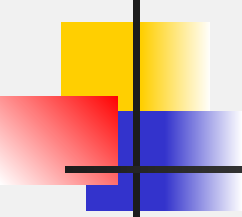


Эконометрика-II



Лекция 3
28.02.2018



Причинность по Грейнджеру для N временных рядов

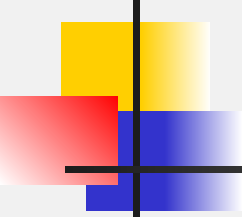
- y_1, y_2, \dots, y_N – N временных рядов,
- $y_t = (y_{1t}, \dots, y_{N,t})^T$ – векторный временной ряд, образованный этими N рядами

- Рассматриваем разбиение y_t на две части:

$$y_t = \begin{pmatrix} y_t^{(1)} \\ y_t^{(2)} \end{pmatrix}$$

- где

$$y_t^{(1)} = (y_{1t}, \dots, y_{N_1,t})^T, \quad y_t^{(2)} = (y_{N_1+1,t}, \dots, y_{N,t})^T, \quad 1 \leq N_1 < N$$

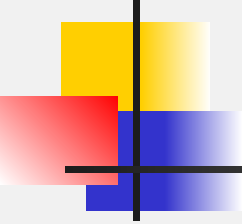


$$\begin{pmatrix} y_t \\ z_t \\ x_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_{11}(L) & \varphi_{12}(L) & \varphi_{13}(L) \\ \varphi_{21}(L) & \varphi_{22}(L) & \varphi_{23}(L) \\ \varphi_{31}(L) & \varphi_{23}(L) & \varphi_{33}(L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_t \\ z_t \\ x_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \varepsilon_{3t} \end{pmatrix}$$

- Непосредственный перенос условия G-причинности $x \xrightarrow{G} y$ для VAR с двумя переменными на VAR с тремя переменными приводит к следующему условию отсутствия такой связи:

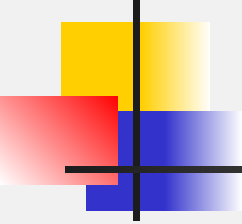
$$\varphi_{13}(L) = 0$$

- Но если остальные элементы матрицы отличны от нуля, то тогда $x \xrightarrow{G} z$ и $z \xrightarrow{G} y$ т.е. такое определение G-причинности не является транзитивным в системах с тремя и более переменными.
- Это определение не учитывает возможность опосредованного влияния переменной x на переменную y через “промежуточную” переменную z .



Блочная экзогенность (block exogeneity)

- *Блочная экзогенность одной группы переменных (или некоторой переменной) в отношении другой группы переменных (или другой переменной) :*
- *запаздывающие значения переменных второй группы не входят в уравнения для переменных первой группы.*



$$y_t = c + \Phi_1 y_{t-1} + \dots + \Phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t,$$

$$\varepsilon_t \sim i.i.d. N(0, \Sigma)$$

$$y_t = \begin{pmatrix} y_t^{(1)} \\ y_t^{(2)} \end{pmatrix}$$

$y_{it} =$

$$\alpha_i + \omega_{1i}^T y_{t-1}^{(1)} + \lambda_{1i}^T y_{t-1}^{(2)} + \omega_{2i}^T y_{t-2}^{(1)} + \lambda_{2i}^T y_{t-2}^{(2)} + \dots + \omega_{pi}^T y_{t-p}^{(1)} + \lambda_{pi}^T y_{t-p}^{(2)} + u_{it}$$

$$H_0 : \lambda_{1i} = \lambda_{2i} = \dots = \lambda_{pi} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_1$$

– Гипотеза блочной экзогенности первой группы переменных в отношении второй группы переменных

Если эта гипотеза выполняется, то в порождении переменных первой группы не участвуют переменные второй группы.

N_2 уравнений второй группы образуют открытую VAR



Проверка гипотезы блочной экзогенности

- Рассмотренная выше гипотеза блочной экзогенности первой группы переменных в отношении второй группы переменных накладывает $N_1 N_2 p$ ограничений на коэффициенты VAR(p) для N переменных, и при $N_1 > 1$ имеет **перекрестный** характер, затрагивая коэффициенты **сразу нескольких уравнений** (точнее, коэффициенты N_1 уравнений).
- Проверить эту гипотезу можно, применяя **критерий отношения правдоподобий**, статистика которого равна
- $LR = 2(l_{UNRESTR} - l_{RESTR})$, где $l_{UNRESTR}$ – логарифм максимума функции правдоподобия при оценивании VAR(p) без ограничений на коэффициенты, а l_{RESTR} – логарифм максимума функции правдоподобия при оценивании VAR(p) с ограничениями на коэффициенты, соответствующими проверяемой гипотезе.



Проверка гипотезы блочной экзогенности

$$LR = 2(l_{UNRESTR} - l_{RESTR}) = T \left(\ln |\hat{\Omega}_{RESTR}| - \ln |\hat{\Omega}_{UNRESTR}| \right)$$

- $|\hat{\Omega}|$ – определитель оцененной ковариационной матрицы инноваций, вычисляемой двумя разными способами:

- $|\hat{\Omega}| = \det \left(\frac{1}{T} \sum_t \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_t^T \right)$ или $|\hat{\Omega}| = \det \left(\frac{1}{T-p} \sum_t \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_t^T \right)$

Если VAR стабильна, то статистика **LR** имеет **асимптотическое распределение хи-квадрат** с числом степеней свободы, равным количеству зануляемых коэффициентов

Причинность по Грейнджеру в модели VAR с тремя переменными

$$\begin{aligned} Y_t &= 0.6 Y_{t-1} + 0.5 Z_{t-1} + \varepsilon_{1t}, \\ X_t &= 0.6 X_{t-1} + 0.25 Z_{t-1} + \varepsilon_{2t}, \\ Z_t &= 0.25 X_{t-1} + 0.6 Z_{t-1} + \varepsilon_{3t}. \end{aligned}$$

Является ли переменная X G-причиной для переменной Y ?

$$Z_{t-1} = 0.25 X_{t-2} + 0.6 Z_{t-2} + \varepsilon_{3,t-1}$$

$$Y_t = 0.6 Y_{t-1} + 0.125 X_{t-2} + 0.3 Z_{t-2} + \varepsilon_{1t} + 0.5 \varepsilon_{3,t-1}.$$

Группа 1: переменная Y

Группа 2: переменные X и Z

Переменные группы 2 являются G-причиной для Y

$$\begin{aligned}
 Y_t &= 0.6 Y_{t-1} + 0.5 Z_{t-1} + \varepsilon_{1t}, \\
 X_t &= 0.6 X_{t-1} + 0.25 Z_{t-1} + \varepsilon_{2t}, \\
 Z_t &= 0.25 X_{t-1} + 0.6 Z_{t-1} + \varepsilon_{3t}.
 \end{aligned}$$

$$Y_t = 0.6 Y_{t-1} + 0.125 X_{t-2} + 0.3 Z_{t-2} + \varepsilon_{1t} + 0.5 \varepsilon_{3, t-1}$$

X_{t-1} не входит в последнее уравнение

Pairwise Granger Causality Tests

Sample: 1 500

Lags: 1

Null Hypothesis:

	Obs	F-Statistic	Prob.
Y does not Granger Cause X	499	8.00194	0.0049
X does not Granger Cause Y		20.8479	6.E-06 – Почему?
Z does not Granger Cause X	499	48.1778	1.E-11
X does not Granger Cause Z		28.6382	1.E-07
Z does not Granger Cause Y	499	187.416	2.E-36
Y does not Granger Cause Z		0.07788	0.7803

Null Hypothesis:	Obs	F-Statistic	Prob.

Y does not Granger Cause X	499	8.00194	0.0049
X does not Granger Cause Y		20.8479	6.E-06 – Почему?

Dependent Variable: Y

Method: Least Squares

Sample (adjusted): 2 500

Included observations: 499 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.020849	0.051074	-0.408209	0.6833
Y(-1)	0.727267	0.030569	23.79084	0.0000
X(-1)	0.160693	0.035194	4.565954	0.0000

$$4.565954^2 = 20.8479$$

Гипотеза H_0 : “X не является G-причиной для Y” **отвергается уже при привлечении только первых лагов**

– Почему?

$$\begin{aligned} Y_t &= 0.6 Y_{t-1} + 0.5 Z_{t-1} + \varepsilon_{1t}, \\ X_t &= 0.6 X_{t-1} + 0.25 Z_{t-1} + \varepsilon_{2t}, \\ Z_t &= 0.25 X_{t-1} + 0.6 Z_{t-1} + \varepsilon_{3t}. \end{aligned}$$

$$Z_{t-1} = 4 (X_t - 0.6 X_{t-1} - \varepsilon_{2t})$$

$$\begin{aligned}
 Y_t &= 0.6 Y_{t-1} + 0.5 Z_{t-1} + \varepsilon_{1t}, \\
 X_t &= 0.6 X_{t-1} + 0.25 Z_{t-1} + \varepsilon_{2t}, \\
 Z_t &= 0.25 X_{t-1} + 0.6 Z_{t-1} + \varepsilon_{3t}.
 \end{aligned}$$

Vector Autoregression Estimates

Sample (adjusted): 2 500

Included observations: 499 after adjustments

Standard errors in () & t-statistics in []

	X	Y	Z
X(-1)	0.628552 (0.03449) [18.2258]	0.009516 (0.03226) [0.29503]	0.193404 (0.03331) [5.80632]
Y(-1)	0.012857 (0.03057) [0.42054]	0.595029 (0.02860) [20.8081]	-0.038285 (0.02953) [-1.29648]
Z(-1)	0.241654 (0.03696) [6.53908]	0.435552 (0.03456) [12.6011]	0.686442 (0.03569) [19.2317]

U3 VAR: Proc/ Make System

$$X = C(1)*X(-1) + C(2)*Y(-1) + C(3)*Z(-1)$$

$$Y = C(4)*X(-1) + C(5)*Y(-1) + C(6)*Z(-1)$$

$$Z = C(7)*X(-1) + C(8)*Y(-1) + C(9)*Z(-1)$$

Estimate/ Ordinary Least Squares

$$c(4)=c(7)=0$$

Wald Test:

System: Untitled

Test Statistic	Value	df	Probability
Chi-square	33.80044	2	0.0000

$$c(4)=c(6)=0$$

Wald Test:

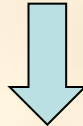
System: Untitled

Test Statistic	Value	df	Probability
Chi-square	188.9828	2	0.0000

Группа 1: переменная Y

Группа 2: переменные X и Z

Из VAR: **View/ Lag Structure/ Granger Causality**



VAR Granger Causality/Block Exogeneity Wald Tests

Sample: 1 500

Included observations: 499

Dependent variable: X

Excluded Chi-sq df Prob.

Y	0.176851	1	0.6741
Z	42.75958	1	0.0000
All	52.03015	2	0.0000

Dependent variable: Y

Excluded Chi-sq df Prob.

X	0.087042	1	0.7680
Z	158.7880	1	0.0000
All	188.9828	2	0.0000

Dependent variable: Z

Excluded Chi-sq df Prob.

X	33.71340	1	0.0000
Y	1.680859	1	0.1948
All	33.86982	2	0.0000

Группа 1: переменная Y

Группа 2: переменные X и Z

$$X = C(1)*X(-1) + C(2)*Y(-1) + C(3)*Z(-1)$$

$$Y = C(4)*X(-1) + C(5)*Y(-1) + C(6)*Z(-1)$$

$$Z = C(7)*X(-1) + C(8)*Y(-1) + C(9)*Z(-1)$$

$$c(2)=c(8)=0$$

(переменные X и Z **блочнo экзoгенны по отношению к Y**)

Wald Test:

System: SYS01

Test Statistic	Value	df	Probability
Chi-square	1.857710	2	0.3950



Нестабильные VAR

- VAR нестабильна, если нарушено условие стабильности

Все корни уравнения $\det A(z)=0$ лежат за пределами единичного круга.

Пример: *нестабильная* VAR(1) для двух рядов

$$\begin{aligned} y_{1t} &= 0.8 y_{1, t-1} + 0.2 y_{2, t-1} + \varepsilon_{1t}, \\ y_{2t} &= 0.2 y_{1, t-1} + 0.8 y_{2, t-1} + \varepsilon_{2t}. \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8L & 0.2L \\ 0.2L & 0.8L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}, \quad A(L) = \begin{pmatrix} 1 - 0.8L & -0.2L \\ -0.2L & 1 - 0.8L \end{pmatrix}$$

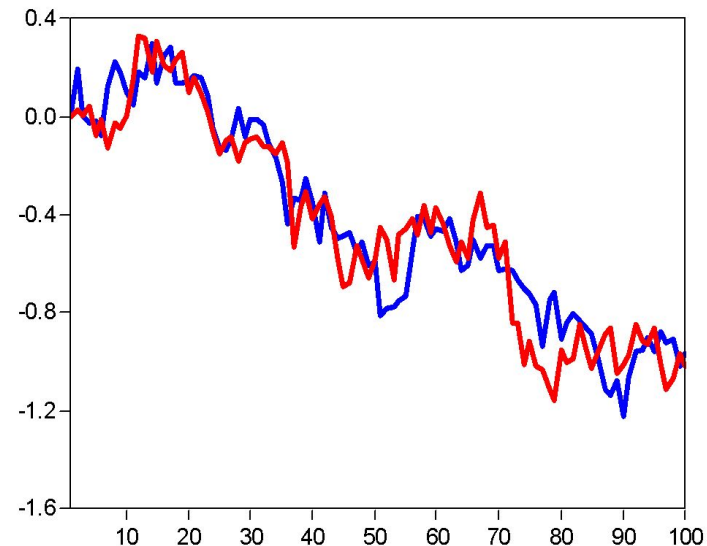
$$\det A(z) = 0 \quad \square \quad (1 - z)(1 - 0.6z) = 0 \quad \square \quad \text{VAR неустойчива}$$

$$A(1) = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.2 \\ -0.2 & 0.2 \end{pmatrix}, \quad \det A(1) = 0$$

$$\text{Cov}(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}) = 0$$

$$x_{11} = x_{21} = 0$$

$$m = 1, a = 0 \quad \square \quad d = 1$$



$$y_t = \alpha + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$y_t = \alpha + a_1 y_{t-1} + (a_2 y_{t-1} - a_2 y_{t-1}) + a_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$y_t = \alpha + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-1} - a_2 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$y_t = \alpha + (a_1 + a_2) y_{t-1} - a_2 (y_{t-1} - y_{t-2}) + \varepsilon_t$$

$$y_t = \alpha + \rho y_{t-1} + \zeta_1 \Delta y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\rho = a_1 + a_2$$

$$\zeta_{p-1} = -a_2$$

$$y_t = \alpha + \Phi_1 y_{t-1} + \varnothing + \Phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t \quad (*)$$

Компоненты вектора y_t являются I(1)-рядами

- Эквивалентная форма:

$$y_t = \alpha + \rho y_{t-1} + \zeta_1 \Delta y_{t-1} + \varnothing + \zeta_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + \varepsilon_t \quad (**)$$

$$\rho = \Phi_1 + \varnothing + \Phi_p$$

- Если $\rho = I_n$ то **компоненты y_t не коинтегрированы,**
и модель принимает **форму векторной авторегрессии VAR(p-1)**

в разностях:

$$\Delta y_t = \alpha + \zeta_1 \Delta y_{t-1} + \varnothing + \zeta_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + \varepsilon_t \quad (***)$$

DGP:

$$\rho = \Phi_1 + \boxtimes + \Phi_p = I_n$$

$$\Delta y_t = \alpha + \zeta_1 \Delta y_{t-1} + \boxtimes + \zeta_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + \varepsilon_t \quad (***)$$

- **При оценивании статистической модели**

$$y_t = \alpha + \rho y_{t-1} + \zeta_1 \Delta y_{t-1} + \boxtimes + \zeta_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + \varepsilon_t \quad (**)$$

- независимо от того, $\alpha = 0$ или $\alpha \neq 0$ в DGP, совместное распределение оценок матричных коэффициентов $\zeta_1, \boxtimes, \zeta_{p-1}$ **асимптотически нормально**, так что для проверки гипотез об этих коэффициентах **можно использовать стандартные t и F-критерии** (в асимптотике), или $qF \sim \chi^2(q)$

- То же относится и к проверке гипотез о матричных коэффициентах
- Φ_1, \dots, Φ_p в

$$y_t = \alpha + \Phi_1 y_{t-1} + \dots + \Phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t \quad (*)$$

- кроме гипотез о значении их суммы $\Phi_1 + \dots + \Phi_p$
- (Оценка для этой суммы, т.е. для ρ , *имеет нестандартное распределение.*)
- *возможно использование стандартных тестов* для проверки гипотезы
 - **$H_0: DGP = VAR(p_0), p_0 > 0,$**
 - против альтернативы
 - **$H_A: DGP = VAR(p)$ с $p > p_0,$**
- с целью выбора оптимальной глубины запаздываний.

Проверка на причинность по Грейнджеру отдельных переменных или подгруппы переменных в случае некоинтегрированной VAR

- Гипотеза H_0 : переменные группы 2 не являются Грейнджер-причиной для переменной группы 1.
- В стационарном случае** мы записывали модель в уровнях в виде

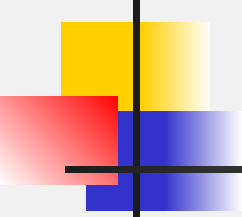
$$y_{it} = \omega_{1i}^T y_{t-1}^{(1)} + \lambda_{1i}^T y_{t-1}^{(2)} + \omega_{2i}^T y_{t-2}^{(1)} + \lambda_{2i}^T y_{t-2}^{(2)} + \dots + \omega_{pi}^T y_{t-p}^{(1)} + \lambda_{pi}^T y_{t-p}^{(2)} + \alpha_i + \varepsilon_{it}$$

- и проверяли гипотезу $H_0 = \lambda_{1i} = \lambda_{2i} = \dots = \lambda_{pi} = 0$,
- используя **стандартные критерии.**
- Перепишем эту модель в виде:

$$y_{it} = \alpha_i + \eta_i^T y_{t-1}^{(1)} + \delta_i^T y_{t-1}^{(2)} + \beta_{1i}^T \Delta y_{t-1}^{(1)} + \gamma_{1i}^T \Delta y_{t-1}^{(2)} + \beta_{2i}^T \Delta y_{t-2}^{(1)} + \gamma_{2i}^T \Delta y_{t-2}^{(2)} + \dots + \beta_{p-1,i}^T \Delta y_{t-p+1}^{(1)} + \gamma_{p-1,i}^T \Delta y_{t-p+1}^{(2)} + \varepsilon_{it}.$$

- нулевая гипотеза принимает вид:

$$H'_0 : \delta_i = 0, \gamma_{1i} = \gamma_{2i} = \dots = \gamma_{p-1,i} = 0$$


$$H_0 = \lambda_{1i} = \lambda_{2i} = \dots = \lambda_{pi} = 0$$

$$H'_0 : \delta_i = 0, \gamma_{1i} = \gamma_{2i} = \dots = \gamma_{p-1,i} = 0$$

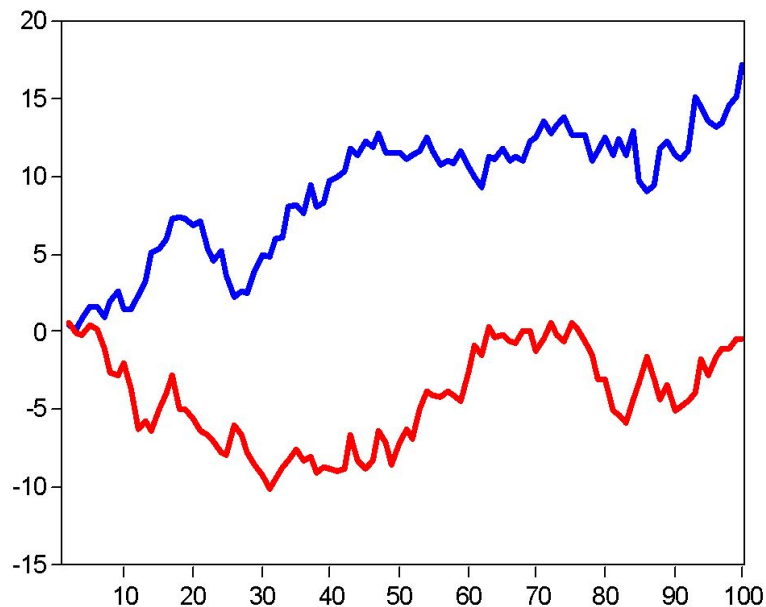
- Статистика F -критерия для проверки гипотезы H_0 численно идентична статистике F -критерия для проверки гипотезы H'_0 .
- Оценка для δ_i имеет нестандартное распределение \square
- Статистика F -критерия для проверки гипотезы H_0 имеет нестандартное распределение.
- Моделирование показывает, что в подобных ситуациях слишком часто определяется ложная причинность по Грейнджеру.



Ложная причинность по Грейнджеру

- Два независимо порождаемых случайных блуждания:

$$Y_{1t} = Y_{1, t-1} + \varepsilon_{1t},$$
$$Y_{2t} = Y_{2, t-1} + \varepsilon_{2t}, \quad Y_{1t} = Y_{2t} = 0$$





Проверка на причинность по Грейнджеру

- Pairwise Granger Causality Tests

- Sample: 1 100

- Lags: 1

- Null Hypothesis: Obs F-Statistic Prob.

- Y2 does not Granger Cause Y1 98 0.10520 0.7464

- Y1 does not Granger Cause Y2 5.93519 **0.0167**



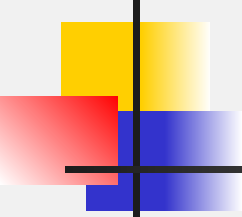
Причинность в краткосрочном плане (short-run)

- Если рассматривается **некоинтегрированная VAR(p)** с **I(1)-переменными**, то, переходя к **модели в разностях**, мы получаем **стационарную VAR(p-1)**.

$$\Delta y_t = \alpha + \zeta_1 \Delta y_{t-1} + \dots + \zeta_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + \varepsilon_t \quad (***)$$

- Если **N=2**, то VAR в разностях имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta y_{1t} &= \alpha_1 + \zeta_{11}^{(1)} \Delta y_{1,t-1} + \zeta_{11}^{(2)} \Delta y_{1,t-2} + \dots + \zeta_{11}^{(p-1)} \Delta y_{1,t-p+1} + \\ &\quad + \zeta_{12}^{(1)} \Delta y_{2,t-1} + \zeta_{12}^{(2)} \Delta y_{2,t-2} + \dots + \zeta_{12}^{(p-1)} \Delta y_{2,t-p+1} + \varepsilon_{1t}, \\ \Delta y_{2t} &= \alpha_2 + \zeta_{21}^{(1)} \Delta y_{1,t-1} + \zeta_{21}^{(2)} \Delta y_{1,t-2} + \dots + \zeta_{21}^{(p-1)} \Delta y_{1,t-p+1} + \\ &\quad + \zeta_{22}^{(1)} \Delta y_{2,t-1} + \zeta_{22}^{(2)} \Delta y_{2,t-2} + \dots + \zeta_{22}^{(p-1)} \Delta y_{2,t-p+1} + \varepsilon_{2t} \end{aligned}$$

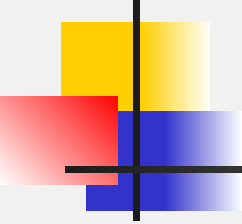


Некоинтегрированная VAR: причинность в краткосрочном плане

- Если в первом уравнении

$$\Delta y_{1t} = \alpha_1 + \zeta_{11}^{(1)} \Delta y_{1,t-1} + \zeta_{11}^{(2)} \Delta y_{1,t-2} + \dots + \zeta_{11}^{(p-1)} \Delta y_{1,t-p+1} + \\ + \zeta_{12}^{(1)} \Delta y_{2,t-1} + \zeta_{12}^{(2)} \Delta y_{2,t-2} + \dots + \zeta_{12}^{(p-1)} \Delta y_{2,t-p+1} + \varepsilon_{1t}$$

- $\zeta_{12}^{(1)} = \zeta_{12}^{(2)} = \dots = \zeta_{12}^{(p-1)} = 0$,
- то y_2 не является G-причиной для y_1 в краткосрочном плане.



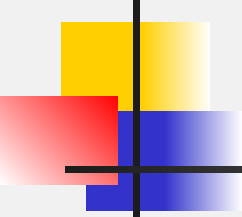
Некоинтегрированная VAR: причинность в краткосрочном плане

- Если во втором уравнении

$$\Delta y_{2t} = \alpha_2 + \zeta_{21}^{(1)} \Delta y_{1,t-1} + \zeta_{21}^{(2)} \Delta y_{1,t-2} + \dots + \zeta_{21}^{(p-1)} \Delta y_{1,t-p+1} + \\ + \zeta_{22}^{(1)} \Delta y_{2,t-1} + \zeta_{22}^{(2)} \Delta y_{2,t-2} + \dots + \zeta_{22}^{(p-1)} \Delta y_{2,t-p+1} + \varepsilon_{2t}$$

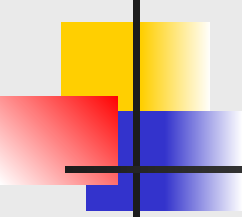
$$\zeta_{21}^{(1)} = \zeta_{21}^{(2)} = \dots = \zeta_{21}^{(p-1)} = 0$$

- то y_1 не является G-причиной для y_2 в краткосрочном плане.



Некоинтегрированная VAR: причинность в краткосрочном плане

- В силу стационарности VAR в разностях,
- **асимптотически оправданно** использование F-критериев для проверки линейных гипотез о коэффициентах этой VAR,
- так что ***проверка выполнения этих соотношений может осуществляться на основе соответствующих F-критериев.***



Проверка на причинность по Грейнджеру в случае коинтегрированной VAR

- Модель
$$y_t = \alpha + \Phi_1 y_{t-1} + \dots + \Phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t \quad (*)$$

- можно записать в форме *модели коррекции ошибок*

$$\Delta y_t = \alpha + BA^T y_{t-1} + \zeta_1 \Delta y_{t-1} + \dots + \zeta_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + \varepsilon_t$$

- $B - (N \times r)$ -матрица *коэффициентов адаптации*,
- $A^T - (r \times N)$ -матрица, строки которой представляют r линейно независимых *коинтегрирующих векторов-строк*, $r - \text{ранг коинтеграции}$,

$$1 \leq r \leq N - 1$$

- (При $r = 0$ *коинтеграции нет*; при $r = N$ *все ряды стационарны*.)

$$\Delta y_{1t} = \alpha_1 + B_{11}z_{1,t-1} + \boxtimes + B_{1r}z_{r,t-1} +$$

$$+ \left(\zeta_{11}^{(1)} \Delta y_{1,t-1} + \boxtimes + \zeta_{1,N}^{(1)} \Delta y_{N,t-1} \right) +$$

$$+ \left(\zeta_{11}^{(2)} \Delta y_{1,t-2} + \boxtimes + \zeta_{1,N}^{(2)} \Delta y_{N,t-2} \right) + \boxtimes +$$

$$+ \left(\zeta_{11}^{(p-1)} \Delta y_{1,t-p+1} + \boxtimes + \zeta_{1,N}^{(p-1)} \Delta y_{N,t-p+1} \right) + \varepsilon_{1t},$$

\boxtimes

$$\Delta y_{Nt} = \alpha_N + B_{N1}z_{1,t-1} + \boxtimes + B_{Nr}z_{r,t-1} +$$

$$+ \left(\zeta_{N1}^{(1)} \Delta y_{1,t-1} + \boxtimes + \zeta_{N,N}^{(1)} \Delta y_{N,t-1} \right) +$$

$$+ \left(\zeta_{N1}^{(2)} \Delta y_{1,t-2} + \boxtimes + \zeta_{N,N}^{(2)} \Delta y_{N,t-2} \right) + \boxtimes +$$

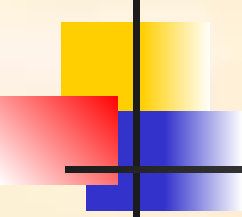
$$+ \left(\zeta_{N1}^{(p-1)} \Delta y_{1,t-p+1} + \boxtimes + \zeta_{N,N}^{(p-1)} \Delta y_{N,t-p+1} \right) + \varepsilon_{Nt}$$

- $z_1 = A_1 y_{t-1}$, \boxtimes , $z_r = A_r y_{t-1}$ – **стационарные линейные комбинации (коинтегрирующие линейные комбинации)**



Коинтегрированная VAR

- Обязательно *должно выполняться условие* $B \neq 0$
- Хотя бы один из коэффициентов $B_{ij}, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, r$, *должен быть отличным от нуля.*
- *Если отличен от нуля коэффициент* B_{ij} , *то* B *в прогнозировании* i -*ой переменной помогают*, во всяком случае, прошлые значения тех переменных, у которых *коэффициенты в* j -*ой коинтегрирующей линейной комбинации отличны от нуля.*



Ситуация: Компоненты ряда y_t являются **I(1) рядами** и **ранг коинтеграции равен 1**

- Для оценивания модели коррекции ошибок можно использовать *двухступенчатую процедуру Энгла–Грейнджера*
- Производится OLS оценивание уравнения

$$y_{1t} = \mu + \gamma_2 y_{2t} + \gamma_3 y_{3t} + \alpha + \gamma_N y_{Nt} + u_t$$

- На основании полученных оценок $\hat{\mu}, \hat{\gamma}_2, \hat{\gamma}_3, \hat{\alpha}, \hat{\gamma}_N$ коэффициентов долговременного соотношения получают оценку

$$\hat{z}_{1t} = y_{1t} - \hat{\mu} - \hat{\gamma}_2 y_{2t} - \hat{\gamma}_3 y_{3t} - \hat{\alpha} - \hat{\gamma}_N y_{Nt}$$

стационарной линейной комбинации

- $z_{1t} = y_{1t} - \mu - \gamma_2 y_{2t} - \gamma_3 y_{3t} - \alpha - \gamma_N y_{Nt}$ имеющей нулевое среднее.
- Построенную переменную \hat{z}_{1t} подставляют вместо z_{1t} в правую часть уравнений системы в форме модели коррекции ошибок, и производят OLS оценивание коэффициентов последней.



ЕСМ, полученная двухступенчатой процедурой Энга–Грейнджера

- **Стандартные (асимптотические) процедуры проверки гипотез** о параметрах ЕСМ могут применяться **к любым гипотезам, не включающим предположение**

$$B_{11} = \boxtimes = B_{N1} = 0$$

поскольку такое предположение **соответствует некоинтегрированности компонент ряда y_t** .

- При гипотезе $H_0 : B_{11} = \boxtimes = B_{N1} = 0$ асимптотическое распределение оценок коэффициентов $B_{11}, \boxtimes, B_{N1}$ – **нестандартное**.



Коинтегрированная двумерная VAR

Ранг коинтеграции равен 1, так что ECM имеет вид

$$\begin{aligned}\Delta y_{1t} &= \alpha_1 + B_{11}z_{1,t-1} + \left(\zeta_{11}^{(1)} \Delta y_{1,t-1} + \zeta_{12}^{(1)} \Delta y_{2,t-1} \right) + \\ &\quad + \left(\zeta_{11}^{(2)} \Delta y_{1,t-2} + \zeta_{12}^{(2)} \Delta y_{2,t-2} \right) + \dots + \\ &\quad + \left(\zeta_{11}^{(p-1)} \Delta y_{1,t-p+1} + \zeta_{12}^{(p-1)} \Delta y_{2,t-p+1} \right) + \varepsilon_{1t}, \\ \Delta y_{2t} &= \alpha_2 + B_{21}z_{1,t-1} + \left(\zeta_{21}^{(1)} \Delta y_{1,t-1} + \zeta_{22}^{(1)} \Delta y_{2,t-1} \right) + \\ &\quad + \left(\zeta_{21}^{(2)} \Delta y_{1,t-2} + \zeta_{22}^{(2)} \Delta y_{2,t-2} \right) + \dots + \\ &\quad + \left(\zeta_{21}^{(p-1)} \Delta y_{1,t-p+1} + \zeta_{22}^{(p-1)} \Delta y_{2,t-p+1} \right) + \varepsilon_{2t}\end{aligned}$$

или



ЕСМ для коинтегрированной двумерной VAR

$$\begin{aligned}\Delta y_{1t} &= \alpha_1 + B_{11}z_{1,t-1} + \\ &+ \zeta_{11}^{(1)} \Delta y_{1,t-1} + \zeta_{11}^{(2)} \Delta y_{1,t-2} + \dots + \zeta_{11}^{(p-1)} \Delta y_{1,t-p+1} + \\ &+ \zeta_{12}^{(1)} \Delta y_{2,t-1} + \zeta_{12}^{(2)} \Delta y_{2,t-2} + \dots + \zeta_{12}^{(p-1)} \Delta y_{2,t-p+1} + \varepsilon_{1t}, \\ \Delta y_{2t} &= \alpha_2 + B_{21}z_{1,t-1} + \\ &+ \zeta_{21}^{(1)} \Delta y_{1,t-1} + \zeta_{21}^{(2)} \Delta y_{1,t-2} + \dots + \zeta_{21}^{(p-1)} \Delta y_{1,t-p+1} + \\ &+ \zeta_{22}^{(1)} \Delta y_{2,t-1} + \zeta_{22}^{(2)} \Delta y_{2,t-2} + \dots + \zeta_{22}^{(p-1)} \Delta y_{2,t-p+1} + \varepsilon_{2t},\end{aligned}$$

■ где

■ $z_{1,t-1} = y_{1,t-1} - \mu - \gamma_2 y_{2,t-1}$ с $\gamma_2 \neq 0$



ЕСМ для коинтегрированной двумерной VAR

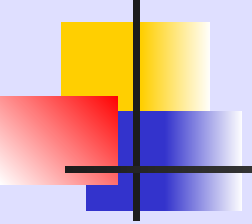
- Хотя бы один из коэффициентов B_{11} или B_{21} должен отличаться от нуля \square
- *в правую часть хотя бы одного из двух уравнений ЕСМ входит* в качестве объясняющей переменная

$$z_{1,t-1} = y_{1,t-1} - \mu - \gamma_2 y_{2,t-1}$$

- Но это означает, что *в таком уравнении имеет место причинность по Грейнджеру*.

ЕСМ для коинтегрированной двумерной VAR

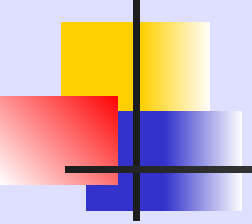
- Например, если в уравнении для Δy_{1t} имеем $B_{11} \neq 0$, то **значение $y_{2,t-1}$ помогает в прогнозировании значения y_{1t}** наряду со значениями $y_{1,t-1}$ и $\Delta y_{1,t-1}, \Delta y_{1,t-2}, \dots, \Delta y_{1,t-p+1}$
- Фактически вопрос может стоять только о том, **существует ли G-причинность в выбранном направлении**, например **в направлении от ряда $y_{2,t}$ к ряду $y_{1,t}$** .
- В последнем случае, **гипотеза об отсутствии такой причинности:**
- Эту гипотезу можно проверить **стандартными методами**, даже если использовать вместо значений \hat{z}_{1t} значения \hat{z}_{1t} , полученные применением процедуры Энга – Грейнджера.



Причинность по Грейнджеру

Методология Тода – Ямамото

- Выше было уже указано, **как можно проводить проверку** на причинность по Грейнджеру, если
- **VAR стационарна**
- **VAR состоит из $I(1)$ рядов и они некоинтегрированы** (следует перейти к разностям для проверки наличия G-причинности в краткосрочном плане)
- **VAR состоит из $I(1)$ рядов и они коинтегрированы.**

- 
-
- Применение соответствующих методов требует **предварительной проверки гипотезы единичного корня для определения порядков интегрированности рядов и проверки гипотезы об их коинтегрированности/некоинтегрированности.**
 - Однако, критерии для проведения такой проверки обычно **обладают малой мощностью,** и это ограничивает применение указанных методов.
 - Toda и Ямамото ([**Toda, Yamamoto (1995)**]) предложили процедуру, **позволяющую обойти эти проверки.**



Методология Тода – Ямамото

- **DGP :**
$$y_t = \gamma_0 + \gamma_1 t + \sum_{q=1}^q \gamma_q t^q + \Phi_1 y_{t-1} + \sum_{k=1}^k \Phi_k y_{t-k} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim i.i.d. (0, \Sigma_\varepsilon), \quad E|\varepsilon_{it}|^{2+\delta} < \infty \text{ для некоторого } \delta > 0$$

- Расширенная статистическая модель (augmented SM):

$$y_t = \gamma_0 + \gamma_1 t + \sum_{q=1}^q \gamma_q t^q + \Phi_1 y_{t-1} + \sum_{k=1}^k \Phi_k y_{t-k} + \sum_{d=1}^d \Phi_d y_{t-d} + \varepsilon_t$$

- где $p \geq k + d$, d – **порядок интегрированности ряда** y_t
- В качестве d обычно берется **предполагаемый максимальный порядок интегрированности рядов в составе** y_t .



Методология Тода – Ямамото

- Гипотезы отсутствия причинности по Грейнджеру в DGP **затрагивают в такой постановке только элементы матриц** $\Phi_{1,\dots}, \Phi_k$ и **не затрагивают остальных матриц в SM,** т.е. матриц $\Phi_{k+1,\dots}, \Phi_p$
- Если гипотеза накладывает m **линейных ограничений** на элементы матриц $\Phi_{1,\dots}, \Phi_k$, то **статистика Вальда для проверки такой гипотезы имеет асимптотическое распределение** .
- При этом **ряд $\chi^2(m)$ может быть стационарным, $I(1)$ или $I(2)$, причем в каждом случае – еще и относительно линейного тренда, и если он $I(1)$ или $I(2)$, то может быть и коинтегрированным.**



Методология Тода – Ямамото: Выбор количества лагов

- *DGP* :

$$y_t = \gamma_0 + \gamma_1 t + \alpha + \gamma_q t^q + \Phi_1 y_{t-1} + \alpha + \Phi_k y_{t-k} + \varepsilon_t$$

- *SM* :

$$y_t = \gamma_0 + \gamma_1 t + \alpha + \gamma_q t^q + \Phi_1 y_{t-1} + \alpha + \Phi_k y_{t-k} + \alpha + \Phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t,$$

- Гипотеза о невхождении в DGP лагов более высокого порядка, чем l

$$H_0^* : \Phi_{l+1} = \alpha = \Phi_p = 0 \quad (k \leq l \leq p-1)$$

- Если эта гипотеза верна и $l \geq d$, то статистика Вальда для проверки этой гипотезы имеет асимптотическое распределение

$$\chi^2(N^2(p-l))$$



Методология Тода – Ямамото: Выбор количества лагов

- Если $k \geq d$, то $l \geq k \geq d$ □
- Если порядки интегрированности рядов не превышают истинное количество запаздываний в DGP, то применима *обычная процедура выбора количества лагов в VAR.*

□

Если $d = 1$, то *процедура выбора порядка модели всегда асимптотически обоснованна.*

Если $d = 2$, то *она асимптотически обоснованна только при $k > 1$*

- При выборе порядка модели можно также использовать *информационные критерии.*



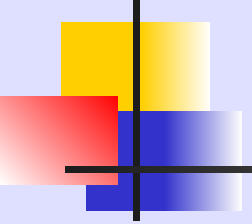
Резюме:

- При подозрениях на возможную интегрированность или коинтегрированность рядов в составе y_t , **гипотезу H_0 можно проверять, не производя проверки рядов на интегрированность и коинтегрированность**, а лишь озаботясь тем, **чтобы SM в виде VAR имела порядок $(k + d_{max})$** .
- Используя стандартную асимптотическую теорию, можно проверять и другие линейные (и многие нелинейные) ограничения **на первые k матриц коэффициентов**.



Замечания

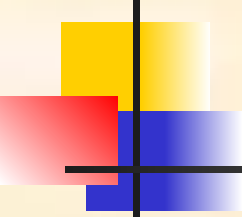
- Добавление лишних лагов может значительно понизить мощность критериев, если количество рядов N велико.
- В модель можно также включать сезонные дамми.



Причинность в долгосрочном плане (long-run) и
причинность в краткосрочном плане (short-run)

- Если рассматривается **некоинтегрированная VAR(p)** с **I(1)-переменными**, то, переходя к **модели в разностях**, мы получаем **стационарную VAR(p-1)**.
- Если **N=2**, то VAR в разностях имеет вид:

$$\begin{aligned}\Delta y_{1t} &= \alpha_1 + \zeta_{11}^{(1)} \Delta y_{1,t-1} + \zeta_{11}^{(2)} \Delta y_{1,t-2} + \dots + \zeta_{11}^{(p-1)} \Delta y_{1,t-p+1} + \\ &\quad + \zeta_{12}^{(1)} \Delta y_{2,t-1} + \zeta_{12}^{(2)} \Delta y_{2,t-2} + \dots + \zeta_{12}^{(p-1)} \Delta y_{2,t-p+1} + \varepsilon_{1t}, \\ \Delta y_{2t} &= \alpha_2 + \zeta_{21}^{(1)} \Delta y_{1,t-1} + \zeta_{21}^{(2)} \Delta y_{1,t-2} + \dots + \zeta_{21}^{(p-1)} \Delta y_{1,t-p+1} + \\ &\quad + \zeta_{22}^{(1)} \Delta y_{2,t-1} + \zeta_{22}^{(2)} \Delta y_{2,t-2} + \dots + \zeta_{22}^{(p-1)} \Delta y_{2,t-p+1} + \varepsilon_{2t}\end{aligned}$$

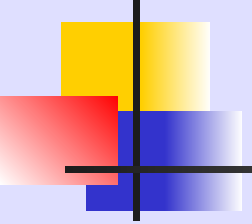


Некоинтегрированная VAR: причинность в краткосрочном плане

- Если в первом уравнении

$$\Delta y_{1t} = \alpha_1 + \zeta_{11}^{(1)} \Delta y_{1,t-1} + \zeta_{11}^{(2)} \Delta y_{1,t-2} + \dots + \zeta_{11}^{(p-1)} \Delta y_{1,t-p+1} + \\ + \zeta_{12}^{(1)} \Delta y_{2,t-1} + \zeta_{12}^{(2)} \Delta y_{2,t-2} + \dots + \zeta_{12}^{(p-1)} \Delta y_{2,t-p+1} + \varepsilon_{1t}$$

- $\zeta_{12}^{(1)} = \zeta_{12}^{(2)} = \dots = \zeta_{12}^{(p-1)} = 0$,
- то y_2 не является G-причиной для y_1 в краткосрочном плане.



Некоинтегрированная VAR: причинность в краткосрочном плане

- Если во втором уравнении

$$\Delta y_{2t} = \alpha_2 + \zeta_{21}^{(1)} \Delta y_{1,t-1} + \zeta_{21}^{(2)} \Delta y_{1,t-2} + \dots + \zeta_{21}^{(p-1)} \Delta y_{1,t-p+1} + \\ + \zeta_{22}^{(1)} \Delta y_{2,t-1} + \zeta_{22}^{(2)} \Delta y_{2,t-2} + \dots + \zeta_{22}^{(p-1)} \Delta y_{2,t-p+1} + \varepsilon_{2t}$$

- $\zeta_{21}^{(1)} = \zeta_{21}^{(2)} = \dots = \zeta_{21}^{(p-1)} = 0$,

- то y_1 не является G-причиной для y_2 в краткосрочном плане.



Коинтегрированная VAR:
причинность в краткосрочном и в долгосрочном плане

- Если **N=2**, то соответствующая **ЕСМ** имеет вид:

$$\begin{aligned}\Delta y_{1t} &= \alpha_1 + B_{11}z_{1,t-1} + \\ &+ \zeta_{11}^{(1)} \Delta y_{1,t-1} + \zeta_{11}^{(2)} \Delta y_{1,t-2} + \dots + \zeta_{11}^{(p-1)} \Delta y_{1,t-p+1} + \\ &+ \zeta_{12}^{(1)} \Delta y_{2,t-1} + \zeta_{12}^{(2)} \Delta y_{2,t-2} + \dots + \zeta_{12}^{(p-1)} \Delta y_{2,t-p+1} + \varepsilon_{1t}, \\ \Delta y_{2t} &= \alpha_2 + B_{21}z_{1,t-1} + \\ &+ \zeta_{21}^{(1)} \Delta y_{1,t-1} + \zeta_{21}^{(2)} \Delta y_{1,t-2} + \dots + \zeta_{21}^{(p-1)} \Delta y_{1,t-p+1} + \\ &+ \zeta_{22}^{(1)} \Delta y_{2,t-1} + \zeta_{22}^{(2)} \Delta y_{2,t-2} + \dots + \zeta_{22}^{(p-1)} \Delta y_{2,t-p+1} + \varepsilon_{2t}\end{aligned}$$



Коинтегрированная VAR: причинность в краткосрочном и в долгосрочном плане

- В рамках этой ECM можно проверять как гипотезы **об отсутствии краткосрочной G-причинности** одной из переменных в отношении другой, выражаемые соотношениями
- $\zeta_{12}^{(1)} = \zeta_{12}^{(2)} = \dots = \zeta_{12}^{(p-1)} = 0$ и $\zeta_{21}^{(1)} = \zeta_{21}^{(2)} = \dots = \zeta_{21}^{(p-1)} = 0$
- так и гипотезы **об отсутствии долговременной G-причинности одной из переменных в отношении другой**
- выражаемые соотношениями
- $B_{11} = 0$ и $B_{21} = 0$, соответственно
- При этом, гипотеза **об отсутствии G-причинности в выбранном направлении**, например, в направлении от y_2 к y_1 ,
- формулируется, как это уже было сделано ранее:

$$H_0 : B_{11} = 0, \zeta_{12}^{(1)} = \zeta_{12}^{(2)} = \dots = \zeta_{12}^{(p-1)} = 0$$

К методу Тода-Ямамото

Если мы имеем дело с **векторным** временным рядом, то такой временной ряд называется **интегрированным порядка d** , если: векторный ряд $\Delta_d y_t$ **стационарный** и в представлении

$$\Delta_d y_t = \mu + C(L) \varepsilon_t$$

$$C(1) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i \neq 0$$

Но на сей раз $C(1)$ – **матрица**, поэтому для выполнения последнего условия достаточно иметь хотя бы один отличный от нуля элемент матрицы $C(1)$, а **остальные элементы этой матрицы могут быть нулями**.

Соответственно, у интегрированного порядка d векторного временного ряда должна быть **хотя бы одна $I(d)$ компонента**, а **остальные компоненты могут иметь порядки $I(k)$, $k < d$** .

$$y_t = \mu + \Phi_1 y_{t-1} + \dots + \Phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

Что можно сказать о порядке интегрированности векторного ряда y_t ?

$$A(L)y_t = \mu + \varepsilon_t$$

$$A(L) = I_N - \Phi_1 L - \dots - \Phi_p L^p$$

$$A(z) = I_N - \Phi_1 z - \dots - \Phi_p z^p$$

– обратный характеристический полином

$\det A(z)$ – многочлен степени $n \leq Np$

$$A(0) = I_N \implies \det A(0) = 1$$

$\implies z = 0$ не является корнем многочлена

$$\det A(z) = d_0 + d_1 z + \dots + d_n z^n$$

$$\implies d_0 \neq 0$$

$$\det A(z) = d_0 + d_1 z + \dots + d_n z^n$$

Тогда можно записать:

$$\det A(z) = d_n \prod_{i=1}^{n_r} (z - z_i)^{m_i} = (z - 1)^m g(z)$$

где $g(1) \neq 0$ $1 \leq m \leq n$

так что **многочлен** $\det A(z)$ **имеет** m **единичных корней**.

Если бы мы имели дело с **одномерным** временным рядом, то отсюда следовало бы, что m – порядок интегрированности ряда.

В случае **векторного** временного ряда положение сложнее.

Пусть $A^*(z)$ – присоединенная матрица для $A(z)$, так что

$$A(z)^{-1} = \frac{A^*(z)}{|A(z)|}$$

если обратная матрица существует

Пусть многочлен $\det A(z)$ не имеет корней внутри единичного круга.

Тогда порядок интегрированности ряда y_t равен

$$d = m - a$$

где значение a определяется соотношением

$$A^*(z) = (z - 1)^a H(z), \quad H(1) \neq 0$$

MASSIMO FRANCHI (2006)

“THE INTEGRATION ORDER OF VECTOR AUTOREGRESSIVE PROCESSES”

Пример: нестабильная VAR(1) для двух рядов

$$\begin{aligned} y_{1t} &= 0.8 y_{1, t-1} + 0.2 y_{2, t-1} + \varepsilon_{1t}, \\ y_{2t} &= 0.2 y_{1, t-1} + 0.8 y_{2, t-1} + \varepsilon_{2t}. \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8L & 0.2L \\ 0.2L & 0.8L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}, \quad A(L) = \begin{pmatrix} 1-0.8L & -0.2L \\ -0.2L & 1-0.8L \end{pmatrix}$$

$$\det A(z) = 0$$

□

$$(1-z)(1-0.6z) = 0$$

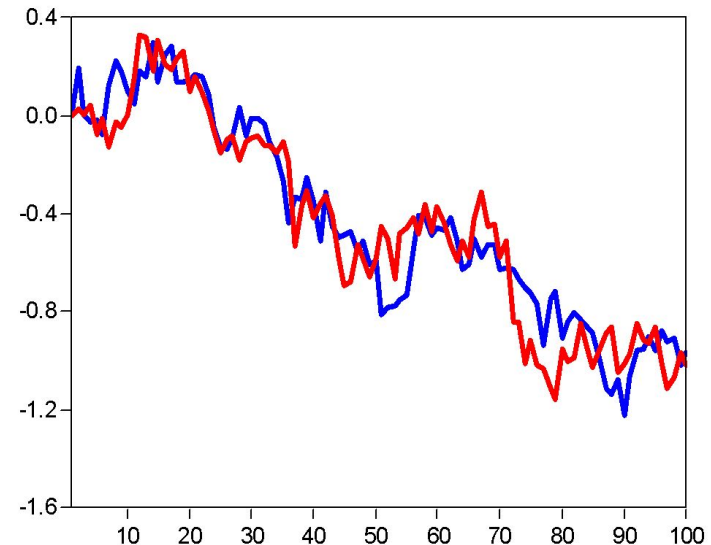
□

VAR неустойчива

$$A(1) = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.2 \\ -0.2 & 0.2 \end{pmatrix}, \quad \det A(1) = 0$$

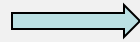
$$\text{Cov}(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}) = 0$$

$$y_{11} = y_{21} = 0$$



$$\det A(z) = (1 - z)(1 - 0.6z) = (z - 1)^1 g(z)$$

$$g(1) \neq 0$$



$$m = 1$$

$$A(z) = \begin{pmatrix} 1 - 0.8z & -0.2z \\ -0.2z & 1 - 0.8z \end{pmatrix}$$

$$A^*(z) = \begin{pmatrix} 1 - 0.8z & 0.2z \\ 0.2z & 1 - 0.8z \end{pmatrix}$$

$$A^*(1) = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$A^*(z) = (z - 1)^a H(z), \quad H(1) \neq 0$$

$$a = 0$$

$$d = m - a = 1 - 0 = 1$$

$$\begin{aligned} y_{1t} &= 0.8 y_{1, t-1} + 0.2 y_{2, t-1} + \varepsilon_{1t}, \\ y_{2t} &= 0.2 y_{1, t-1} + 0.8 y_{2, t-1} + \varepsilon_{2t}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{1t} - y_{1, t-1} &= -0.2 y_{1, t-1} + 0.2 y_{2, t-1} + \varepsilon_{1t}, \\ y_{2t} - y_{2, t-1} &= 0.2 y_{1, t-1} - 0.2 y_{2, t-1} + \varepsilon_{2t}. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \Delta y_{1t} &= -0.2 (y_{1, t-1} - y_{2, t-1}) + \varepsilon_{1t}, \\ \Delta y_{2t} &= 0.2 (y_{1, t-1} - y_{2, t-1}) + \varepsilon_{2t}. \end{aligned}$$

$$y_{1, t-1} = y_{2, t-1}$$

– долговременная (коинтеграционная) связь

