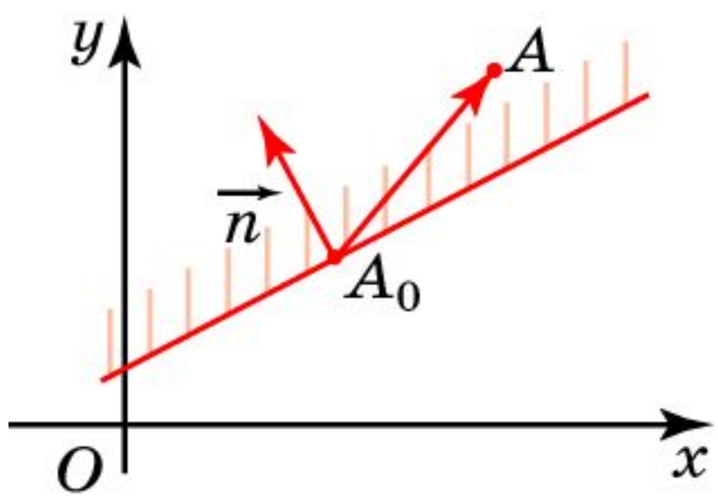
Аналитическое задание фигур

Пусть прямая задана уравнением $ax + by + c = 0$ и проходит через точку $A_0(x_0, y_0)$. Ее вектор нормали $\vec{n}$ имеет координаты (a, b) и определяет полуплоскость. Точка $A(x, y)$ принадлежит этой полуплоскости в случае, если угол между векторами $\vec{n}$ и $\overrightarrow{A_0A}$ не превосходит 90°, т.е. в случае, если скалярное произведение этих векторов больше или равно нулю, т.е. $\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_0A}=a(x-x_0)+b(y-y_0)\geq 0$. Так как $-ax_0-by_0=c$, то точка $A(x, y)$ принадлежит этой полуплоскости, если выполняется неравенство $ax+by+c\geq 0$. Аналогично, точка $A(x, y)$ принадлежит другой полуплоскости, по отношению к данной прямой, если выполняется неравенство $ax + by + c \quad 0$.



Выпуклые многоугольники

Пусть стороны выпуклого многоугольника лежат на прямых, задаваемых уравнениями

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$a_n x + b_n y + c_n = 0.$$

Тогда сам многоугольник является пересечением соответствующих полуплоскостей и, следовательно, для его точек должна выполняться система неравенств вида

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 \geq 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_n x + b_n y + c_n \geq 0, \end{cases}$$

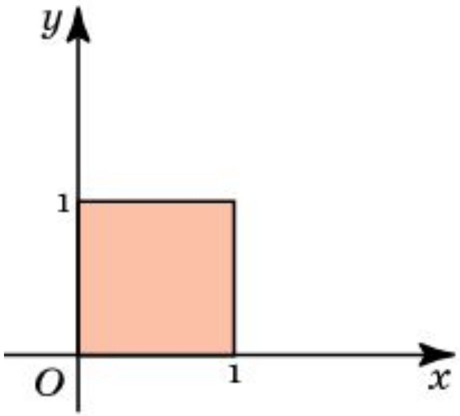
которая и определяет этот многоугольник.

Квадрат

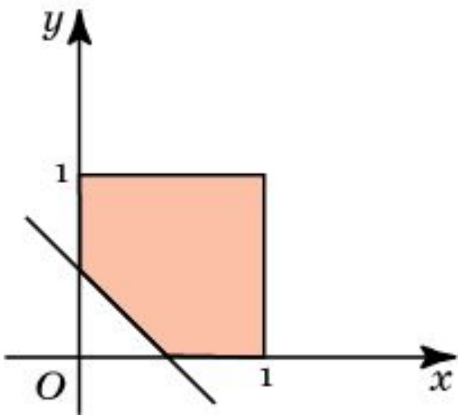
Например, неравенства $x \geq 0,\ y \geq 0,\ x \leq 1,\ y \leq 1,$ которые можно переписать в виде системы

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq 1, \end{cases}$$

определяют единичный квадрат.

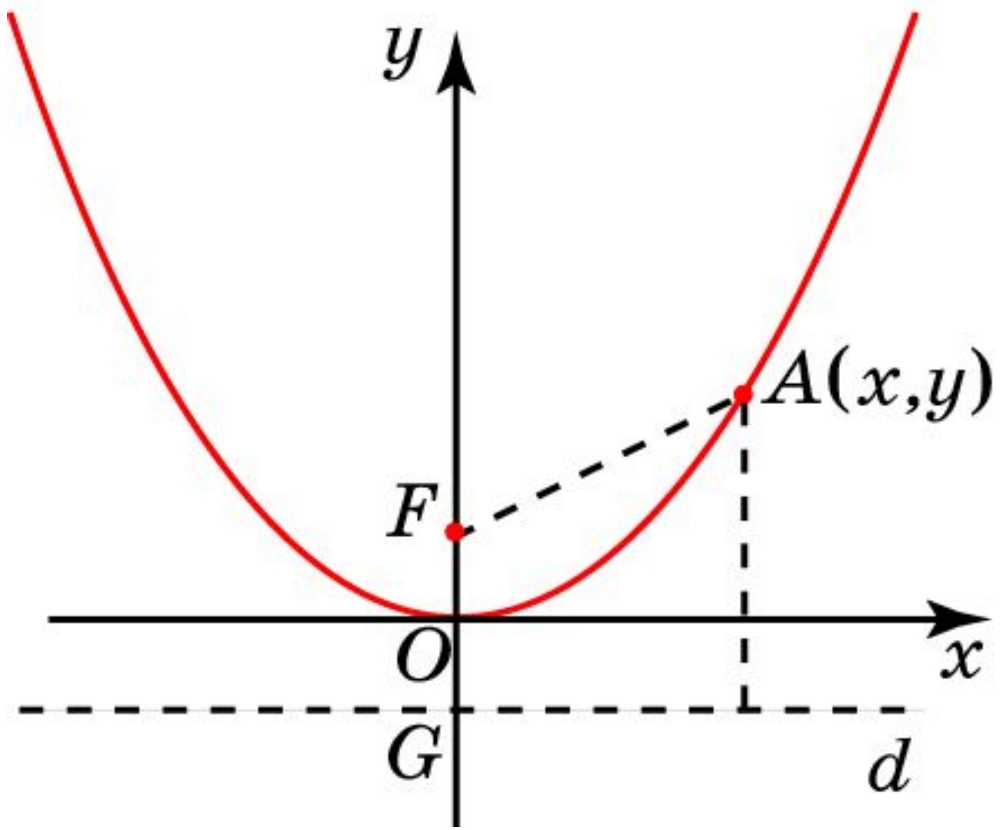


Если к этим неравенствам добавить еще одно неравенство $x + y - \dfrac{1}{2} \geq 0,$ то соответствующий многоугольник получается из квадрата отсечением треугольника.



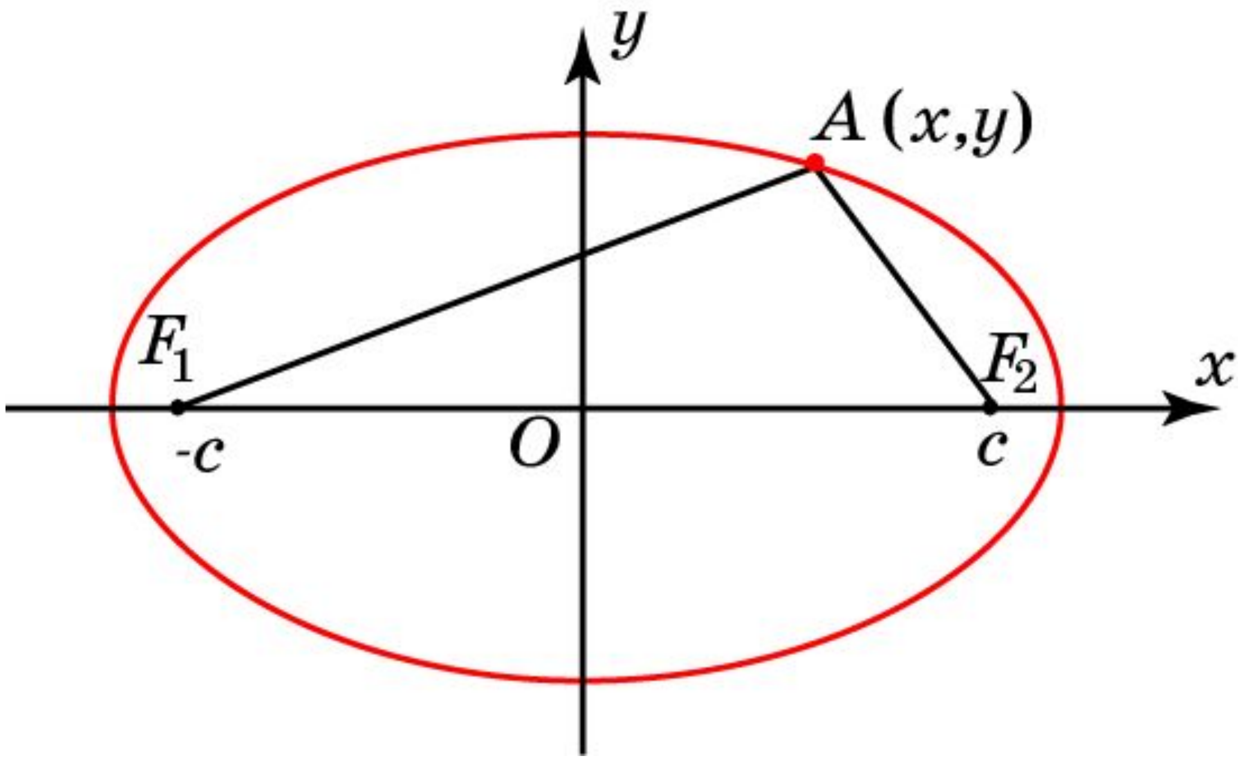
Уравнение параболы

Уравнение $4ay = x^2$ задает параболу, с фокусом F $(0, a)$ и директрисой $y = -a$.



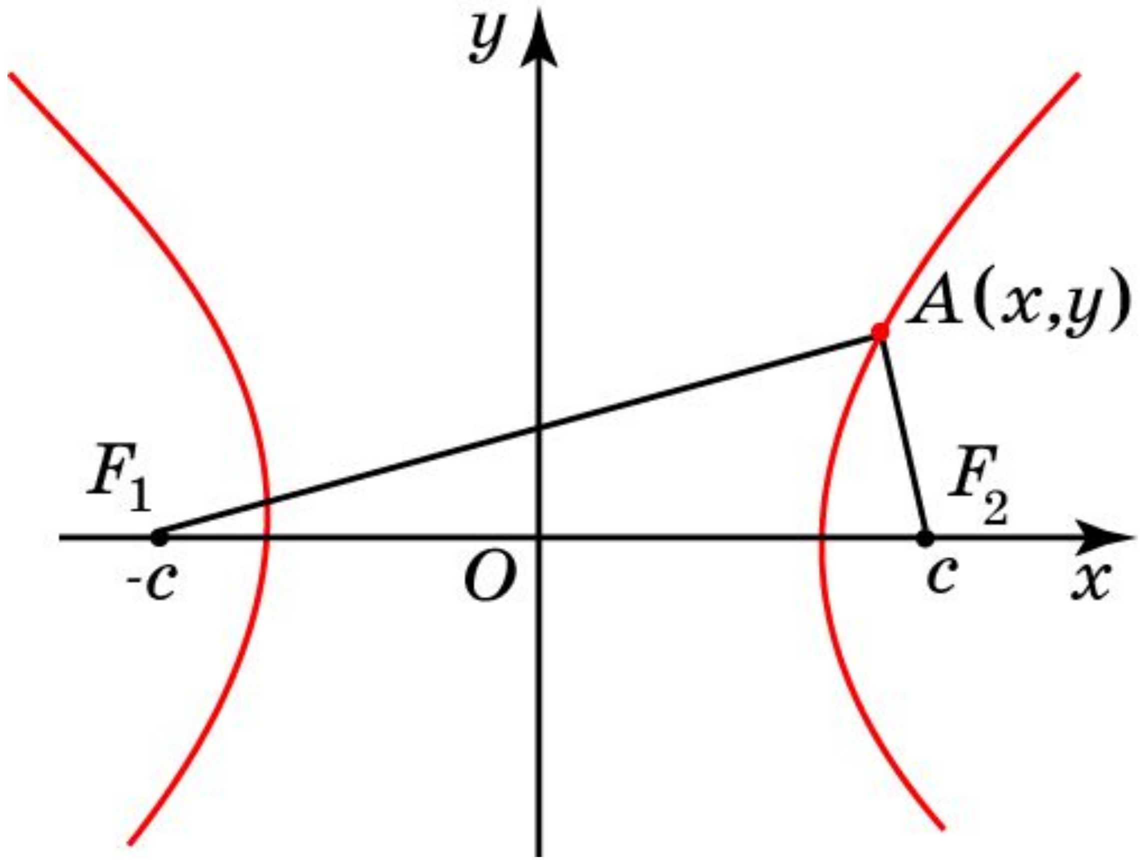
Уравнение эллипса

Уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a > b)$ задает эллипс, с фокусами $F_1(-c,\ 0)$, $F_2(c,\ 0)$, где $c=\sqrt{a^2-b^2}$.



Уравнение гиперболы

Уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b$) задает гиперболу, с фокусами $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.



Пример 1

Найдите неравенства, задающие треугольник с вершинами $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(1, 1)$.

Решение: Легко видеть, что уравнения прямых AB, BC и AC имеют вид: $x + y - 1 = 0$, $y - 1 = 0$ и $x - 1 = 0$ соответственно. Подставляя координаты точки C вместо x и y в левой части первого уравнения, получим $1 > 0$. Следовательно, точка C принадлежит полуплоскости $x + y - 1 \geq 0$. Аналогично, точка B принадлежит полуплоскости $x \leq 1$, а точка A – полуплоскости $y \leq 1$. Таким образом, треугольник ABC задается системой неравенств

$$\begin{cases} x + y \geq 1, \\ x \leq 1. \\ y \leq 1. \end{cases}$$

Пример 2

Для параболы, заданной уравнением $y = x^2$, найдите координаты фокуса и уравнение директрисы.

Ответ: Фокус данной параболы имеет координаты $(0, \frac{1}{4})$, а ее директриса задается уравнением $y = -\frac{1}{4}$.

Упражнение 1

Определите, какой полуплоскости $5x + 3y - 2 \geq 0$ или $5x + 3y - 2 \leq 0$ принадлежат точки: а) $A(1,0)$; б) $B(0,1)$; в) $C(0,0)$.

Ответ: а) Первой;

б) первой;

в) второй.

Упражнение 2

Какую фигуру задает следующая система неравенств

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 3, \\ 0 \leq y \leq 5? \end{cases}$$

Ответ: Прямоугольник.

Упражнение 3

Найдите фокус и директрису параболы, заданной уравнением $y^2 = x$.

Ответ: $F\left(0, \frac{1}{4}\right);\ x = -\frac{1}{4}.$

Упражнение 4

В каком случае уравнение эллипса дает окружность?

Ответ: $a = b$.

Упражнение 5

Для эллипса, заданного уравнением $x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 1$, найдите координаты фокусов.

Ответ: $F_1(0,\ 1)$, $F_2(0,\ -1)$.

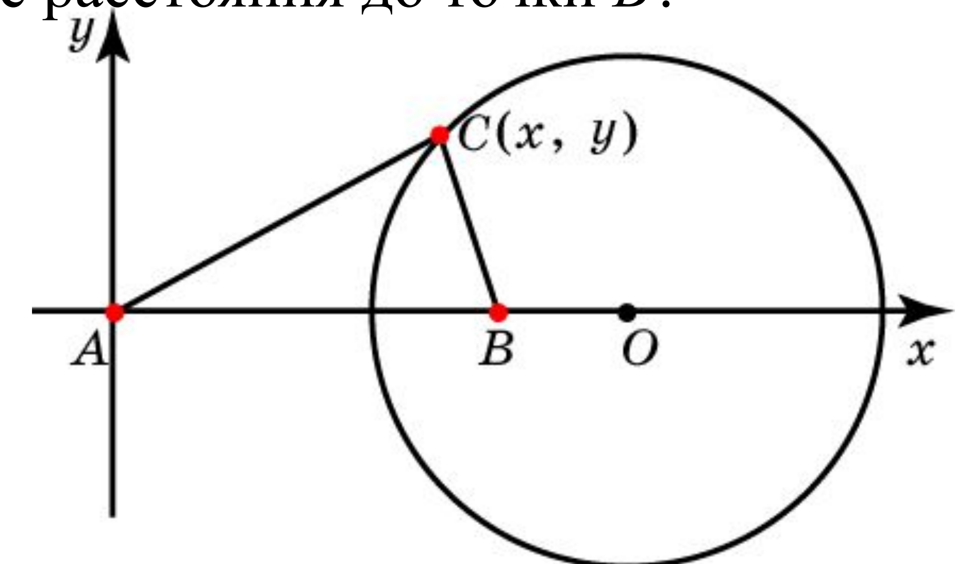
Упражнение 6

Для гиперболы, заданной уравнением $x^2 - y^2 = 1$, найдите координаты фокусов.

Ответ: $F_1(-\sqrt{2}, 0)$, $F_2(\sqrt{2}, 0)$.

Упражнение 7

Расстояние между двумя данными точками A и B плоскости равно 3. Какой фигурой является ГМТ плоскости, расстояние от которых до точки A в два раза больше расстояния до точки B?

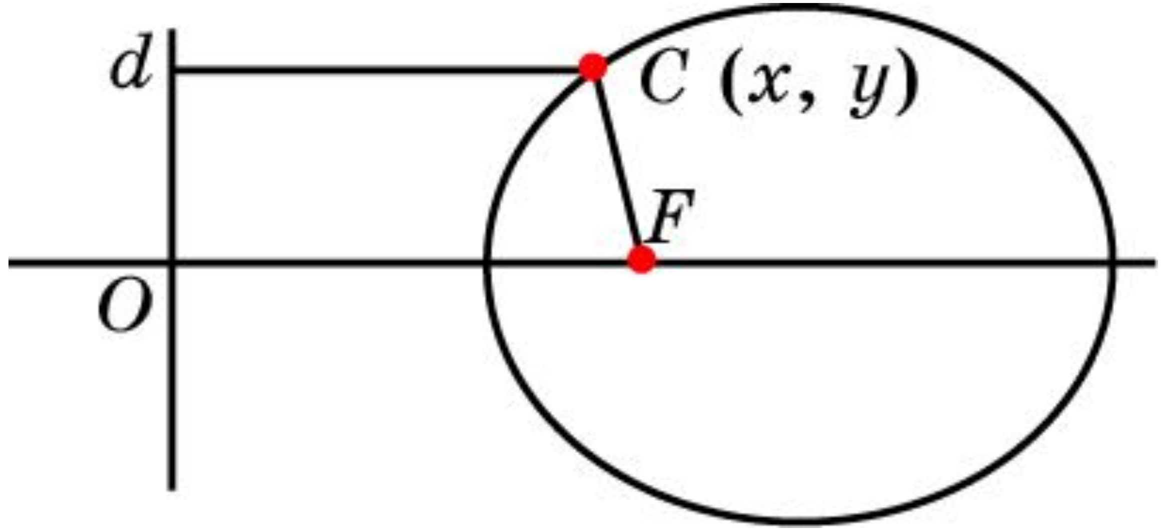


Решение: На координатной плоскости в качестве двух данных точек возьмем точки $A(0, 0)$ и $B(3, 0)$. Для точки $C(x, y)$ имеем:

$AC = \sqrt{x^2 + y^2}, BC = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$. Равенство $AC = 2BC$ равносильно равенству $x^2 + y^2 = 4((x-3)^2 + y^2)$, которое, в свою очередь, равносильно равенству $(x-4)^2 + y^2 = 4$. Последнее равенство является уравнением окружности с центром в точке $O(4, 0)$ и радиусом 2. Таким образом, искомым ГМТ является окружность.

Упражнение 8

Расстояние от данной точки F до данной прямой d равно 3. Какой фигурой является ГМТ плоскости, расстояние от которых до прямой d в два раза больше расстояния до данной точки F?

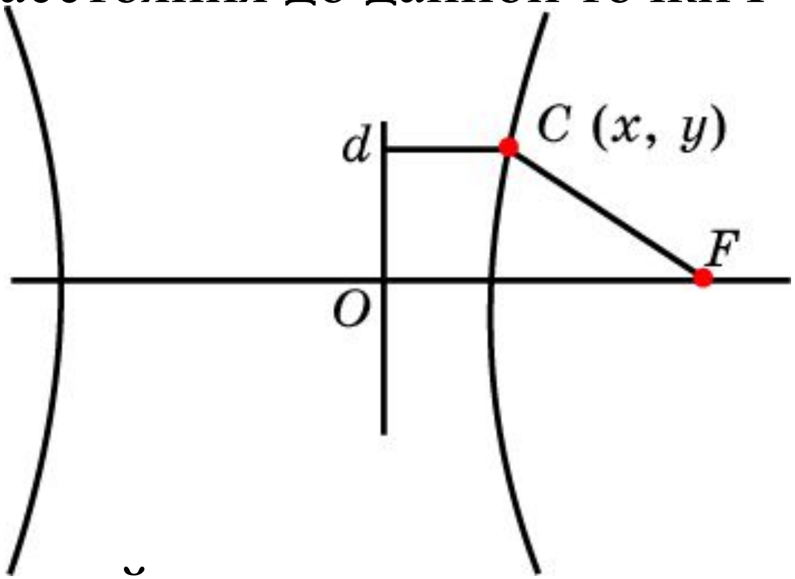


Решение: На координатной плоскости в качестве точки F возьмем точку $F(3, 0)$, а в качестве прямой d – ось Oy. Для точки $C(x, y)$ имеем: $CF = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$, $CD = |x|$. Равенство $CD = 2CF$ равносильно равенству $x^2 = 4((x-3)^2 + y^2)$, которое, в свою очередь, равносильно равенству $\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$

Последнее равенство является уравнением эллипса. Таким образом, искомым ГМТ является эллипс.

Упражнение 9

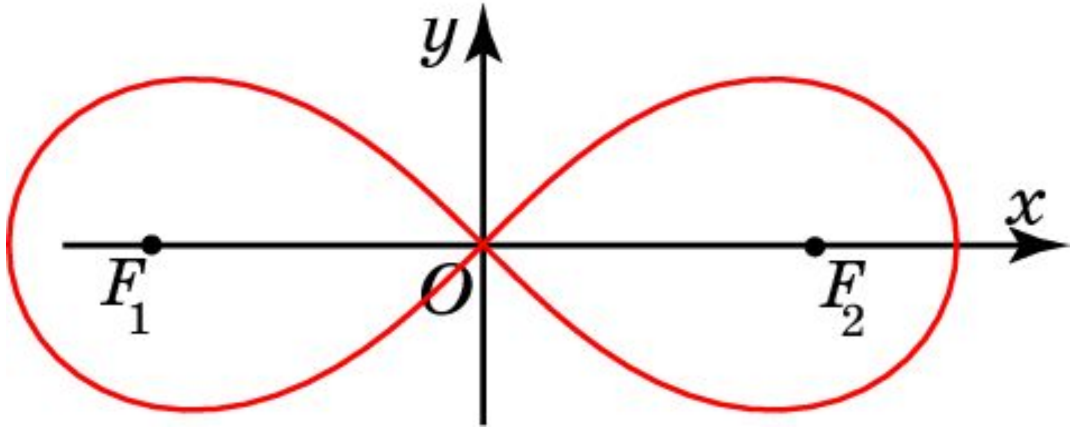
Расстояние от данной точки F до данной прямой d равно 3. Какой фигурой является ГМТ плоскости, расстояние от которых до прямой d в два раза меньше расстояния до данной точки F?



Решение: На координатной плоскости в качестве точки F возьмем точку $F(3, 0)$, а в качестве прямой d – ось Oy. Для точки $C(x, y)$ имеем: $CF = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$, $CD = |x|$. Равенство $CF = 2CD$ равносильно равенству $(x-3)^2 + y^2 = 4x^2$, которое, в свою очередь, равносильно равенству $\dfrac{(x+1)^2}{4} - \dfrac{y^2}{12} = 1$. Последнее равенство является уравнением гиперболы. Таким образом, искомым ГМТ является гипербола.

Упражнение 10

Лемниската Бернулли представляет собой геометрическое место точек, произведение расстояний от которых до двух фиксированных точек F_1 и F_2 равно a^2, где $2a$ – расстояние между F_1 и F_2. Точки F_1, F_2 называются фокусами лемнискаты. Нарисуйте Лемнискату, фокусы которой расположены в точках с координатами (a, 0), (-a, 0) и найдите ее уравнение,.

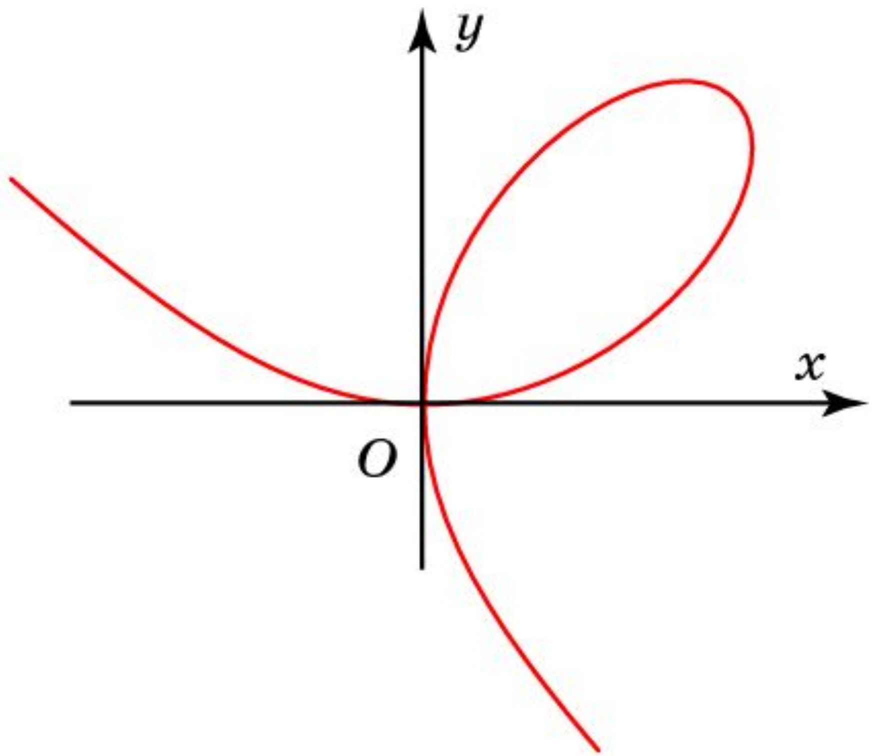


Ответ: $(x^2 + y^2)^2 – 2a^2(x^2 – y^2) = 0.$

Упражнение 11

Нарисуйте декартов лист - кривую, уравнение которой имеет вид $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

Ответ:



Параметрические уравнения

Рассмотрим вопрос о том как траектория движения точки описывается с помощью уравнений. Поскольку положение точки на плоскости однозначно определяется ее координатами, то для задания движения точки достаточно задать зависимости ее координат x, y от времени t, т.е. задать функции

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

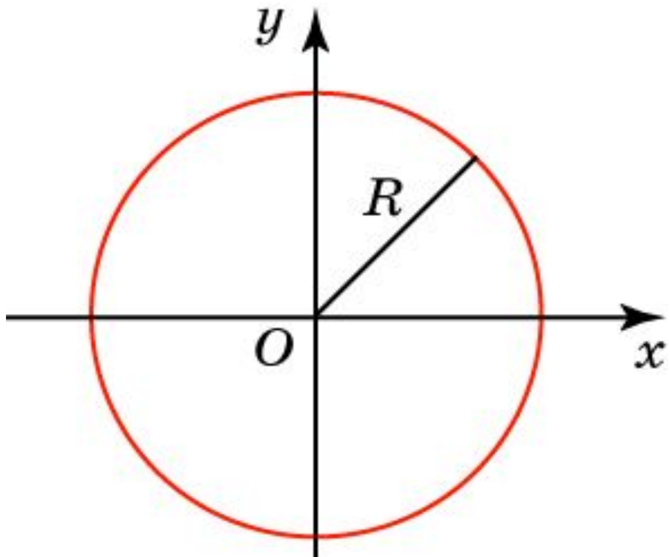
В этом случае для каждого момента времени t мы можем найти положение точки на плоскости.

Кривая на плоскости, описываемая точкой, координаты которой удовлетворяют этим уравнениям при изменении параметра t, называется параметрически заданной кривой на плоскости. Сами уравнения называются параметрическими уравнениями.

Окружность

Окружность. Окружность радиуса R с центром в начале координат можно рассматривать как параметрически заданную кривую на плоскости с параметрическими уравнениями

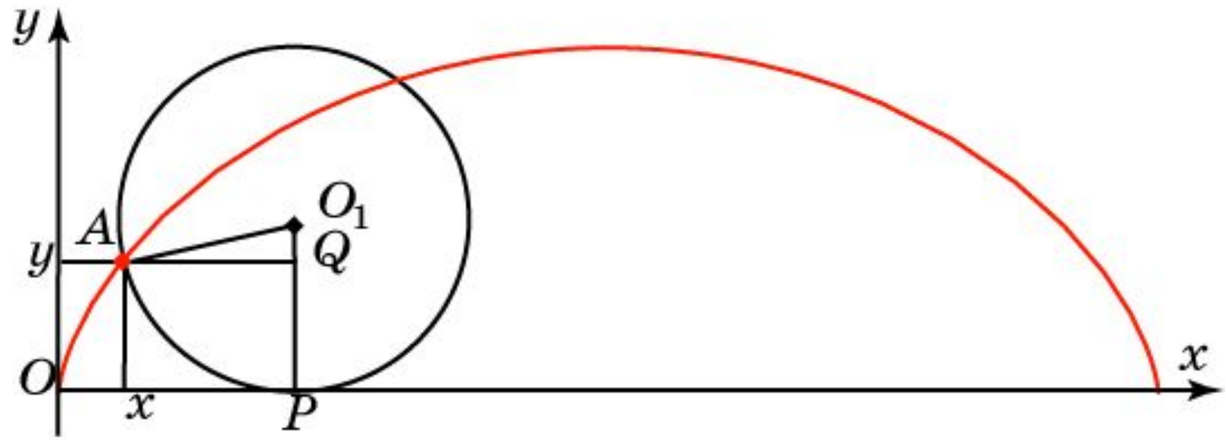
$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t. \end{cases}$$



При изменении параметра t от нуля до 2π точка на окружности делает один оборот против часовой стрелки, начиная и заканчивая в точке с координатами $(R, 0)$. При дальнейшем увеличении параметра t точка будет многократно проходить по окружности в направлении против часовой стрелки.

Циклоида

Найдем параметрические уравнения циклоиды. Предположим, что окружность повернулась на некоторый угол величины t. При этом точка касания O на окружности переместится в точку A. Поскольку дуга AP окружности при этом прокатилась по отрезку OP, то их длины равны, т.е. $AP = OP = Rt$.

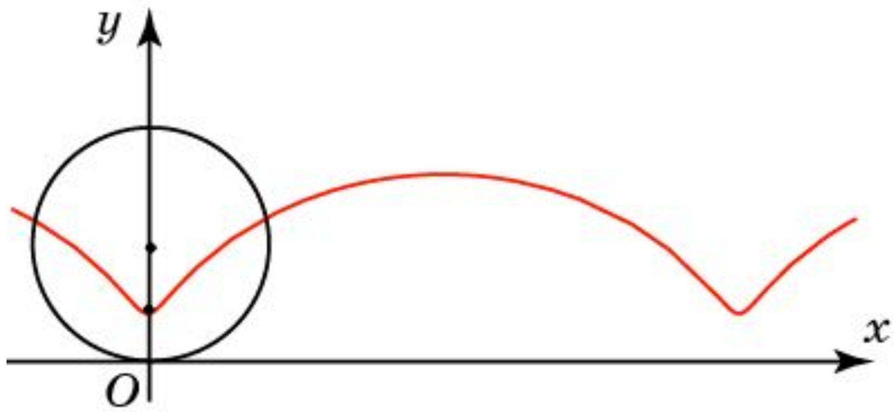


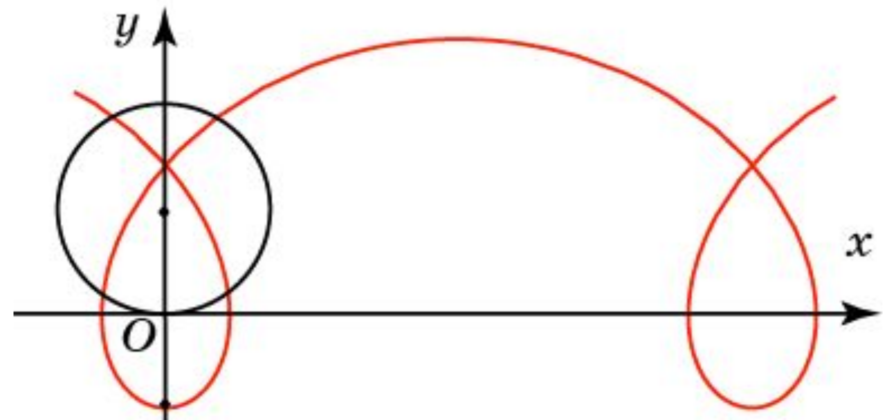
Для координат x, y точки A имеем $x = OP - AQ = Rt - R\sin t = R(t - \sin t)$, $y = O_1P - O_1Q = R - R\cos t = R(1 - \cos t)$ и, таким образом, параметрическими уравнениями циклоиды являются уравнения

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t), \\ y = R(1 - \cos t). \end{cases}$$

Трохоида

Трохоида – траектория движения точки, закрепленной на радиусе окружности, или его продолжении, когда эта окружность катится по прямой.



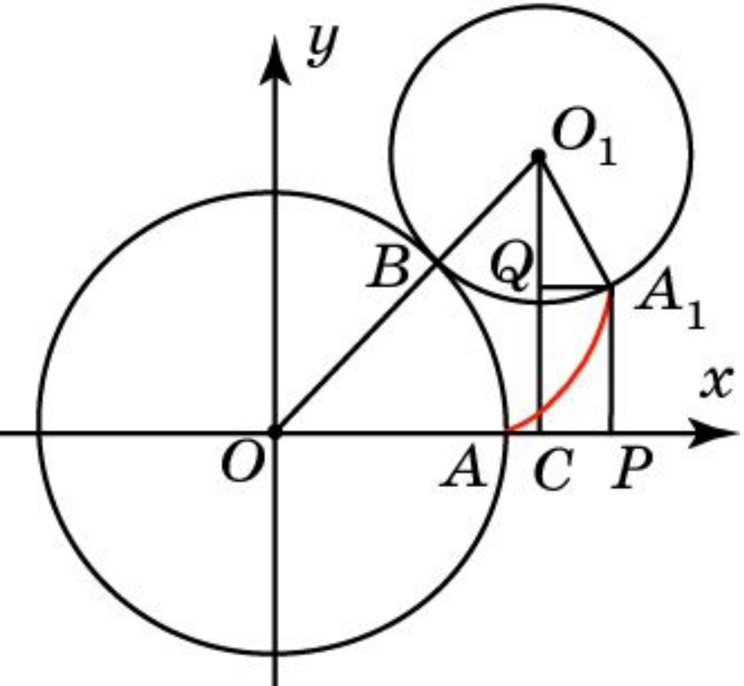


Так же как и в случае с циклоидой, показывается, что параметрическими уравнениями трохоиды являются

$$\begin{cases} x = Rt - d\sin t, \\ y = R - d\cos t, \end{cases}$$

где d – расстояние от точки до центра окружности. Если $d < R$, то кривая называется укороченной циклоидой. Если $d > R$, то кривая называется удлиненной циклоидой.

Эпициклоиды



Пусть центр O неподвижной окружности является началом координат и точка $A(R, 0)$ соответствует начальному моменту времени. Предположим, что катящаяся с внешней стороны окружность повернулась на угол, равный t. При этом точка A переместилась в точку $A_1(x,y)$. Обозначим отношение через m. Из равенства длин дуг AB и A_1B следует, что угол AOB равен mt.

Далее, $\angle A_1O_1C = \angle A_1O_1B - \angle CO_1O = t - (90^\circ - mt)$ и, следовательно,

$\sin\angle A_1O_1C = \sin(t-(90^\circ-mt)) = -\cos(t+mt)$, $\cos\angle A_1O_1C = \cos(t-(90^\circ-mt)) = \sin(t+mt)$.

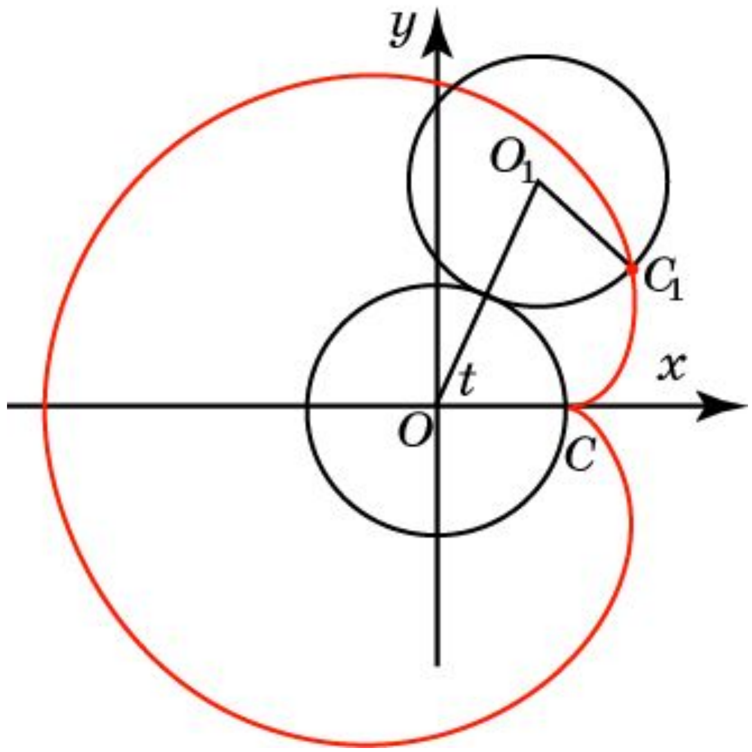
Учитывая, что $x = OC + CP$, $y = O_1C - O_1Q$, получаем параметрические уравнения эпициклоиды

$$\begin{cases} x = (R+mR)\cos mt - mR\cos(t+mt), \\ y = (R+mR)\sin mt - mR\sin(t+mt). \end{cases}$$

Кардиоида

В частности, если $m = 1$, параметрические уравнения кардиоиды имеют вид

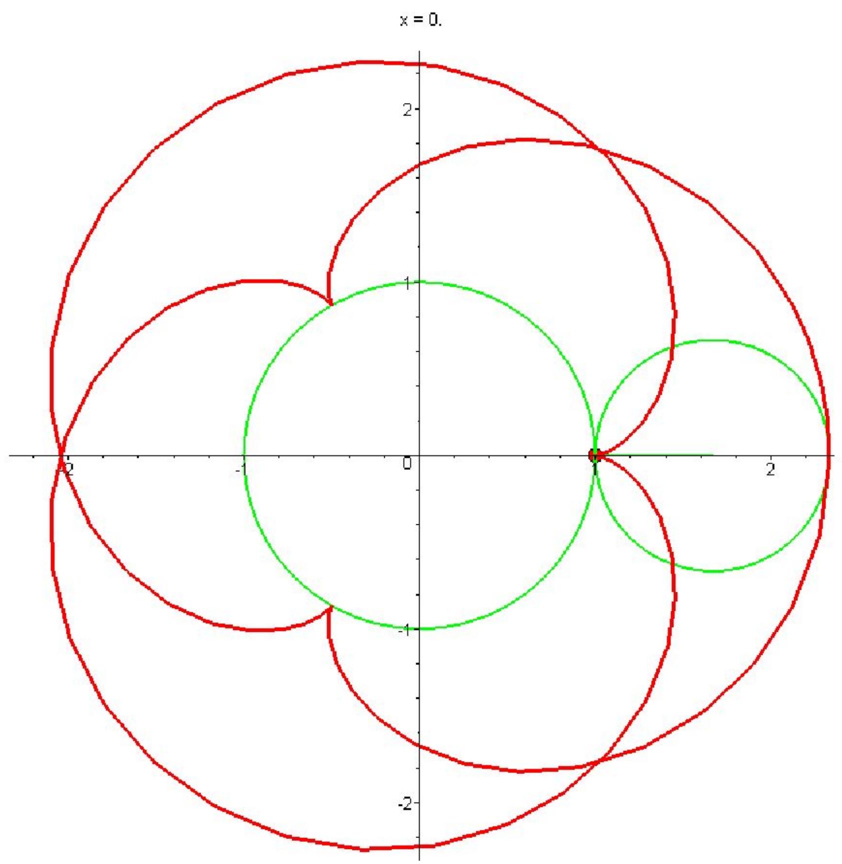
$$\begin{cases} x = 2R\cos t - R\cos 2t, \\ y = 2R\sin t - R\sin 2t. \end{cases}$$



Эпициклоида ($m = 2/3$)

Параметрические уравнения эпициклоиды имеют вид

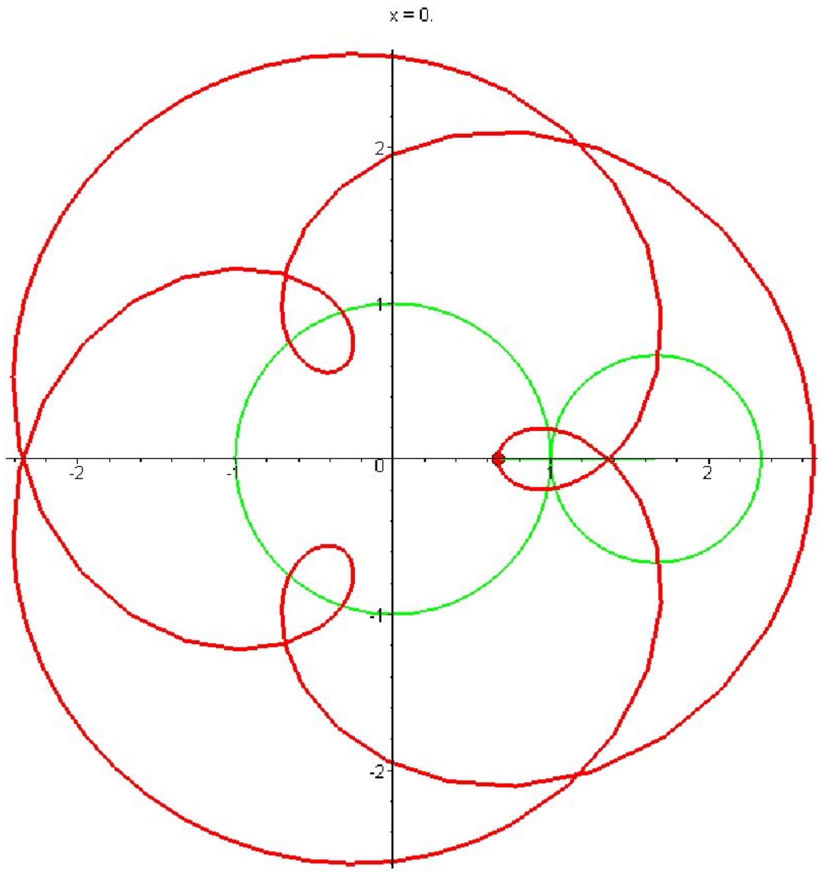
$$\begin{cases} x = \frac{5}{3}\cos\frac{2}{3}t - \frac{2}{3}\cos(\frac{5}{3}t), \\ y = \frac{5}{3}\sin\frac{2}{3}t - \frac{2}{3}\sin(\frac{5}{3}t). \end{cases}$$



Удлиненная эпициклоида ($m = 2/3$)

Параметрические уравнения удлиненной эпициклоиды имеют вид

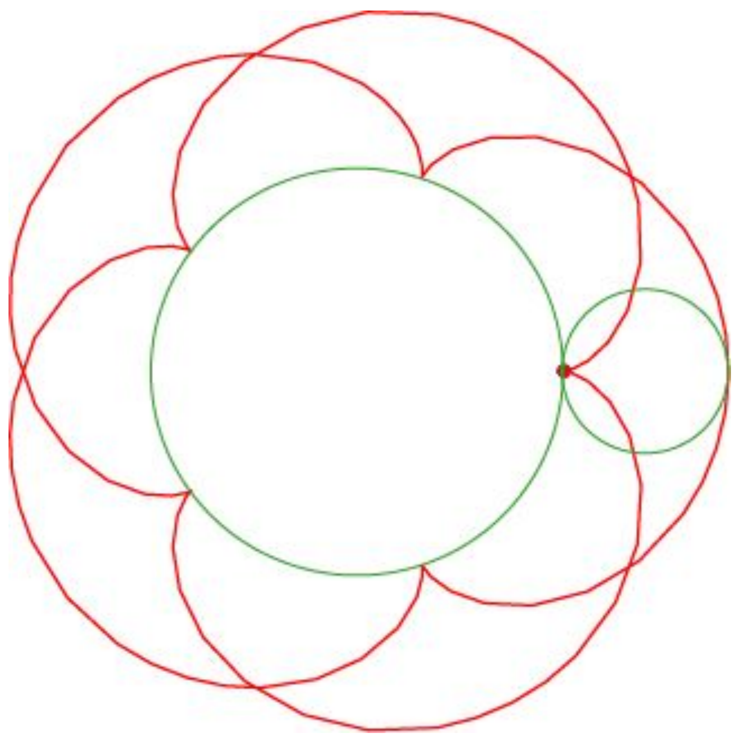
$$\begin{cases} x = \frac{5}{3}\cos\frac{2}{3}t - \cos(\frac{5}{3}t), \\ y = \frac{5}{3}\sin\frac{2}{3}t - \sin(\frac{5}{3}t). \end{cases}$$



Эпициклоида ($m = 2/5$)

Параметрические уравнения эпициклоиды имеют вид

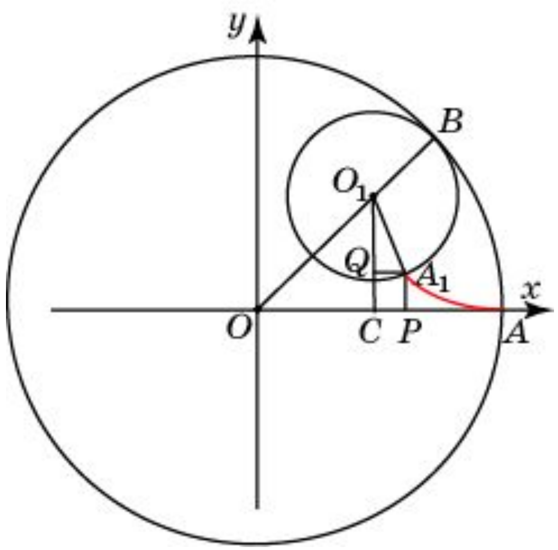
$$\begin{cases} x = \dfrac{7}{5}\cos\dfrac{2}{5}t - \dfrac{2}{5}\cos(\dfrac{7}{5}t), \\ y = \dfrac{7}{5}\sin\dfrac{2}{5}t - \dfrac{2}{5}\sin(\dfrac{7}{5}t). \end{cases}$$



Гипоциклоиды

Так же как и для эпициклоиды показывается, что уравнения гипоциклоиды имеют вид

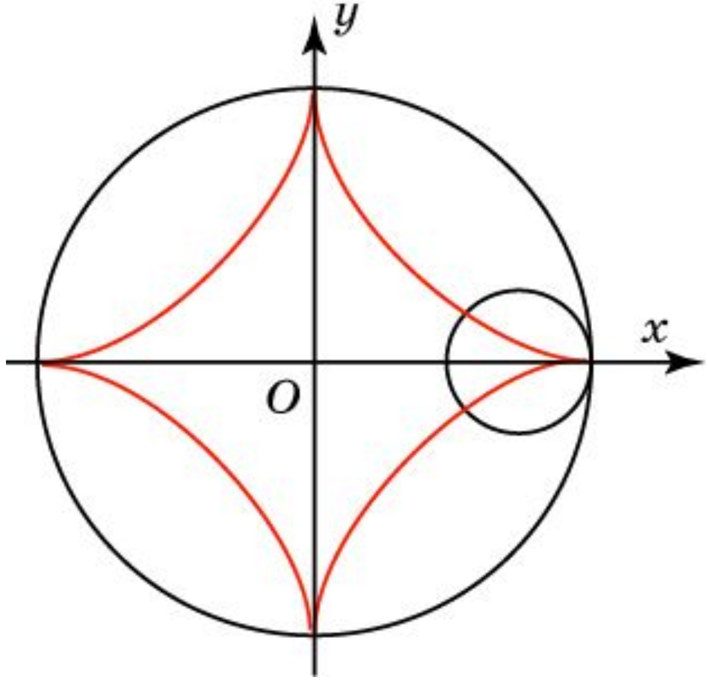
$$\begin{cases} x = (R - mR)\cos mt + mR\cos(t - mt), \\ y = (R - mR)\sin mt + mR\sin(t - mt). \end{cases}$$



Астроида

В частности, параметрические уравнения астроиды (m=1/4), имеют вид

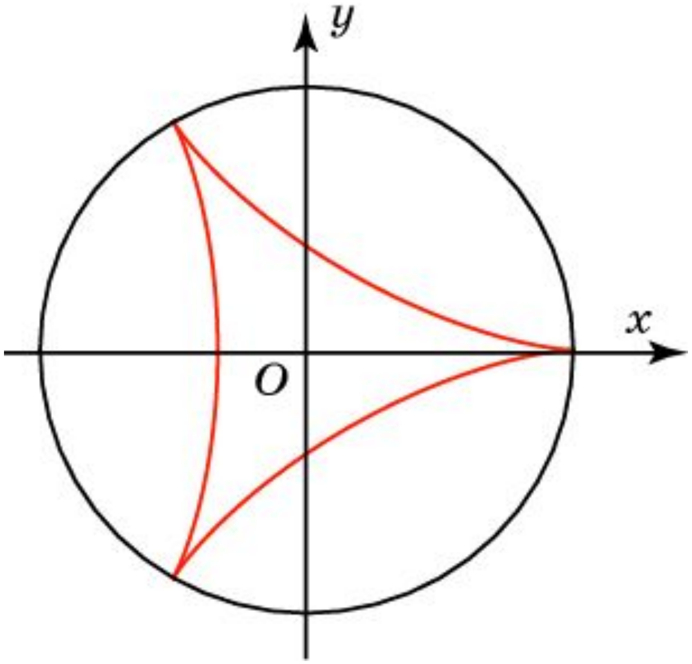
$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{4} R \cos \dfrac{t}{4} + \dfrac{1}{4} \cos \dfrac{3t}{4}, \\ y = \dfrac{3}{4} R \sin \dfrac{t}{4} + \dfrac{1}{4} \sin \dfrac{3t}{4}. \end{cases}$$



Кривая Штейнера

Параметрические уравнения кривой Штейнера (m=1/3), имеют вид

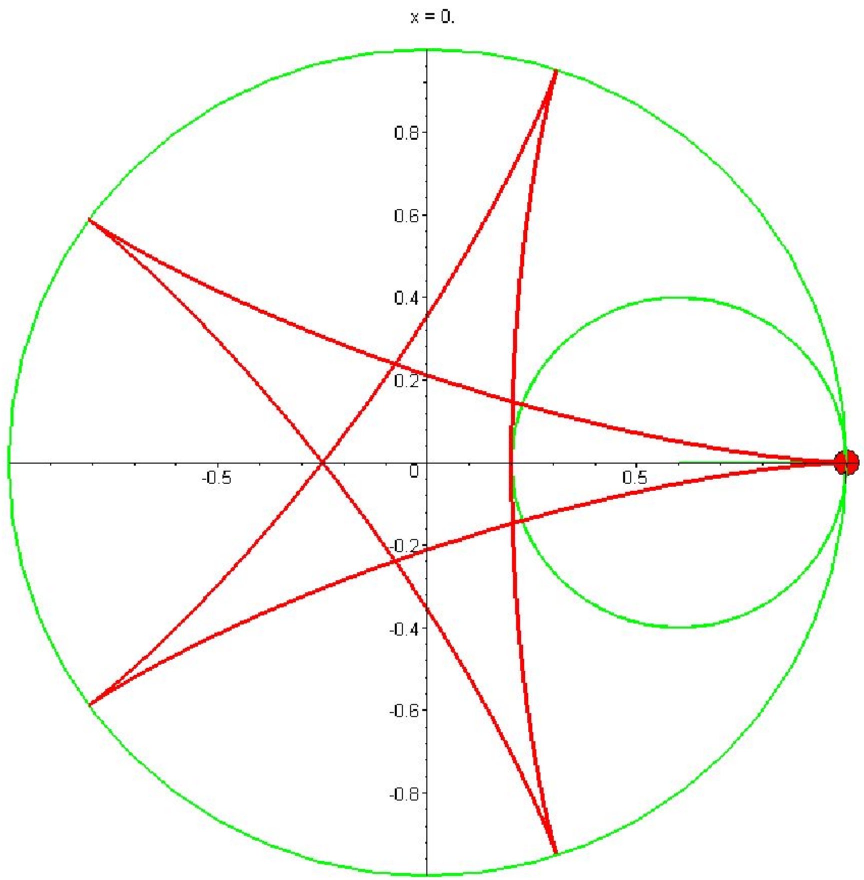
$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{3}R\cos\dfrac{t}{3} + \dfrac{1}{3}\cos\dfrac{2t}{3}, \\ y = \dfrac{2}{3}R\sin\dfrac{t}{3} + \dfrac{1}{3}\sin\dfrac{2t}{3}. \end{cases}$$



Гипоциклоида (m = 2/5)

Параметрические уравнения гипоциклоиды (m=2/5), имеют вид

$$\begin{cases} x = \frac{3}{5}\cos\frac{2}{5}t - \frac{2}{5}\cos(\frac{3}{5}t), \\ y = \frac{3}{5}\sin\frac{2}{5}t - \frac{2}{5}\sin(\frac{3}{5}t). \end{cases}$$



Упражнение 12

Найдите параметрические уравнения окружности с центром в точке $O(x_0, y_0)$ и радиусом R.

Ответ. $\begin{cases} x = x_0 + R\cos t, \\ y = y_0 + R\sin t. \end{cases}$

Упражнение 12

Найдите параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$.

Ответ. $\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t. \end{cases}$

Упражнение 14

Какую кривую задают параметрические уравнения $\begin{cases} x = t, \\ y = t^2 \end{cases}$?

Ответ. Парабола.

Упражнение 15

Какую кривую задают параметрические уравнения $\begin{cases} x = a \cdot \cos t, \\ y = b \cdot \sin t \end{cases}$?

Ответ. Эллипс.