



РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ СЗ ПО МАТЕРИАЛАМ ЕГЭ 2012-2013 ГГ



Полезная информация

- Членам НМС
- Разработчикам КИМ
- Экспертам ПК регионов
- Преподавателям вузов и осузов
- Учителям школ
- Родителям и учащимся



Логарифмические неравенства

Неравенства вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, где $a \neq 1$, $a > 0$ называют логарифмическими неравенствами

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

$$a > 1$$

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

$$0 < a < 1$$

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

или

$$\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow$$

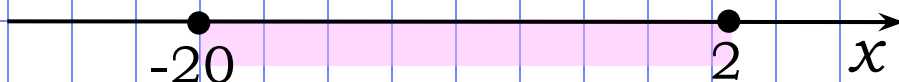
$$\begin{cases} (a(x) - 1)(f(x) - g(x)) > 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ a(x) > 0. \end{cases}$$

1. Решите неравенство $3\log_{11}(x^2 + 8x - 9) \leq 4 + \log_{11} \frac{(x-1)^3}{x+9}$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x^2 + 8x - 9 > 0, \\ \frac{(x-1)^3}{x+9} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -9) \cup (1; +\infty).$

$$3\log_{11}(x^2 + 8x - 9) \leq 4 + \log_{11} \frac{(x-1)^3}{x+9} \quad -11 \leq x+9 \leq 11$$

$$\log_{11}(x^2 + 8x - 9)^3 + \log_{11} \frac{x+9}{(x-1)^3} \leq 4 \quad -20 \leq x \leq 2$$

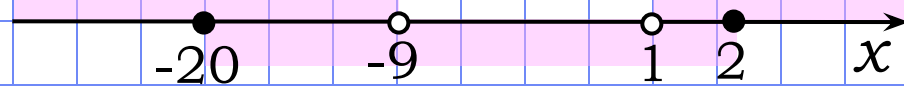
$$\log_{11} \frac{(x+9)^3(x-1)^3(x+9)}{(x-1)^3} \leq 4$$


С учетом ОДЗ:

$$\log_{11}(x+9)^4 \leq \log_{11} 11^4$$

$$(x+9)^4 \leq 11^4$$

$$|x+9| \leq 11$$



$$x \in [-20; -9); (1; 2]$$

2. Решите систему

неравенств

$$\begin{cases} 4^x - 129 \leq 2^{x+7}, \\ \log_{x+8} \left(\frac{7-x}{x+1} \right)^2 \leq 1 - \log_{x+8} \frac{x+1}{x-7}. \end{cases}$$

Решение.

1) ОДЗ:
$$\begin{cases} x + 8 > 0, \\ \frac{x+1}{x-7} > 0, \\ x + 8 \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-8; -7) \cup (-7; -1) \cup (7; +\infty).$$

2) $4^x - 129 \leq 2^{x+7}$

$$4^x - 128 \cdot 2^x - 129 \leq 0$$

Пусть $2^x = t, t > 0$, тогда

$$t^2 - 128 \cdot t - 129 \leq 0$$

$$(t+1)(t-129) \leq 0$$

$$-1 \leq t \leq 129$$

Учитывая, что $t > 0$, имеем

$$0 < t \leq 129$$

Вернемся к исходной переменной

$$0 < 2^x \leq 129$$

$$2^x \leq 2^{\log_2 129}$$

$$x \leq \log_2 129$$

$$\log_2 129 > 7 = \log_2 128$$

С учетом ОДЗ, имеем

$$x \in (-8; -7) \cup (-7; -1) \cup (7; \log_2 129]$$

2. Решите систему

неравенств

$$\begin{cases} 4^x - 129 \leq 2^{x+7}, \\ \log_{x+8} \left(\frac{7-x}{x+1} \right)^2 \leq 1 - \log_{x+8} \frac{x+1}{x-7}. \end{cases}$$

3) (продолжение)

$$\log_{x+8} \left(\frac{7-x}{x+1} \right)^2 \leq 1 - \log_{x+8} \frac{x+1}{x-7}$$

$$(a-b)^2 = (b-a)^2$$

$$\log_{x+8} \left(\frac{x-7}{x+1} \right)^2 + \log_{x+8} \frac{x+1}{x-7} \leq \log_{x+8} (x+8)$$

$$(x+7) \left(\frac{-x^2 - 8x - 15}{x+1} \right) \leq 0$$

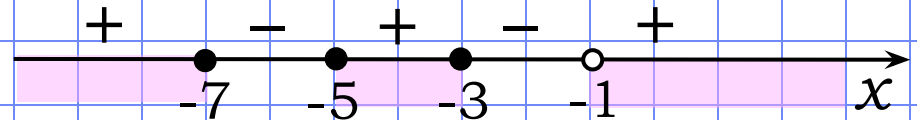
$$\log_{x+8} \left(\left(\frac{x-7}{x+1} \right)^2 \cdot \frac{x+1}{x-7} \right) \leq \log_{x+8} (x+8)$$

$$(x+7) \left(\frac{x^2 + 8x + 15}{x+1} \right) \geq 0$$

$$\log_{x+8} \left(\frac{x-7}{x+1} \right) \leq \log_{x+8} (x+8)$$

$$\frac{(x+7)(x+3)(x+5)}{x+1} \geq 0$$

$$(x+8-1) \left(\frac{x-7}{x+1} - (x+8) \right) \leq 0$$



$$x \in (-\infty; -7] \cup [-5; -3] \cup (-1; +\infty)$$

С учетом ОДЗ, имеем

$$(x+7) \left(\frac{x-7-x^2-9x-8}{x+1} \right) \leq 0$$

$$x \in (-8; -7) \cup [-5; -3] \cup (7; +\infty)$$

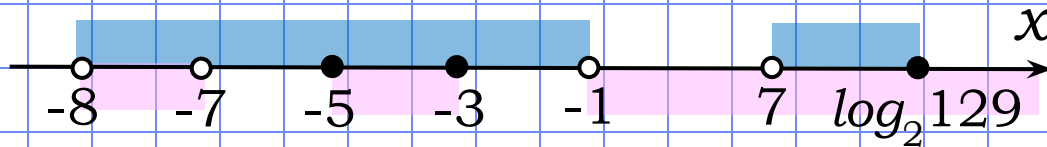
2. Решите систему
неравенств
(продолжение)

$$\begin{cases} 4^x - 129 \leq 2^{x+7}, \\ \log_{x+8} \left(\frac{7-x}{x+1} \right)^2 \leq 1 - \log_{x+8} \frac{x+1}{x-7}. \end{cases}$$

4) Общее решение:

и

$$x \in (-8; -7) \cup (-7; -1) \cup (7; \log_2 129]$$
$$x \in (-8; -7) \cup [-5; -3] \cup (7; +\infty)$$



$$x \in (-8; -7) \cup [-5; -3] \cup (7; \log_2 129]$$

Ответ : $(-8; -7) \cup [-5; -3] \cup (7; \log_2 129]$

3. Решите неравенство $\log_{0,25}(19 - 9x) \cdot \log_{3-x} 0,5 \geq 1$

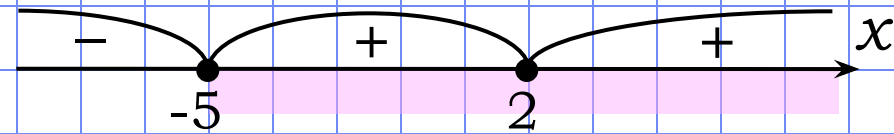
Решение. ОДЗ:
$$\begin{cases} 19 - 9x > 0, \\ 3 - x > 0, \\ 3 - x \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; 2) \cup \left(2; \frac{19}{9}\right)$$

$$\log_{0,25}(19 - 9x) \cdot \log_{3-x} 0,5 \geq 1$$

$$\log_a b \cdot \log_c d = \log_c b \cdot \log_a d$$

$$\log_{3-x}(19 - 9x) \cdot \log_{0,25} 0,5 \geq 1$$

$$\log_{3-x}(19 - 9x) \geq 2$$



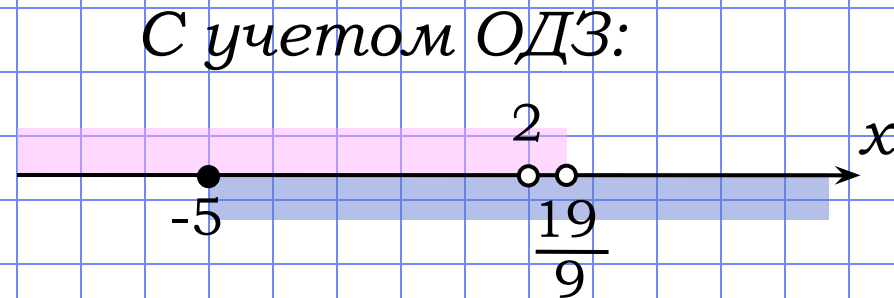
$$\log_{3-x}(19 - 9x) \geq \log_{3-x}(3 - x)^2$$

$$((3 - x) - 1)((19 - 9x) - (3 - x)^2) \geq 0$$

$$(2 - x)(10 - 3x - x^2) \geq 0$$

$$(x - 2)(x^2 + 3x - 10) \geq 0$$

$$(x - 2)^2(x + 5) \geq 0$$



$$x \in [-5; 2); \left(2; \frac{19}{9}\right)$$

Ответ : $[-5; 2); \left(2; \frac{19}{9}\right)$

4. Решите систему
неравенств

$$\begin{cases} \frac{2x^2 - 10x + 6}{x - 5} \leq x, \\ 1 + \log_6(4 - x) \leq \log_6(16 - x^2) \end{cases}$$

Решение.

1) ОДЗ: $\begin{cases} 4 - x > 0, \\ 16 - x^2 > 0, \\ x - 5 \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-4; 4).$

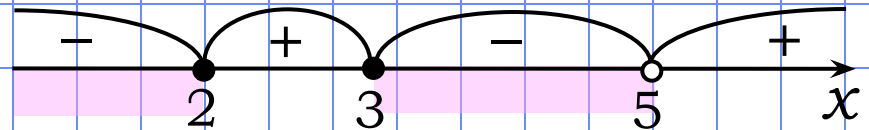
2) $\frac{2x^2 - 10x + 6}{x - 5} \leq x$

$$\frac{2x^2 - 10x + 6}{x - 5} - x \leq 0$$

$$\frac{2x^2 - 10x + 6 - x^2 + 5x}{x - 5} \leq 0$$

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 5} \leq 0$$

$$\frac{(x - 2)(x - 3)}{x - 5} \leq 0$$



$$x \in (-\infty; 2] \cup [3; 5)$$

С учетом ОДЗ, имеем

$$x \in (-4; 2] \cup [3; 4)$$

4. Решите систему
неравенств
(продолжение)

$$\begin{cases} \frac{2x^2 - 10x + 6}{x - 5} \leq x, \\ 1 + \log_6(4 - x) \leq \log_6(16 - x^2) \end{cases}$$

3) $1 + \log_6(4 - x) \leq \log_6(16 - x^2)$

$$\log_6 6 + \log_6(4 - x) \leq \log_6(16 - x^2)$$

$$\log_6(24 - 6x) \leq \log_6(16 - x^2)$$

т.к. $a = 6 > 1$, то

$$24 - 6x \leq 16 - x^2$$

$$x^2 - 6x + 8 \leq 0$$

$$(x - 2)(x - 4) \leq 0$$

$$2 \leq x \leq 4$$

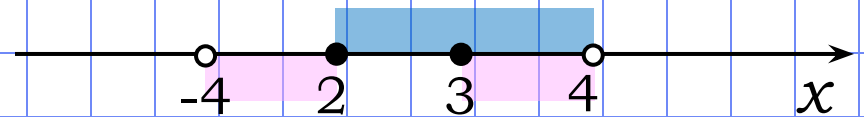
С учетом ОДЗ, имеем

$$2 \leq x < 4$$

4) Общее решение:

$$x \in (-4; 2] \cup [3; 4)$$

$$u \quad 2 \leq x < 4$$



$$x \in \{2\} \cup [3; 4)$$

Ответ : $\{2\} \cup [3; 4)$

5. Решите неравенство $\frac{3\log_2 x}{2 + \log_2 x} \leq 2\log_2 x - 1$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 0,25; \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 0,25) \cup (0,25; +\infty)$

$$\frac{3\log_2 x}{2 + \log_2 x} \leq 2\log_2 x - 1$$

Пусть $\log_2 x = t$, $t \neq -2$, тогда

$$\frac{3t}{2+t} \leq 2t - 1$$

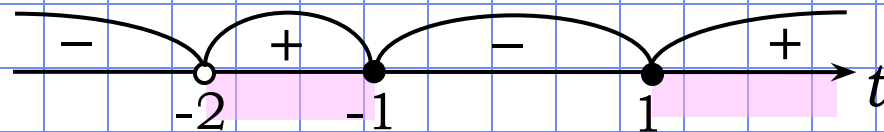
$$\frac{3t}{2+t} - 2t + 1 \leq 0$$

$$\frac{3t - 4t - 2t^2 + 2 + t}{2+t} \leq 0$$

$$\frac{-2t^2 + 2}{2+t} \leq 0$$

$$\frac{-2(t-1)(t+1)}{2+t} \leq 0$$

$$\frac{(t-1)(t+1)}{t+2} \geq 0$$



$$t \in (-2; -1] \cup [1; +\infty)$$

5. Решите неравенство $\frac{3\log_2 x}{2 + \log_2 x} \leq 2\log_2 x - 1$

Решение. (продолжение)

Вернемся к исходной переменной

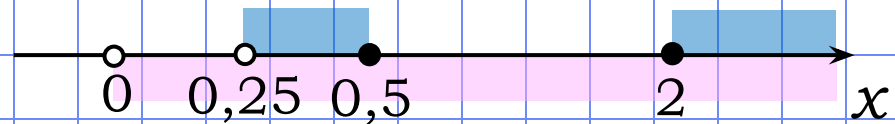
$$\begin{cases} -2 < \log_2 x \leq -1, \\ \log_2 x \geq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_2 0,25 < \log_2 x \leq \log_2 0,5, \\ \log_2 x \geq \log_2 2; \end{cases}$$

т.к. $a = 2 > 1$, то

$$\begin{cases} 0,25 < x \leq 0,5, \\ x \geq 2; \end{cases}$$

С учетом ОДЗ, имеем



$$x \in (0,25; 0,5] \cup [2; +\infty)$$

Ответ : $(0,25; 0,5] \cup [2; +\infty)$

6. Решите систему
неравенств
$$\begin{cases} x^2 + 6^x + 4 \leq 44 \cdot \log_5(x + 3), \\ 4x + 6^x \geq 44 \cdot \log_5(x + 3). \end{cases}$$

Решение.

ОДЗ: $x + 3 > 0 \Leftrightarrow x \in (-3; +\infty)$.

Перепишем систему в виде:

$$x^2 + 6^x + 4 \leq 44 \cdot \log_5(x + 3) \leq 4x + 6^x$$

Откуда получим неравенство:

$$x^2 + 6^x + 4 \leq 4x + 6^x$$

$$x^2 - 4x + 4 \leq 0$$

$$(x - 2)^2 \leq 0$$

$x = 2$ – удовлетворяет ОДЗ

Выполним проверку системы:

$$\begin{cases} 2^2 + 6^2 + 4 \leq 44 \cdot \log_5(2 + 3), \\ 4 \cdot 2 + 6^2 \geq 44 \cdot \log_5(2 + 3). \end{cases} \quad \text{– верно}$$

Ответ : 2.

7. Решите неравенство $\log_{\frac{25-x^2}{16}} \frac{24+2x-x^2}{14} > 1$

Решение.

ОДЗ:
$$\begin{cases} 25 - x^2 > 0, \\ 24 + 2x - x^2 > 0, \\ 25 - x^2 \neq 16; \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-4; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; 5).$$

$$\log_{\frac{25-x^2}{16}} \frac{24+2x-x^2}{14} > 1$$

$$\log_{\frac{25-x^2}{16}} \frac{24+2x-x^2}{14} > \log_{\frac{25-x^2}{16}} \frac{25-x^2}{16}$$

$$\left(\frac{25-x^2}{16} - 1 \right) \left(\frac{24+2x-x^2}{14} - \frac{25-x^2}{16} \right) > 0$$

$$(9-x^2)(8(24+2x-x^2)-7(25-x^2)) > 0$$

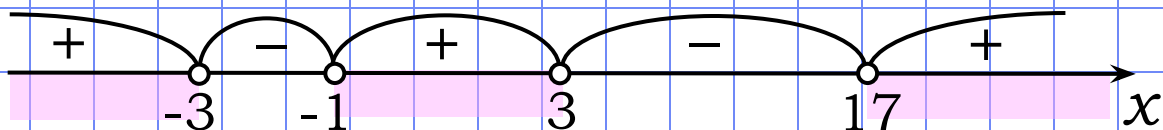
$$(9-x^2)(17+16x-x^2) > 0$$

7. Решите неравенство $\log_{\frac{25-x^2}{16}} \frac{24+2x-x^2}{14} > 1$

(продолжение)

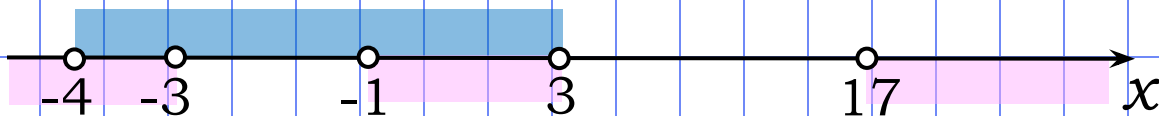
$$(x^2 - 9)(x^2 - 16x - 17) > 0$$

$$(x - 3)(x + 3)(x + 1)(x - 17) > 0$$



$$x \in (-\infty; -3) \cup (-1; 3) \cup (17; +\infty)$$

С учетом ОДЗ, имеем



$$x \in (-4; -3) \cup (-1; 3)$$

Ответ : $(-4; -3) \cup (-1; 3)$

8. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} 4^{x+1} - 17 \cdot 2^x + 4 \leq 0, \\ \log_{|x|}^2(x^2) + \log_2(x^2) \leq 8. \end{cases}$$

Решение.

1) ОДЗ:
$$\begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq 1, \\ x \neq -1; \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$$

2)
$$\log_{|x|}^2(x^2) + \log_2(x^2) \leq 8$$
 С учетом ОДЗ, имеем

$$(2\log_{|x|}|x|)^2 + 2\log_2|x| \leq 8$$

$$x \in (-4; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 4)$$

$$4 + 2\log_2|x| \leq 8$$

$$2\log_2|x| \leq 4$$

$$\log_2|x| \leq 2$$

$$\log_2|x| \leq \log_2 4$$

т.к. $a = 2 > 1$, то

$$|x| \leq 4$$

$$-4 \leq x \leq 4$$

8. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} 4^{x+1} - 17 \cdot 2^x + 4 \leq 0, \\ \log_{|x|}^2(x^2) + \log_2(x^2) \leq 8. \end{cases}$$

3) (продолжение)

$$4^{x+1} - 17 \cdot 2^x + 4 \leq 0$$

$$4 \cdot 2^{2x} - 17 \cdot 2^x + 4 \leq 0$$

Пусть $2^x = t$, $t > 0$, тогда

$$4 \cdot t^2 - 17 \cdot t + 4 \leq 0$$

$$4\left(t - 4\right)\left(t - \frac{1}{4}\right) \leq 0$$

$$\frac{1}{4} \leq t \leq 4 \text{ — удовлетворяет условию } t > 0$$

Вернемся к исходной переменной

$$\frac{1}{4} \leq 2^x \leq 4$$

$$2^{-2} \leq 2^x \leq 2^2$$

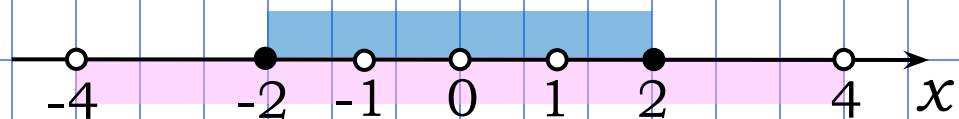
т.к. $a = 2 > 1$, то

$$-2 \leq x \leq 2$$

4) Общее решение:

$$x \in (-4; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 4)$$

и $-2 \leq x \leq 2$



$$x \in [-2; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2]$$

Ответ : $[-2; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2]$

9. Решите неравенство

$$\log_{x+2}^2(x-18)^2 + 32 \leq 16 \log_{x+2}(36 + 16x - x^2)$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x + 2 > 0, \\ x + 2 \neq 1, \\ 36 + 16x - x^2 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-2; -1) \cup (-1; 18)$$

$$\log_{x+2}^2(x-18)^2 + 32 \leq 16 \log_{x+2}(36 + 16x - x^2)$$

$$4 \log_{x+2}^2|x-18| + 32 \leq 16 \log_{x+2}(x+2)(18-x)$$

С учетом ОДЗ, имеем

$$4 \log_{x+2}^2(18-x) + 32 \leq 16(\log_{x+2}(x+2) + \log_{x+2}(18-x))$$

$$4 \log_{x+2}^2(18-x) - 16 \log_{x+2}(18-x) + 16 \leq 0$$

$$\log_{x+2}^2(18-x) - 4 \log_{x+2}(18-x) + 4 \leq 0$$

$$(\log_{x+2}(18-x) - 2)^2 \leq 0$$

$$\log_{x+2}(18-x) = 2$$

9. Решите неравенство

$$\log_{x+2}^2(x-18)^2 + 32 \leq 16 \log_{x+2}(36 + 16x - x^2)$$

(продолжение)

$$\log_{x+2}(18-x) = \log_{x+2}(x+2)^2$$

$$18-x = (x+2)^2$$

$$x^2 + 5x - 14 = 0$$

$$\begin{cases} x = -7, & \text{— не удовлетворяет ОДЗ} \\ x = 2. \end{cases}$$

Ответ : 2.

10. Решите неравенство $\log_{2-x}(x+2) \cdot \log_{x+3}(3-x) \leq 0$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 2-x > 0, \\ 2-x \neq 1, \\ x+2 > 0, \\ x+3 > 0, \\ x+3 \neq 1, \\ 3-x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-2; 1) \cup (1; 2)$$

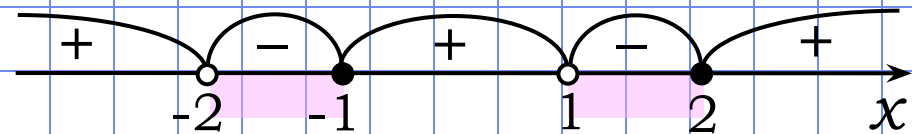
$$\log_{2-x}(x+2) \cdot \log_{x+3}(3-x) \leq 0$$

$$\frac{\log_2(x+2) \cdot \log_2(3-x)}{\log_2(2-x) \cdot \log_2(x+3)} \leq 0$$

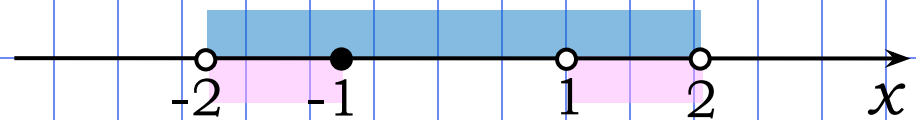
$$\frac{((x+2)-1) \cdot ((3-x)-1)}{((2-x)-1) \cdot ((x+3)-1)} \leq 0$$

$$\frac{(x+1) \cdot (2-x)}{(1-x) \cdot (x+2)} \leq 0$$

$$\frac{(x+1) \cdot (x-2)}{(x-1) \cdot (x+2)} \leq 0$$



С учетом ОДЗ, имеем



$$x \in (-2; -1] \cup (1; 2)$$

Ответ : $(-2; -1] \cup (1; 2)$