Восемь способов решения одного тригонометрического уравнения

Восемь способов решения одного тригонометрического уравнения.

1.Приведение уравнения к однородному.

2.Разложение левой части уравнения на множители.

3.Введение вспомогательного угла.

4.Преобразование разности (или суммы) тригонометрических функций в произведение.

5.Приведение к квадратному уравнению.

6.Возведение обеих частей уравнения в квадрат.

7.Универсальная подстановка.

8.Графическое решение.

Задача. Решите уравнение $\sin x - \cos x = 1$ различными способами.

?

Способ первый. Приведение уравнения к однородному.

$$\sin x - \cos x = 1$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2},$$

$$1 = \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}.$$

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} = \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}$$

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\cos^2\frac{x}{2} = 0$$

$$\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right) = 0$$

1) $\cos\frac{x}{2} = 0$ или 2) $\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} = 0$

1) $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z$

$x = \pi + 2\pi k$

Это однородное уравнение первой степени. Делим обе части этого уравнения на

$\cos\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2} \neq 0$ т.к., если $\cos\frac{x}{2} = 0$, то $\sin\frac{x}{2} - 0 = 0$,

что противоречит тождеству $\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = 1$.

Получим: $tg\frac{x}{2} - 1 = 0$

$tg\frac{x}{2} = 1$

$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$

Ответ: $x = \pi + 2\pi k, \quad k \in Z$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$

Способ второй. Разложение левой части уравнения на множители.

$$\sin x - \cos x = 1$$

$$\sin x - (1 + \cos x) = 0$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

$$1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2};$$

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\cos^2\frac{x}{2} = 0$$

$$\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right) = 0$$

Далее так, как в первом способе.

Способ третий. Введение вспомогательного угла.

$$\sin x - \cos x = 1$$

$$\sqrt{2}\left(\sin x \frac{1}{\sqrt{2}} - \cos x \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$$

В левой части вынесем $\sqrt{2}$ - корень квадратный из суммы квадратов коэффициентов при **sin x** и **cos x**.

$$\sin x \frac{1}{\sqrt{2}} - \cos x \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin x \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin x \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x - \frac{\pi}{4} = (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k, \qquad k \in Z.$$

$$x = \frac{\pi}{4} + (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k$, $\quad k \in Z.$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$$

sinα cosβ – cos α sin β = sin (α-β)

Внимание! Эквивалентны ли результаты , полученные в рассмотренных способах решений данного уравнения

$\sin x - \cos x = 1$?

Покажем однозначность ответов.

1-й способ

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x: \frac{\pi}{2}; 5\frac{\pi}{2}; 9\frac{\pi}{2}; -3\frac{\pi}{2}; -7\frac{\pi}{2}; \ldots$$

$$x = \pi + 2\pi n, n \in Z$$

$$x = \pi; 3\pi; 5\pi; -\pi; -3\pi; \ldots$$

2-й способ

$$x = \frac{\pi}{4} + (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$$

$$x: \frac{\pi}{2}; \pi; 5\frac{\pi}{2}; 3\pi; 9\frac{\pi}{2}; -\pi; -3\frac{\pi}{2}; -3\pi; -7\frac{\pi}{2} \ldots$$

Способ четвертый. Преобразование разности (или суммы) тригонометрических функций в произведение.

Запишем уравнение **sin x – cosx = 1** в виде:

$$\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Применим формулу разности двух синусов.

$$2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4} = 1$$

$$2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Далее так, как в третьем способе.

Способ пятый. Приведение к квадратному уравнению относительно одной функции.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$$
$$\sin x - \cos x = 1 \Rightarrow \pm\sqrt{1-\cos^2 x} - \cos x = 1$$
$$\pm\sqrt{1-\cos^2 x} = 1 + \cos x$$

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$1-\cos^2 x = 1 + 2\cos x + \cos^2 x$$
$$2\cos^2 x + 2\cos x = 0$$
$$\cos x(\cos x + 1) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x + 1 = 0 \end{array}\right.$$ или

$$\cos x = 0, \qquad x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$$
$$\cos x + 1 = 0, \cos x = -1, \ x = \pi + 2\pi n, n \in Z.$$

Способ шестой. Возведение обеих частей уравнения в квадрат. $\sin x - \cos x = 1$

$$\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 1,$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 - 2\sin x\cos x = 1,$$

$$2\sin x\cos x = 0,$$

$\sin x = 0$ или $\cos x = 0$

$x = \pi n,\ n \in Z$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

Ответ: $x = \pi n,\ n \in Z,$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

Способ седьмой. Универсальная подстановка .

Выражение всех функций через $tg\frac{x}{2}$ (универсальная подстановка) по формулам:

$$sinx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}; \quad cosx = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}; \quad tgx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}};$$

sin x –cosx = 1

$$\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} - \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = 1$$

$$1+tg^2\frac{x}{2} \neq 0, \text{т. к. } tg^2\frac{x}{2} \geq 0.$$

Умножим обе части уравнения на $1+tg^2\frac{x}{2}$

$$tg\frac{x}{2} = 1, \quad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z,$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$$

Внимание! Могли потерять корни.Необходима проверка!

Область допустимых значений первоначального уравнения - всё множество R . При переходе к $tg\frac{x}{2}$ из рассмотрения выпали значения

x, при которых $tg\frac{x}{2}$ не имеет смысла, т.е.$x = \pi + \pi n$, где $n \in Z$.

Следует проверить , не является ли

$x = \pi + \pi n$, где $n \in Z$ решением данного уравнения.

Левая часть $\sin(\pi - 2\pi k) - \cos(\pi + 2\pi k) = \sin \pi - \cos \pi = 0 - (-1) = 1$ и правая часть равна единице. Значит, $x = \pi + \pi n$,где $n \in Z$ является решением данного уравнения.

Ответ: $x = \pi + \pi n$, $n \in Z$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

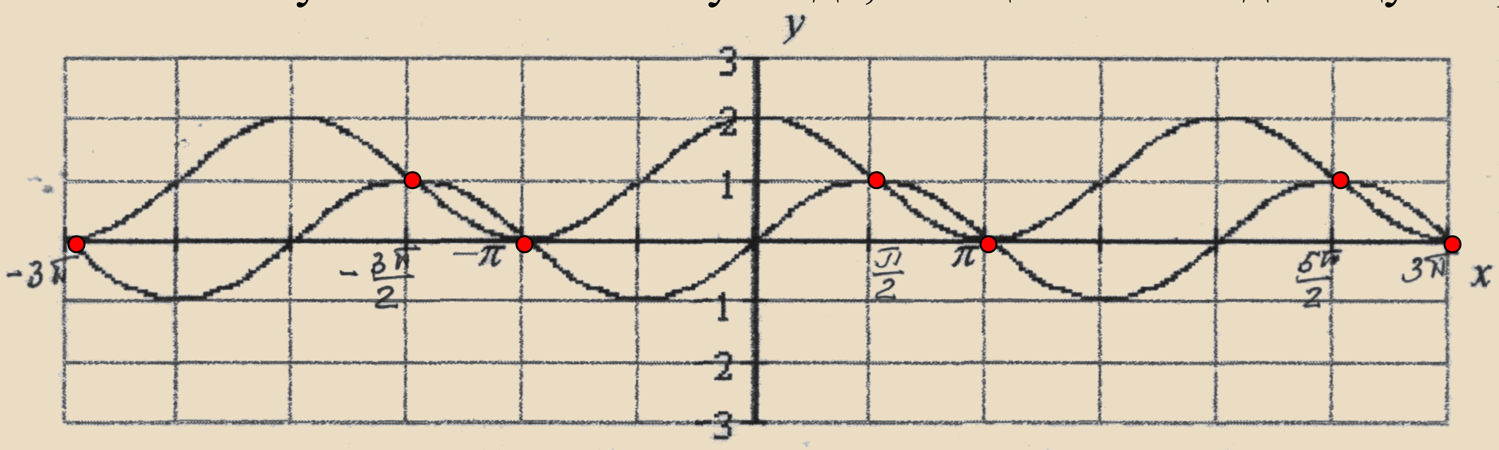
Способ восьмой. Графический способ решения.

$\sin x = \cos x + 1$

На одном и том же чертеже построим графики функций, соответствующих левой и правой части уравнения. Абсциссы точек пересечения графиков являются решением данного уравнения,

$y = \sin x$ - график синусоида.

$y = \cos x + 1$ – синусоида, смещённая на единицу вверх.



Ответ: $x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z;$ $\qquad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z.$