ОСНОВНЫЕ ВОПРОСЫ ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ.

Тема 4.1. Приближенные числа. Учет погрешностей результатов операций над приближенными числами

Числа

Точные (истинное значение)

приближенные

Например: если говорят, что в классе есть 29 учеников, то число 29 - точное.

Если же говорят, что расстояние от Москвы до Киева равно 960 км, то здесь число 960 - приближенное, так как, с одной стороны, наши измерительные инструменты не абсолютно точны, с другой стороны, сами города имеют некоторую протяженность.

- Результат действий с приближенными числами есть тоже ***приближенное число***.
- Выполняя некоторые действия над точными числами (деление, извлечение корня), можно также получить приближенные числа.

Абсолютная и относительная погрешности

- Разность между точным числом и его приближенным значением называется ***абсолютной погрешностью*** приближенного числа.

Например, если точное число 1,214 округлить до десятых, получим приближенное число 1,2. В данном случае абсолютная погрешность приближенного числа 1,2 равна 1,214 - 1,2, т.е. 0,014.

- Но в большинстве случаев точное значение рассматриваемой величины неизвестно, а только приближенное. Тогда и абсолютная погрешность неизвестна. В этих случаях указывают границу, которую она не превышает. Это число называют граничной ***абсолютной погрешностью***.

Говорят, что точное значение числа равно его приближенному значению с погрешностью меньшей, чем граничная погрешность. *Например,* число 23,71 есть приближенное значение числа 23,7125 с точностью до 0,01, так как абсолютная погрешность приближения равна 0,0025 и меньше 0,01. Здесь граничная абсолютная погрешность равна 0,01*.

- Граничную абсолютную погрешность приближенного числа а обозначают символом Δ_a .

Запись $x \approx a\ (\pm\Delta_a)$ следует понимать так:

точное значение величины x находится в промежутке между числами $a - \Delta_a$ и $a + \Delta_a$, которые называют соответственно нижней и верхней границей x и обозначают $НГ_x$ $ВГ_x$.

- Например, если $x \approx 2{,}3\ (\pm 0{,}1)$, то $2{,}2 < x < 2{,}4$.

- ***Относительной погрешностью*** называется отношение абсолютной погрешности к величине приближенного числа.
- Отношение граничной абсолютной погрешности к приближенному числу называют граничной относительной погрешностью;

обозначают ее так: $\frac{\Delta a}{a}$

Относительную и граничную относительную погрешности принято выражать в процентах.

Например, если измерения показали, что расстояние x между двумя пунктами больше 12,3 км, но меньше 12,7 км, то за приближенное значение его принимают среднее арифметическое этих двух чисел, т.е. их полусумму, тогда граничная абсолютная погрешность равна полуразности этих чисел.

В данном случае x ≈ 12,5 (±0,2).

Здесь граничная абсолютная погрешность равна 0,2 км,

а граничная относительная $\frac{0{,}2}{12{,}5} = 0{,}016 = 1{,}6\%$

Точные значащие цифры

Если абсолютная погрешность приближенного числа не превышает половины единицы последнего разряда, то все значащие цифры данного числа называются **точными**.

Например, число 58,3 имеет 3 точные значащие цифры, если Δ не превышает половины десятой доли, т.е.

$$\Delta \leq 0{,}05$$

- Нули, стоящие перед первой значащей цифрой в счет точных значащих цифр не идут.

Например, число 0,032 имеет 2 точные значащие цифры, если $\Delta \leq 0{,}0005$.

- Нули, стоящие между значащими цифрами идут в счет значащих цифр.

Например, число 2,007 имеет 4 точные значащие цифры, если $\Delta \leq 0{,}0005$.

- При округлении числа полученные нули в счет значащих цифр не идут.

Например, число 4123, округленное до сотен, будет 4100. В данном случае число 4100 имеет 2 точные значащие цифры, т.к. полученные нули заменяют точные цифры 2 и 3.

Запись приближенных чисел

- Для каждого приближенного числа обязательно указывается его погрешность. Запись вида

$$a = a^* \pm \Delta(a^*)$$

означает, что :а* - приближенное значение числа а с абсолютной погрешностью D (а *).

Если же а* - приближенное значение числа а с относительной погрешностью d (а *),

то пишут так:

$$a = a^*(1 \pm \delta(a^*)).$$

Правила приближенных вычислений и нахождения процентного соотношения

- При сложении и вычитании приближенных чисел окончательный результат округляют так, чтобы он не имел значащих цифр в тех разрядах, которые отсутствуют хотя бы в одном из приближенных данных.

Например: При сложении и вычитании приближенных чисел окончательный результат округляют так, чтобы он не имел значащих цифр в тех разрядах, которые отсутствуют хотя бы в одном из приближенных данных.

$$
\begin{array}{r l}
 & 4{,}462 \\
+ & 2{,}38 \\
+ & 1{,}17273 \\
+ & 1{,}0262 \\
\hline
 & 9{,}04093
\end{array}
$$

- При возведении в квадрат или куб следует в степени брать столько значащих цифр, сколько их имеется в основании степени.

Например, $1{,}32^2 \approx 1{,}74$

- При извлечении квадратного или кубического корня в результате нужно брать столько значащих цифр, сколько их имеется в подкоренном выражении.

Например, $\sqrt{1{,}17 \cdot 10^{-8}} \approx 1{,}08 \cdot 10^{-4}$

- При вычислении сложных выражений следует применять указанные правила в соответствии с видом производимых действий.

Например, $$\frac{(3{,}2+17{,}062)\sqrt{3{,}7}}{5{,}1\cdot 2{,}007\cdot 10^{3}}$$

Сомножитель 5,1 имеет наименьшее число значащих цифр – две. Поэтому результаты всех промежуточных вычислений должны округляться до трех значащих цифр:

$$\frac{(3{,}2+17{,}062)\sqrt{3{,}7}}{5{,}1\cdot 2{,}007\cdot 10^{3}} \approx \frac{20{,}3\cdot 1{,}92}{10{,}3\cdot 10^{3}} \approx \frac{39{,}0}{10{,}3\cdot 10^{3}} \approx 3{,}79\cdot 10^{-3}$$

После округления результата до двух значащих цифр окончательно получаем $3{,}8\cdot 10^{-3}$.