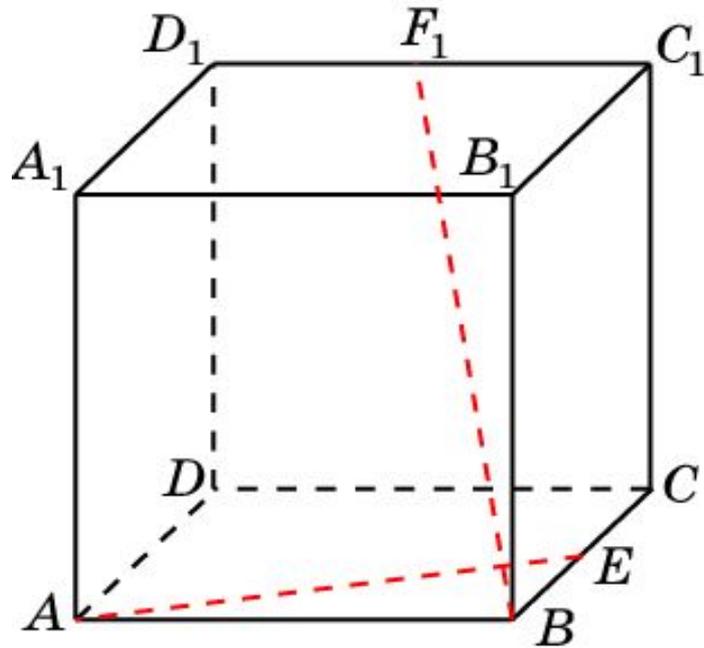
Решение. Введем систему координат, считая точку D началом координат, прямые DA , DC , DD_1 – осями координат. Угол между данными прямыми равен углу между векторами $AC(-1, 1, 0)$ и $BD_1(1, 1, 1)$. Произведение этих векторов равно нулю.

Следовательно, эти векторы перпендикулярны.

Ответ. 90° .

Куб 2

В кубе $A\dots D_1$ найдите угол между прямыми AE и BF_1 , где E и F_1 – середины ребер соответственно BC и C_1D_1 .

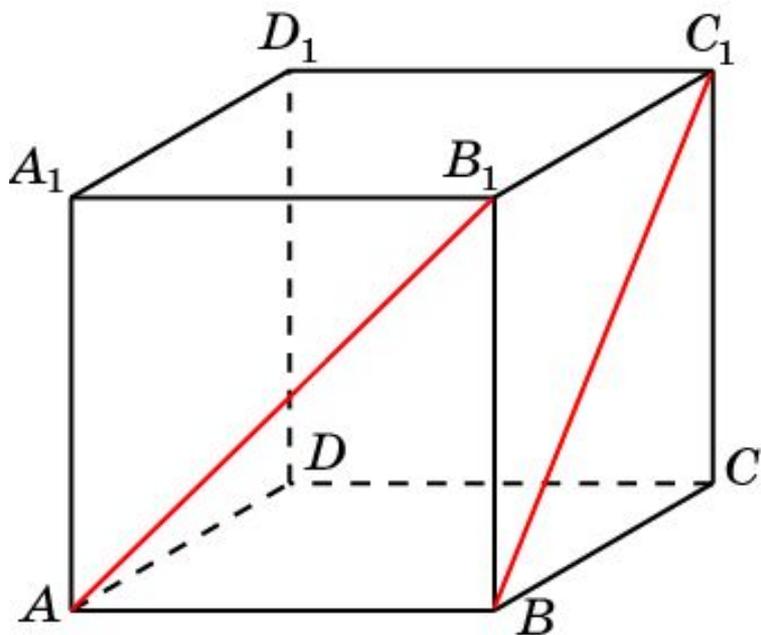


Решение. Введем систему координат, считая точку D началом координат, прямые DA , DC , DD_1 – осями координат. Угол между данными прямыми равен углу между векторами $AE(-0,5, 1, 0)$ и $BF_1(-1, -0,5, 0, 1)$. Скалярное произведение этих векторов равно нулю. Следовательно, эти векторы перпендикулярны.

Ответ. 90° .

Куб 3

В кубе $A\dots D_1$ найдите угол между прямыми AB_1 и BC_1 .



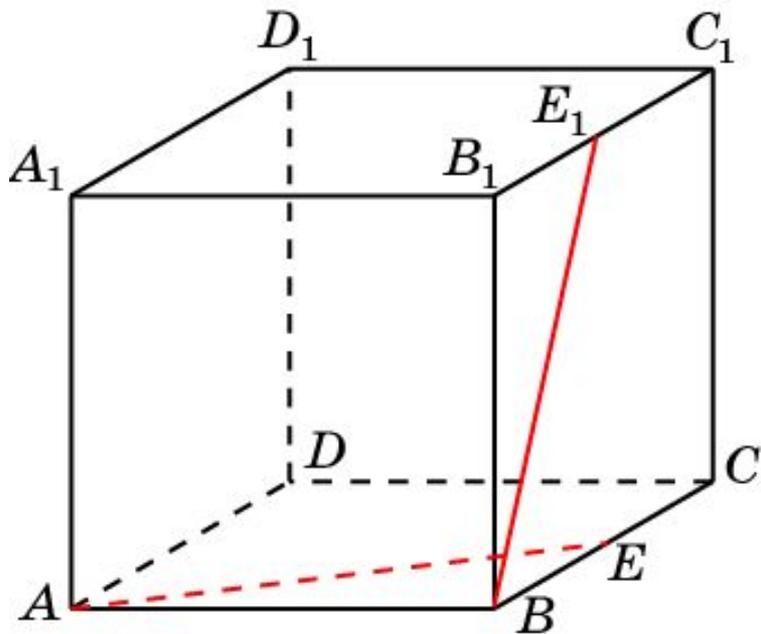
Решение. Введем систему координат, считая точку D началом координат, прямые DA , DC , DD_1 – осями координат. Угол между данными прямыми равен углу между векторами $\overrightarrow{AB_1}(0, 1, 1)$ и $\overrightarrow{BC_1}(-1, 0, 1)$. Их скалярное произведение равно 1. Их длины равны $\sqrt{2}$.

Косинус угла между этими векторами равен 0,5.

Ответ. 60° .

Куб 4

В единичном кубе $A\dots D_1$ найдите косинус угла между прямыми AE и BE_1 , где E и E_1 – середины ребер соответственно BC и B_1C_1 .



Решение. Введем систему координат, считая точку D началом координат, прямые DA , DC , DD_1 – осями координат. Угол между данными прямыми равен углу между векторами $AE(-0,5, 1, 0)$ $BE_1(-0,5, 0, 1)$, скалярное произведение равно 0,25.

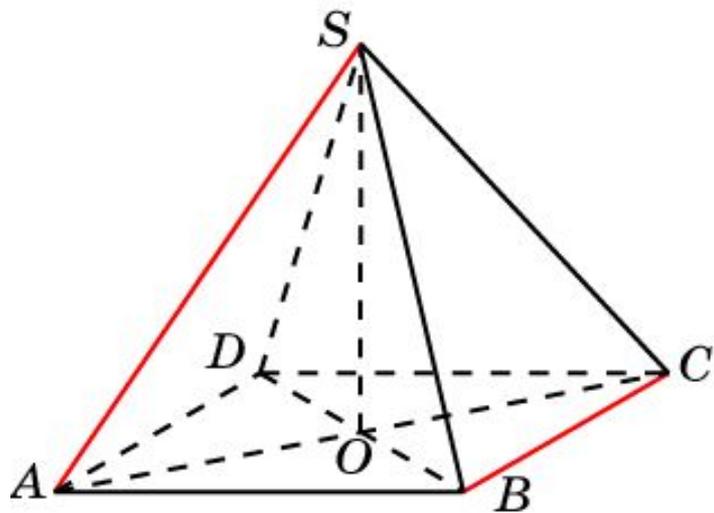
Их длины равны $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Косинус угла между этими векторами равен 0,2.

Ответ. 0,2.

Пирамида 1

В правильной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AS и BC .



Решение. Введем систему координат, считая центр O основания пирамиды началом координат, прямые OA , OB , OS – осями координат. Угол между данными прямыми равен углу между векторами

$$\vec{AS} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \text{ и } \vec{BC} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right).$$

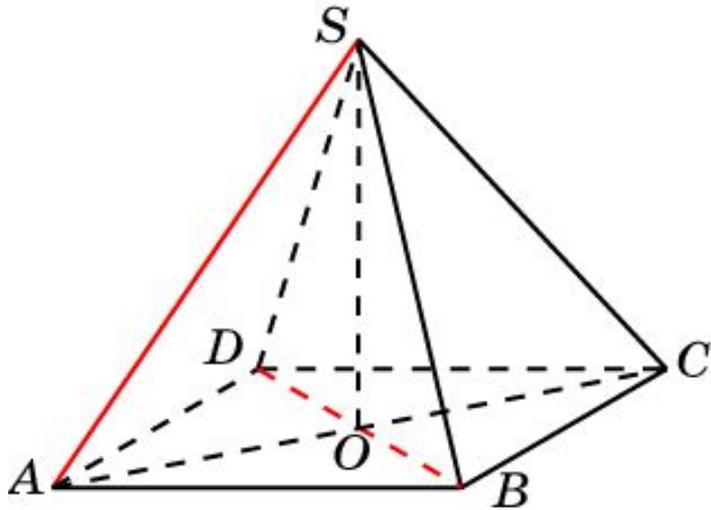
Их скалярное произведение равно 0,5. Их длины равны 1.

Косинус угла между ними равен 0.5.

Ответ: 60° .

Пирамида 2

В правильной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AS и BD .



Решение. Введем систему координат, считая центр O основания пирамиды началом координат, прямые OA , OB , OS – осями координат. Угол между данными прямыми равен углу между векторами

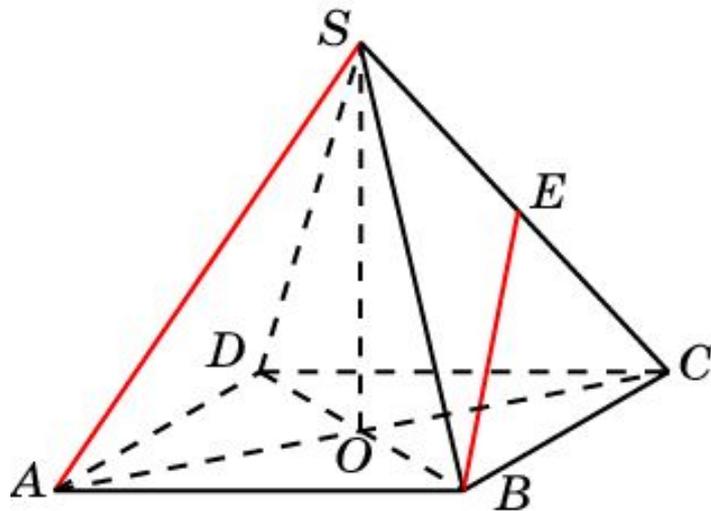
$$\vec{AS} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \text{ и } \vec{BD} \left(0, -\sqrt{2}, 0 \right).$$

Их скалярное произведение равно 0. Следовательно, угол между ними равен 90°

Ответ: 90° .

Пирамида 3

В правильной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, точка E – середина ребра SC . Найдите косинус угла между прямыми AS и BE .



Решение. Введем систему координат, считая центр O основания пирамиды началом координат, прямые OA , OB , OS – осями координат. Угол между данными прямыми равен углу между векторами

$$\vec{AS} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \text{ и } \vec{BE} \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4} \right).$$

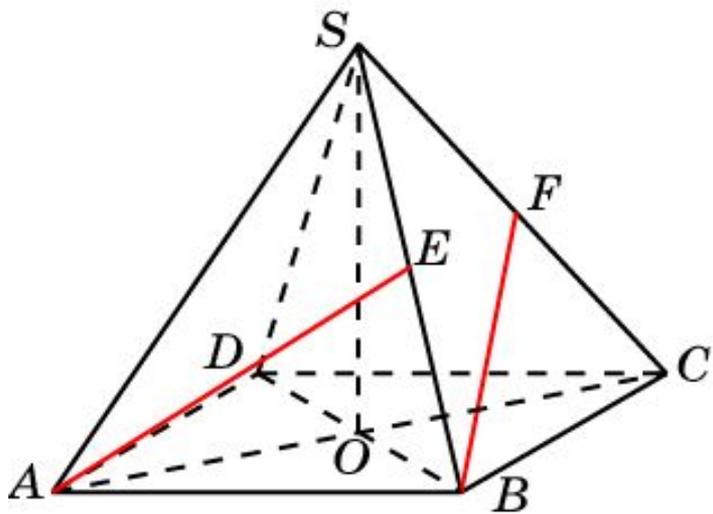
Их скалярное произведение равно $0,5$. Их длины равны 1 и $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Косинус угла между ними равен $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Пирамида 4

В правильной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, точки E, F – середины ребер SB и SC . Найдите косинус угла между прямыми AE и BF .



Решение. Введем систему координат, считая центр O основания пирамиды началом координат, прямые OA, OB, OS – осями координат. Угол между данными прямыми равен углу между векторами

$$\vec{AE} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4} \right) \text{ и } \vec{BF} \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4} \right).$$

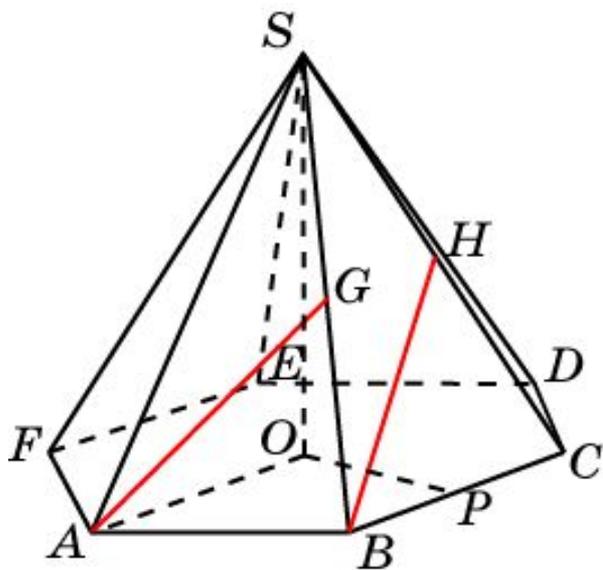
Их скалярное произведение равно $\frac{1}{8}$. Их длины равны $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Косинус угла между ними равен $\frac{1}{6}$.

Ответ: $\frac{1}{6}$.

Пирамида 5

В правильной пирамиде $SAB CDE F$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, точки G и H – середины ребер SB и SC . Найдите косинус угла между прямыми AG и BH .



Решение. Введем систему координат, считая центр O основания пирамиды началом координат, прямые OA , OP , OS – осями координат. Угол между данными прямыми равен углу между векторами

$$\vec{AG} \left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ и } \vec{BH} \left(-\frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

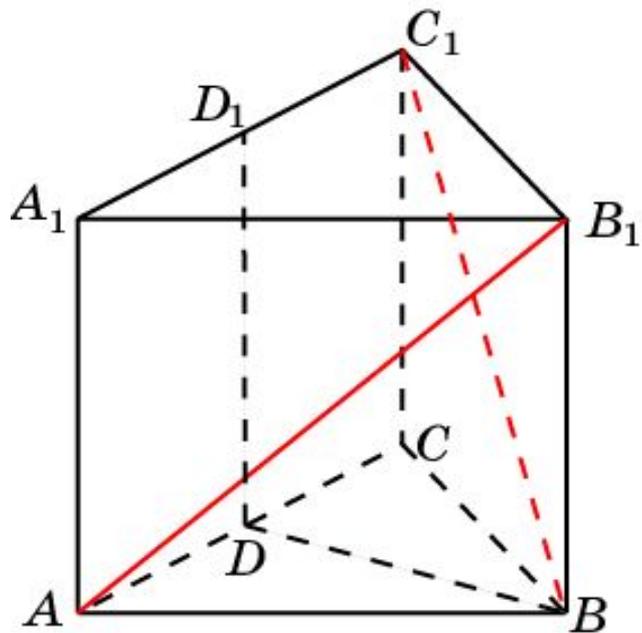
Их скалярное произведение равно $\frac{3}{4}$. Их длины равны 1.

Косинус угла между ними равен $\frac{3}{4}$.

Ответ: $\frac{3}{4}$.

Призма 1

В правильной 3-й призме $ABCA_1B_1C_1$, ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1 .



Решение. Введем систему координат, считая середину D ребра AC началом координат, прямые DA , DB , DD_1 – осями координат. Угол между данными прямыми равен углу между векторами

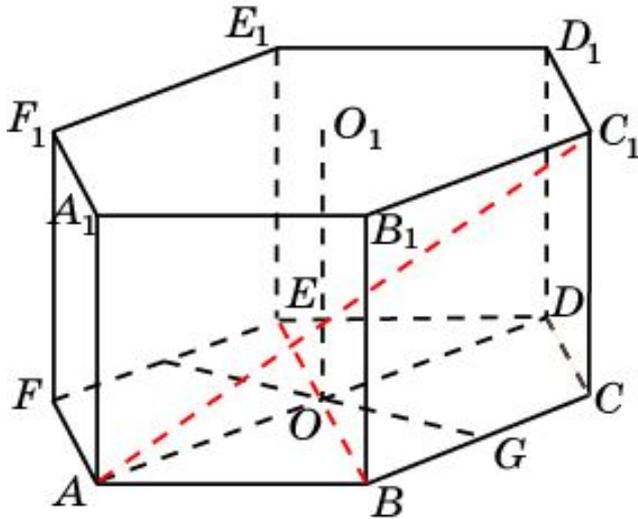
$$\vec{AB_1} \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right) \quad \text{и} \quad \vec{BC_1} \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right).$$

Их скалярное произведение равно 0,5, Длины равны $\sqrt{2}$. Косинус угла между ними равен 0,25.

Ответ. 0,25.

Призма 2

В правильной 6-й призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AC_1 и BE .



Решение. Введем систему координат, считая центр O основания призмы началом координат, прямые OA , OG , OO_1 – осями координат. Угол между данными прямыми равен углу между векторами

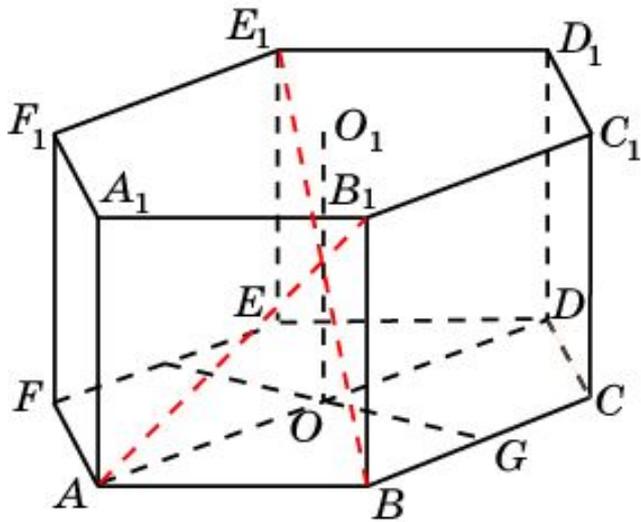
$$\overrightarrow{AC_1} \left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right) \quad \text{и} \quad \overrightarrow{BE} (-1, -\sqrt{3}, 0).$$

Их скалярное произведение равно 0. Угол между ними равен 90° .

Ответ. 90° .

Призма 3

В правильной 6-й призме $A\dots F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и BE_1 .



Решение. Введем систему координат, считая центр O основания призмы началом координат, прямые OA , OG , OO_1 – осями координат. Угол между данными прямыми равен углу между векторами

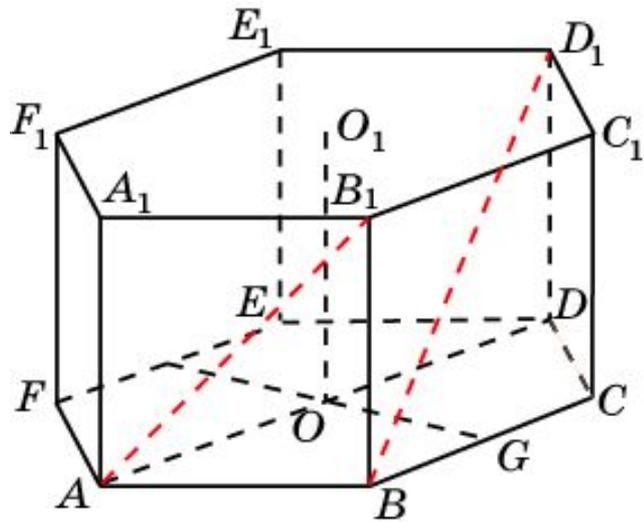
$$\overrightarrow{AB_1} \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right) \quad \text{и} \quad \overrightarrow{BE_1} \left(-1, -\sqrt{3}, 1 \right).$$

Их скалярное произведение равно 0. Угол между ними равен 90° .

Ответ. 90° .

Призма 4

В правильной 6-й призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BD_1 .



Решение. Введем систему координат, считая центр O основания призмы началом координат, прямые OA , OG , OO_1 – осями координат. Угол между данными прямыми равен углу между векторами

$$\vec{AB_1} \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right) \quad \text{и} \quad \vec{BD_1} \left(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right).$$

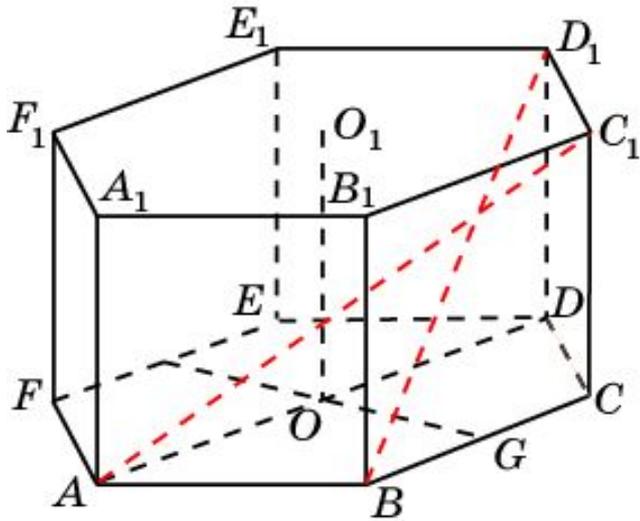
Их скалярное произведение равно 1. Длины равны $\sqrt{2}$ и 2.

Косинус угла между ними равен $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Ответ. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Призма 5

В правильной 6-й призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AC_1 и BD_1 .



Решение. Введем систему координат, считая центр O основания призмы началом координат, прямые OA , OG , OO_1 – осями координат. Угол между данными прямыми равен углу между векторами

$$\vec{AC_1} \left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right) \quad \text{и} \quad \vec{BD_1} \left(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right).$$

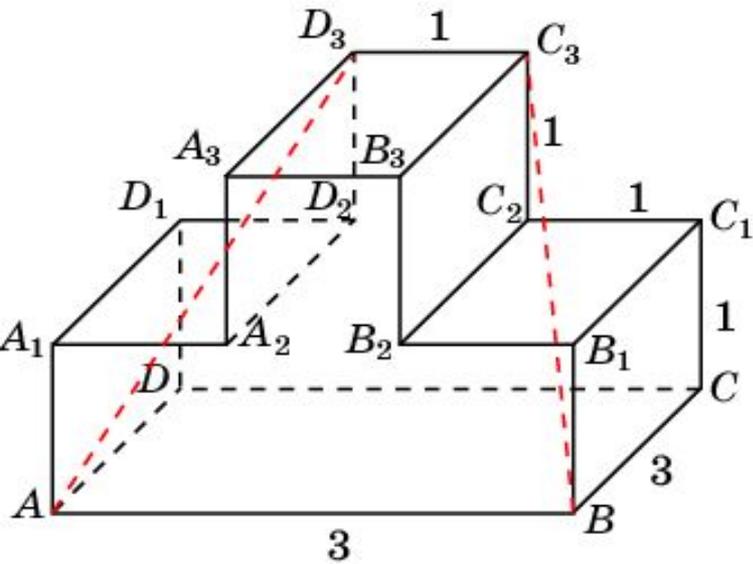
Их скалярное произведение равно 2,5. Длины равны 2.

Косинус угла между ними равен $\frac{5}{8}$.

Ответ. $\frac{5}{8}$.

Многогранник 3

Для многогранника, изображенного на рисунке, все двугранные углы которого прямые, найдите косинус угла между прямыми AD_3 и BC_2 .



Решение. Введем систему координат, считая точку D началом координат, прямые DA , DC , DD_1 – осями координат. Угол между данными прямыми равен углу между векторами

$$\overrightarrow{AD_3}(-3, 1, 2) \text{ и } \overrightarrow{BC_2}(-3, -1, 2) .$$

Скалярное произведение этих векторов равно 12, их длины равны $\sqrt{14}$.

Косинус угла между ними равен $\frac{6}{7}$.

Ответ. $\frac{6}{7}$.

