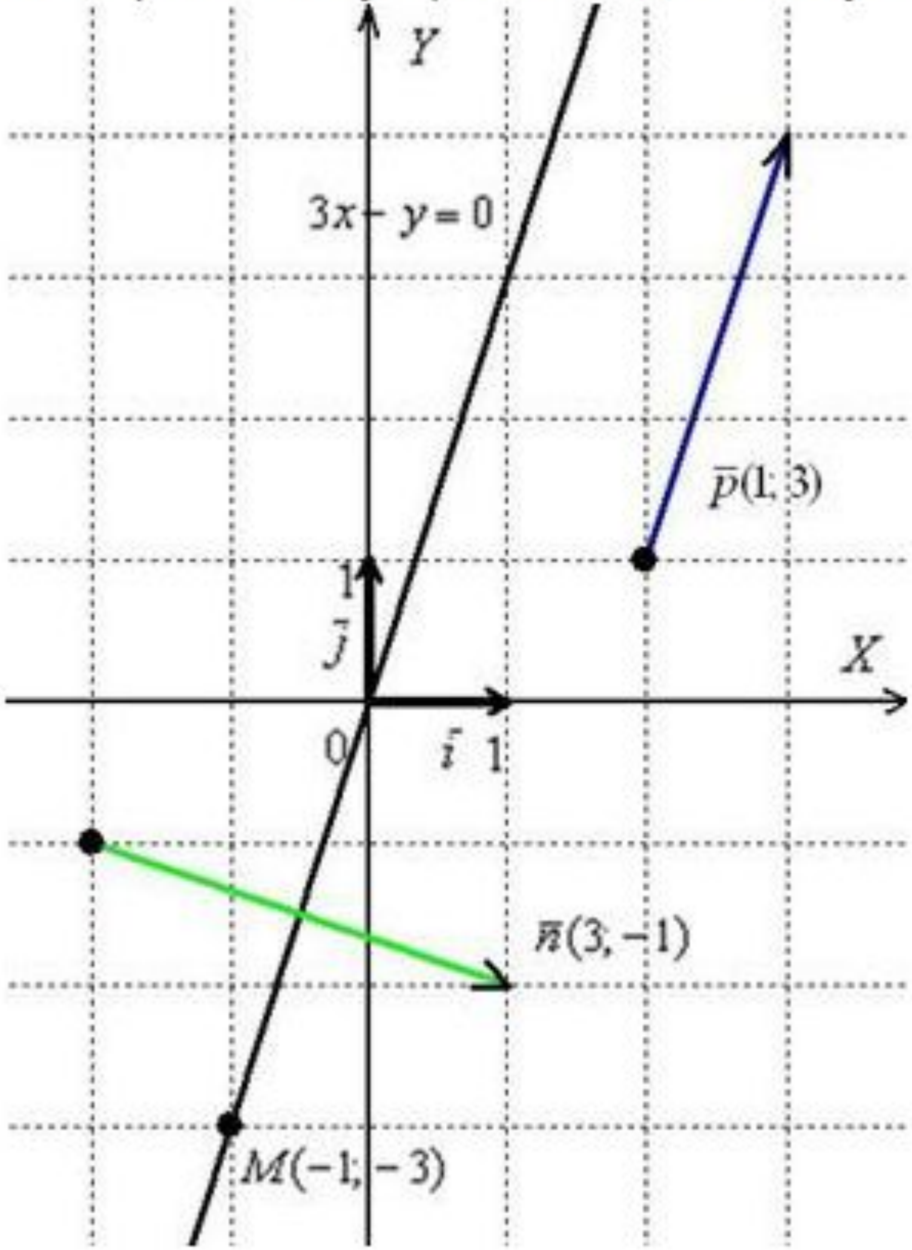
Лекция 13

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

§1. ПЛОСКОСТЬ

На чертеже ситуация выглядит следующим образом:



Построение прямой на плоскости по точке ***M(-1;-3)*** и вектору, перпендикулярному этой прямой ***n(3;-1)***

Аналогично строится плоскость по точке, через которую эта плоскость проходит, и нормальному к ней вектору.

Когда плоскость ***P*** зафиксирована нормальным вектором $n = (A,B,C)$ и точкой $M_0(x_0,y_0,z_0) \in R^3$ (рис.1), то в результате получаем уравнение $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

Или $Ax + By + Cz + D = 0$

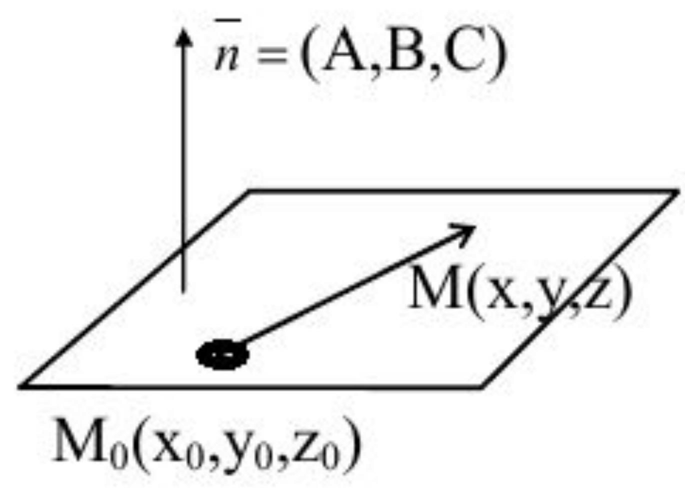
Это уравнение называют ***общим уравнением плоскости***. Исследуем его

1. Если $D=0$, то $Ax+By+Cz=0$ и $O(0,0) \in P$
2. Если $A=0$, то $n=(O,B,C) \perp \boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{P} \parallel (Ox)$.
3. Если $A=0$, $D=0$, то (комбинируем 1и 2) $Ox \subset \boldsymbol{P}$.
4. Если $A=0$, $B=0$,

то $n=(0,0,C) \perp \boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{P} \parallel xOy$.

5. Если $A=0$, $B=0$, $D=0$,

то (комбинируем 1и 4) $\boldsymbol{P} \equiv xOy$.



Пусть теперь плоскость ***P*** отсекает от осей координат *Ox, Oy, Oz*, отрезки соответственно *a,b,c*, т.е. проходит через точки $M_1(a,0,0)$, $M_2(0,b,0)$, $M_3(0,0,c)$

Поскольку при этом $D\neq 0$ ($O(0,0,0)\notin$ ***P***), то после деления обеих частей уравнения на *D*, имеем

$$\frac{x}{-A/D}+\frac{y}{-B/D}+\frac{z}{-C/D}=1$$

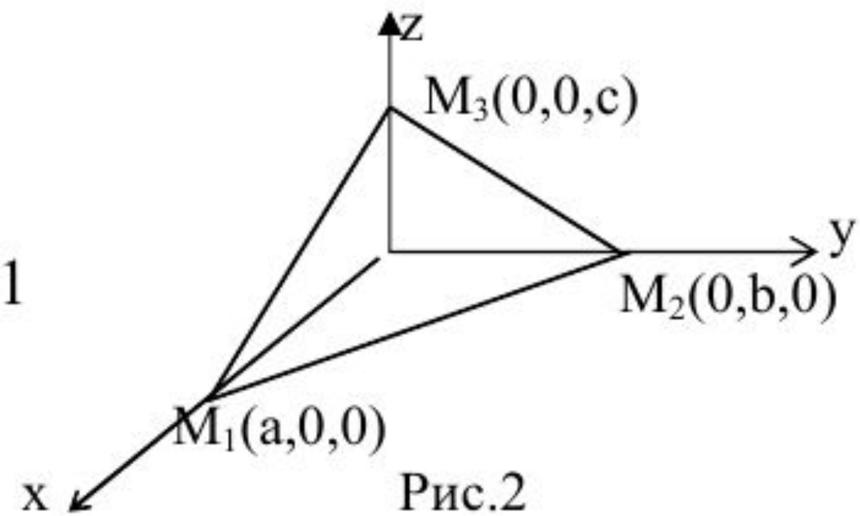


Рис.2

Так как $M_1(a,0,0)\in P$, то $\dfrac{a}{-A/D}=1$

откуда $a=-\dfrac{A}{D}$

Аналогично $b=-\dfrac{B}{D}$ и $c=-\dfrac{C}{D}$,

в результате чего получаем ***уравнение в отрезках***

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Пример 1. Составить уравнение плоскости ***P***, проходящей через точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$.

Решение. Пусть $M(x,y,z)$-произвольная точка ***P***. Построим векторы

$$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\overline{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$$

$$\overline{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$$

То, что точка M лежит на ***P***, равнозначно компланарности построенных векторов. Используя условие компланарности трех векторов, имеем искомое уравнение

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Пример 2. Найти расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости ***P***, уравнение которой имеет вид $Ax+By+Cz+D=0$.

Решение. Рассуждая также, как в случае о расстоянии от точки до прямой на плоскости, и используя рис.3, находим

$$d(M_0, P) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

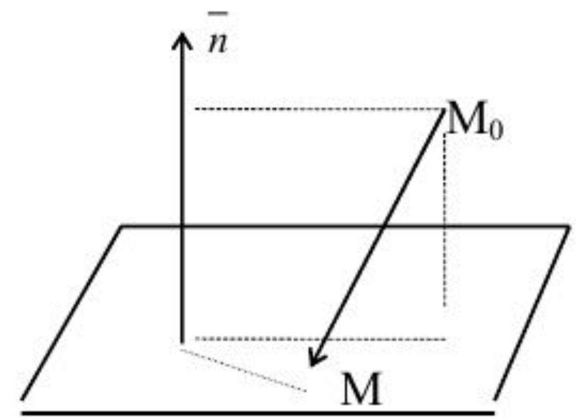


Рис.3

Пример 3. Найти угол между двумя плоскостями.

Решение. Пусть уравнения этих плоскостей имеют вид для $\boldsymbol{P_1}$ и $\boldsymbol{P_2}$

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Очевидно, что $\bar{n}_1 = (A_1, B_1, C_1) \perp P_1$, $\bar{n}_2 = (A_2, B_2, C_2) \perp P_2$. Учитывая,

что $\varphi = (P_1, \wedge P_2) = (\bar{n}_1, \wedge \bar{n}_2)$, а также $\cos\varphi = \dfrac{\bar{n}_1, \bar{n}_2}{|\bar{n}_1||\bar{n}_2|}$,получаем

$$\cos\varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} .$$

§2.ПРЯМАЯ В $\mathbf{R}^3$.

Прямую в пространстве можно задать, как пересечение двух плоскостей, т.е. с помощью СЛАУ-2

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

при условии, что вектор (A_1, B_1, C_1) не параллелен вектору (A_1, B_1, C_1).

Естественно, туже прямую можно задать и другой парой плоскостей. Такие уравнения называются ***общими.***

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

-***уравнение прямой, проходящей через две точки***. Двойное равенство можно понимать и так

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} \\ \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{z - z_0}{c} \end{cases},$$

откуда
$$\begin{cases} bx - ay + (y_0 a - x_0 b) = 0, \\ cx - az + (z_0 a - x_0 c) = 0. \end{cases}$$

Каждое из уравнений есть уравнение плоскости, параллельной соответственно координатным осям Oz и Oy. Таким образом, оба уравнения определяют прямую в пространстве как пересечение двух плоскостей, параллельных координатным осям.

§4. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Определение. ***Сфера*** - множество точек в $\boldsymbol{R^3}$, равноудаленных от данной точки, называемой центром.

Если $M_0(x_0,y_0,z_0)$-центр сферы, $M(x,y,z)$-его переменная точка, $M_0M=R$, то из соотношения $(M_0M)^2=R^2$, получаем ***каноническое уравнение сферы***

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

Если центром сферы является точка $M_0(0,0,0)$, то

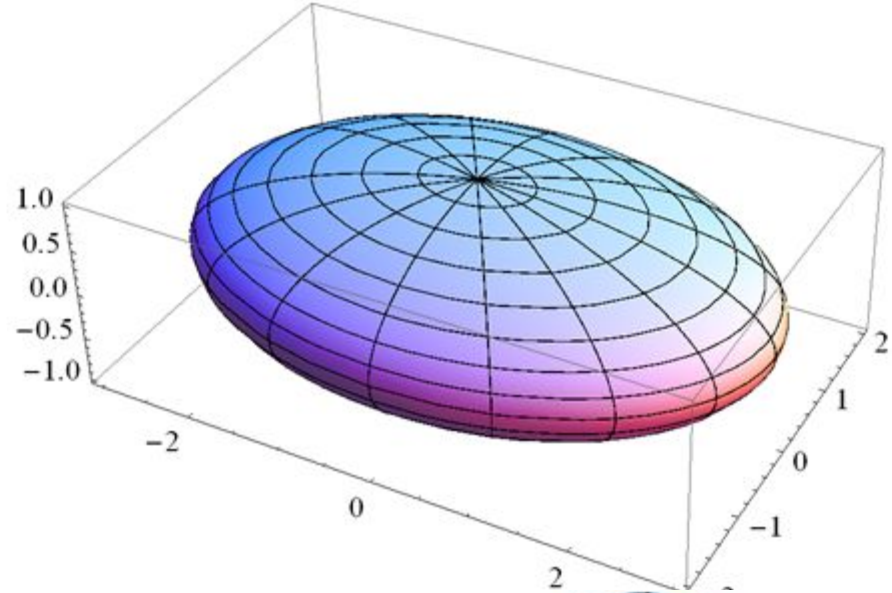
$x^2+y^2+z^2=R^2$ - *простейшее каноническое уравнение сферы.*

Определение. ***Эллипсоид*** - это поверхность с каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

где a,b,c- полуоси эллипсоида. Рассмотрим пересечение эллипсоида плоскостями $Z=h$, т.е.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ Z=h, \end{cases}$$

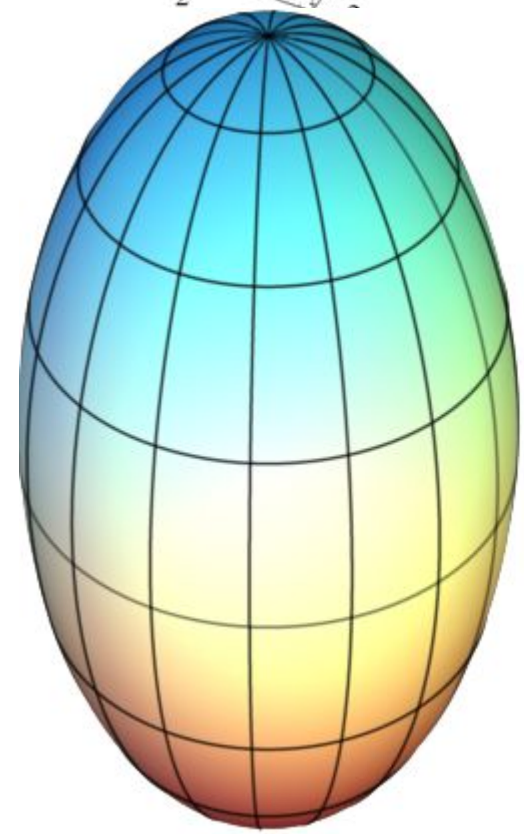


отсюда

$$\frac{x^2}{a^{*2}}+\frac{y^2}{b^{*2}}=1,$$

где

$$a^*=a\sqrt{1-h^2/c^2},\ b^*=b\sqrt{1-h^2/c^2}$$



Если $h<c$, то последние выражения - это уравнения эллипсов, которые при $h=c$ вырождаются в точки.

При $h>c$ плоскость не пересекает поверхности (получаем мнимые эллипсы).

- ***Однополосный гиперболоид*** (рис.6)

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

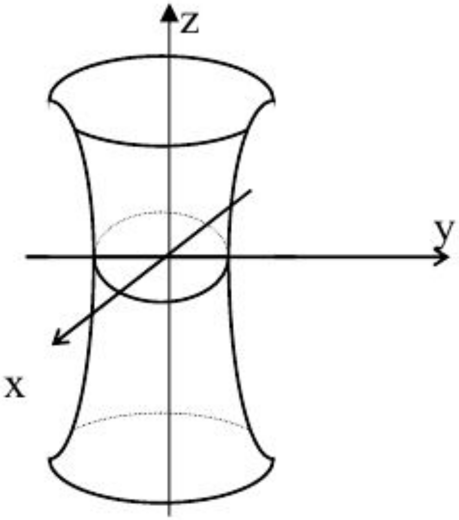


Рис. 6

- ***Двухполостный гиперболоид*** (рис.7)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

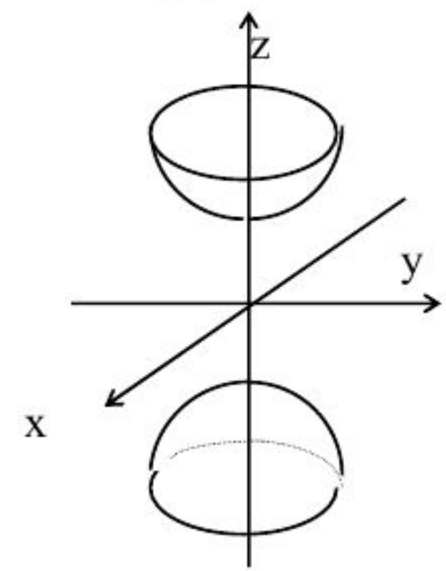


Рис. 7

- ***Эллиптический параболоид*** (рис.8)

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$$

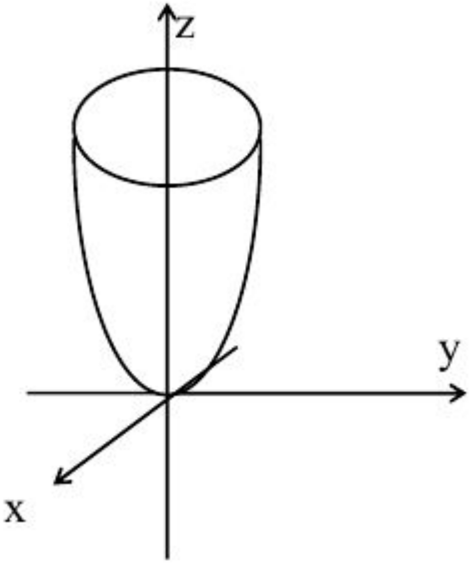


Рис. 8

- ***Гиперболических параболоид*** (рис.9)

$$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}\ .$$

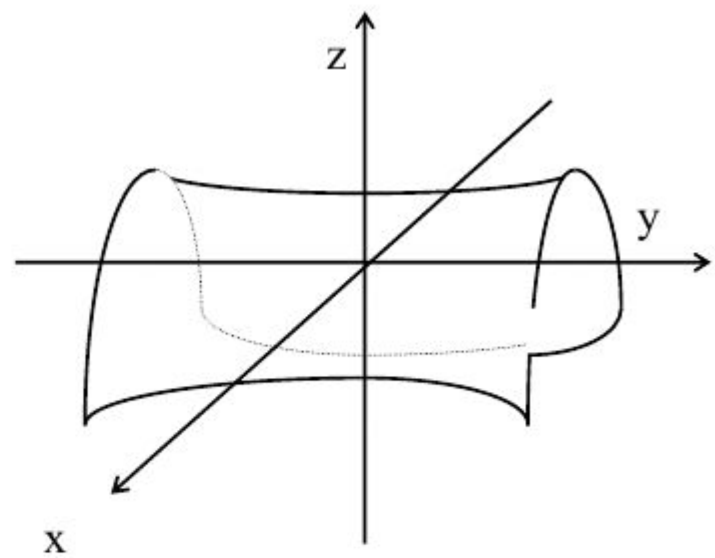
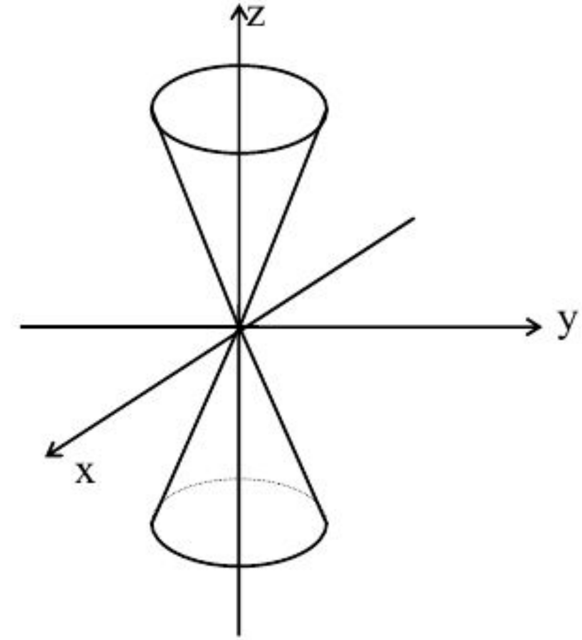


Рис.9

- ***Конус*** (рис.10)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$



- ***Эллиптический цилиндр*** (рис. 11)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad (x,y)\in R^3.$$

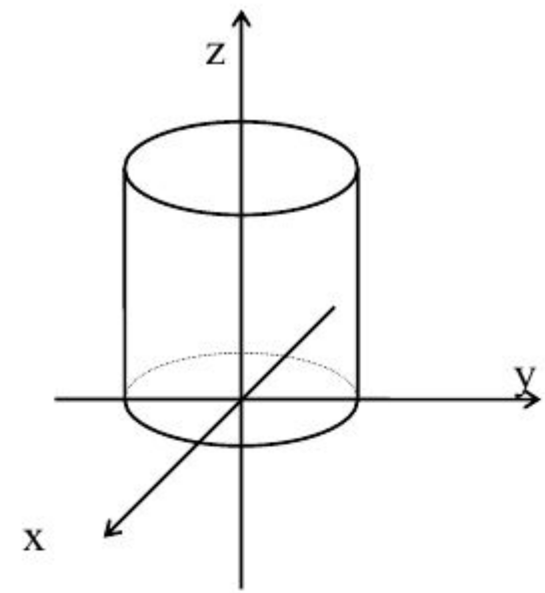


Рис.11