

Функция распределения вероятностей случайной величины

Определение

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, определяющая для каждого действительного значения x вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее x , то есть

$$F(x) = p(X < x).$$

Свойства

1. Значения функции распределения $F(x)$ принадлежат отрезку $[0;1]$, то есть $0 \leq F(x) \leq 1$ для любого x .
2. Функция распределения $F(x)$ является неубывающей, то есть если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \leq F(x_2)$.
3. Для функции распределения $F(x)$ справедливы следующие предельные соотношения: $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.
4. Функция распределения $F(x)$ непрерывна слева в каждой точке, то есть $\lim_{x \rightarrow x_0 -} F(x) = F(x_0)$.

Свойства

Справедливы также следующие утверждения:

1. Вероятность того, что случайная величина X примет значение, принадлежащее полуинтервалу $[\alpha; \beta)$, равна разности значений ее функции распределения $F(x)$ на концах этого полуинтервала:

$$p(\alpha \leq X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

2. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение x_i , равна нулю, то есть

$$p(X = x_i) = 0.$$

Из двух последних утверждений следует, что если X – непрерывная случайная величина, то

$$p(\alpha \leq X \leq \beta) = p(\alpha \leq X < \beta) = p(\alpha < X \leq \beta) = p(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Продолжение примера

Пример . Дискретная случайная величина X имеет заданное распределение:

X	3	5	11
p	0,3	0,1	0,6

Найти функцию распределения случайной величины и построить ее график.

Продолжение примера

1) Если $x \leq 3$, то $F(x) = p(X < x) = 0$, так как случайная величина X не принимает значений, меньших 3.

2) Если $3 < x \leq 5$, то $F(x) = p(X < x) = 0,3$.

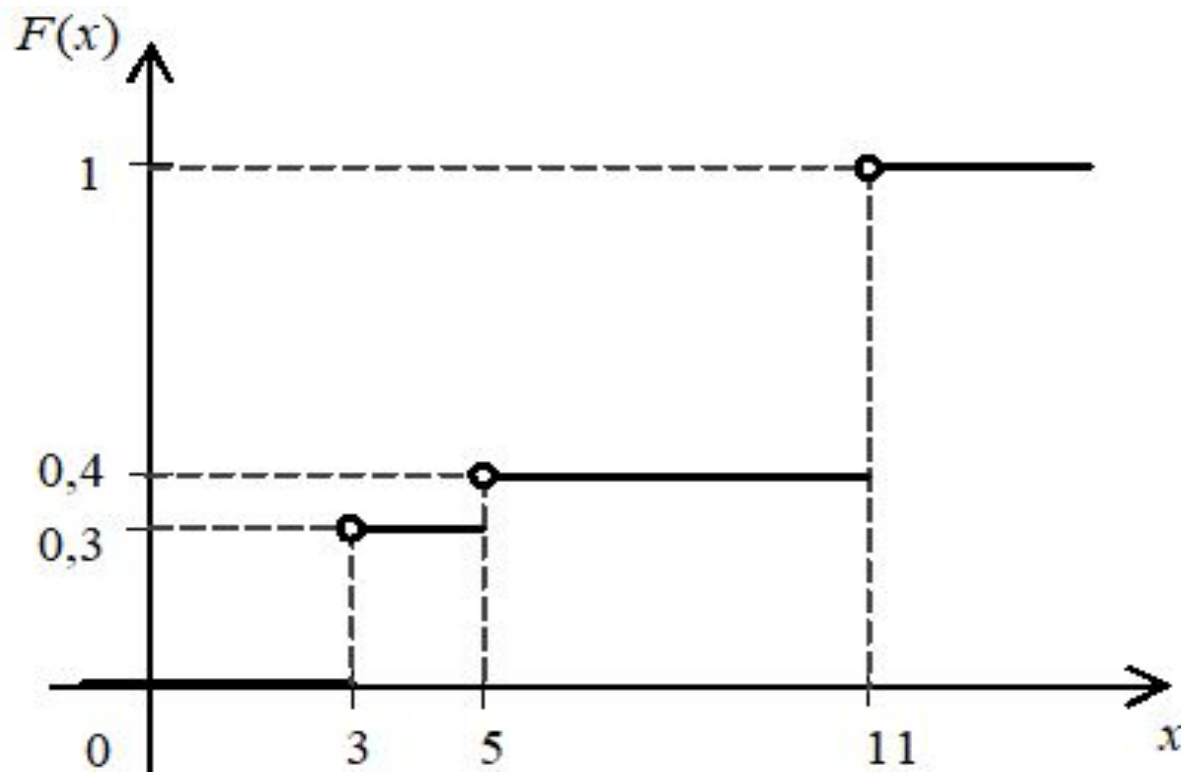
3) Если $5 < x \leq 11$, то $F(x) = p(X < x) = 0,3 + 0,1 = 0,4$.

4) Если $x > 11$, то $F(x) = p(X < x) = 0,3 + 0,1 + 0,6 = 1$.

Таким образом, функция распределения дискретной случайной величины X имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 3, \\ 0,3 & \text{при } 3 < x \leq 5, \\ 0,4 & \text{при } 5 < x \leq 11, \\ 1 & \text{при } x > 11. \end{cases}$$

Продолжение примера (график)



Свойство графика функции распределения

Рассмотренный пример иллюстрирует важное свойство функции распределения дискретной случайной величины: точками разрыва функции распределения $F(x)$ являются возможные значения случайной величины X , причем величина «скачка» в каждой точке разрыва равна вероятности, с которой случайная величина принимает соответствующее значение.

Пример

Пример . Дискретная случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 4, \\ 0,2 & \text{при } 4 < x \leq 6, \\ 0,5 & \text{при } 6 < x \leq 9, \\ 0,8 & \text{при } 9 < x \leq 10 \\ 1 & \text{при } x > 10. \end{cases}$$

1) Найти закон распределения X .

2) Найти следующие вероятности: а) $p(6 \leq X \leq 10)$; б) $p(4 \leq X < 9)$;

в) $p(4 < X < 10)$; г) $p(5 \leq X < 8)$; д) $p(3 < X \leq 6)$; е) $p(X \leq 10)$; ж) $p(X < 4)$;

з) $p(X \geq 11)$.

Продолжение примера

1) В данном случае точками разрыва функции распределения являются точки $x_1 = 4$, $x_2 = 6$, $x_3 = 9$ и $x_4 = 10$. Значит, случайная величина X имеет четыре возможных значения.

Величина «скачка» в каждой из перечисленных точек равна вероятности, с которой случайная величина принимает соответствующее значение, поэтому:

$$p(X = 4) = 0,2 - 0 = 0,2; \quad p(X = 6) = 0,5 - 0,2 = 0,3;$$

$$p(X = 9) = 0,8 - 0,5 = 0,3; \quad p(X = 10) = 1 - 0,8 = 0,2.$$

Таким образом, закон распределения величины X имеет вид:

X	4	6	9	10
p	0,2	0,3	0,3	0,2

Продолжение примера

2) Найдем вероятности:

а) Так как случайная величина X может принимать только четыре указанных в таблице значения, то событие, состоящее в том, что $6 \leq X \leq 10$, является суммой следующих несовместных событий: $X = 6, X = 9, X = 10$. Тогда по теореме сложения вероятностей

$$p(6 \leq X \leq 10) = p(X = 6) + p(X = 9) + p(X = 10) = 0,3 + 0,3 + 0,2 = 0,8.$$

$$\text{б) } p(4 \leq X < 9) = p(X = 4) + p(X = 6) = 0,2 + 0,3 = 0,5.$$

$$\text{в) } p(4 < X < 10) = p(X = 6) + p(X = 9) = 0,3 + 0,3 = 0,6.$$

$$\text{г) } p(5 \leq X < 8) = p(X = 6) = 0,3.$$

$$\text{д) } p(3 < X \leq 6) = p(X = 4) + p(X = 6) = 0,2 + 0,3 = 0,5.$$

$$\text{е) } p(X \leq 10) = p(X = 4) + p(X = 6) + p(X = 9) + p(X = 10) = 1.$$

Продолжение примера

ж) Поскольку случайная величина X не принимает значений, меньших 4, то $p(X < 4) = 0$.

з) $p(X \geq 11) = 0$.

В некоторых случаях для вычисления вероятности удобно использовать тот факт, что $p(\alpha \leq X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

Например,

$$p(4 \leq X < 9) = F(9) - F(4) = 0,5 - 0 = 0,5;$$

$$p(5 \leq X < 8) = F(8) - F(5) = 0,5 - 0,2 = 0,3.$$