

Лекция 11

ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ

Аналитическая геометрия – раздел математики, в котором геометрические задачи решаются средствами алгебры на основе метода координат и введения произвольной (переменной) точки объекта в Декартовой системе координат.

§1. ЛИНИИ НА ПЛОСКОСТИ

Прямая

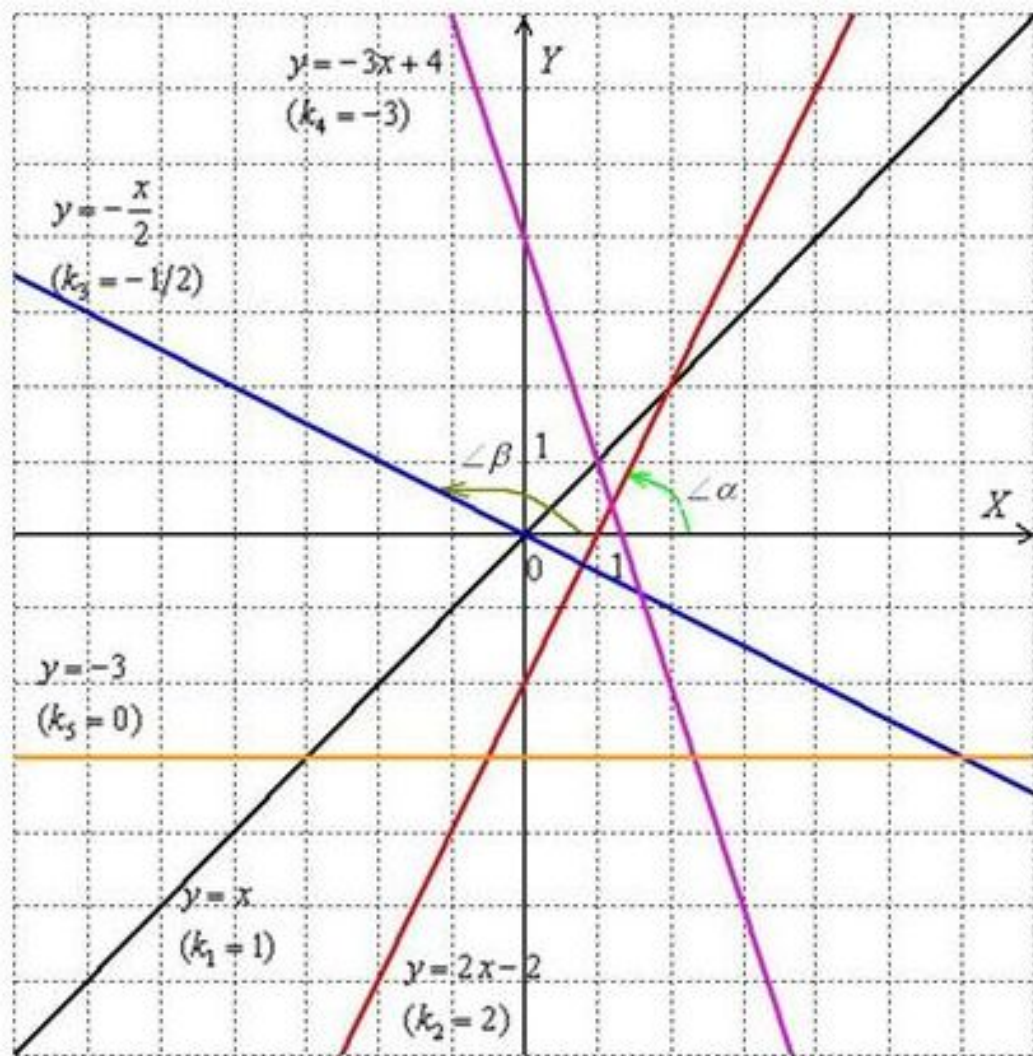
Определение. Выражение $F(x, y) = 0$ называется уравнением данной линии, если ему удовлетворяют все точки, лежащие на данной линии и не удовлетворяет ни одна точка, не принадлежащая данной линии.

Всем известный «школьный» вид уравнения прямой, который называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом*.

$$y=kx+b$$

Например, если прямая задана уравнением $y=2x-2$, то её угловой коэффициент: $k=2$.

Рассмотрим геометрический смысл данного коэффициента и то, как его значение влияет на расположение прямой:



Чем больше угловой коэффициент по модулю, тем круче идёт график прямой.

Обратно: чем меньше угловой коэффициент по модулю, тем прямая является более пологой.

Если $k > 0$, прямая идет снизу вверх, если $k < 0$ – сверху вниз.

Чем больше b , тем выше пересекает прямая ось OY

Как составить уравнение прямой с угловым коэффициентом?

Если известна точка $M(x_0, y_0)$, принадлежащая некоторой прямой, и угловой коэффициент k этой прямой, то уравнение данной прямой выражается формулой: $y - y_0 = k(x - x_0)$

Общее уравнение прямой

Уравнение $Ax + By + C = 0$ называется общим уравнением прямой на плоскости, где A, B, C – некоторые числа. При этом коэффициенты A, B одновременно не равны нулю, так как уравнение теряет смысл.

$$y = kx + b \longrightarrow y - kx - b = 0 \longrightarrow kx - y + b = 0$$

$$A = k$$

$$B = -1$$

$$C = b$$

Направляющий вектор прямой

Вектор, который параллелен прямой, называется *направляющим вектором данной прямой*.

Очевидно, что у любой прямой бесконечно много направляющих векторов, причём все они будут коллинеарны (сонаправлены или нет – не важно).

Направляющий вектор будем обозначать : $\bar{p} = (p_1, p_2)$

Но одного вектора недостаточно для построения прямой, вектор является свободным и не привязан к какой-либо точке плоскости.

Поэтому дополнительно необходимо знать некоторую точку $M(x_0, y_0)$, которая принадлежит прямой.

Уравнение прямой по точке и направляющему вектору:

$$\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2}$$

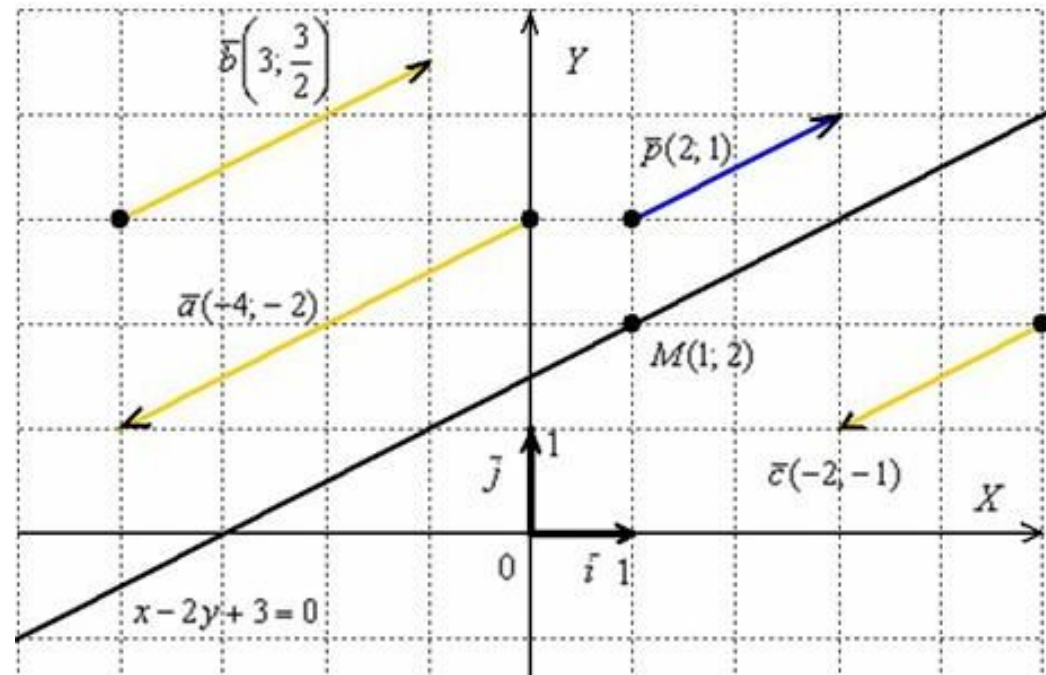
Иногда его называют *каноническим уравнением прямой*.

Пример 1. Составить уравнение прямой по точке $M(1,2)$ и направляющему вектору $p = (2,1)$

Подставим координаты направляющего вектора $p(2,1)$ и точки $M(1,2)$ в уравнение $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1}$; $1(x-1) = 2(y-2)$; $x - 2y + 3 = 0$.

Чертежа в таких примерах, как правило, делать не нужно, но в качестве пояснения:

$$y = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$$



Как найти направляющий вектор по общему уравнению прямой?
Если прямая задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$ в прямоугольной системе координат, то вектор $\vec{p}(-B, C)$ является направляющим вектором данной прямой.

Примеры нахождения направляющих векторов прямых:

$$1) 5x + 7y - 1 = 0 \Rightarrow \vec{p}(-7; 5)$$

$$2) 2y + 3 = 0 \quad (0 \cdot x + 2y + 3 = 0) \Rightarrow \vec{p}(-2; 0)$$

$$3) 5x - 2 = 0 \quad (5x + 0 \cdot y - 2 = 0) \Rightarrow \vec{p}(0; 5)$$

В том случае, если одна из координат направляющего вектора нулевая: $\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2} \quad p_2(x - x_0) = p_1(y - y_0)$

Как составить уравнение прямой по двум точкам?

Если известны две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, то уравнение прямой, проходящей через данные точки, можно составить по формуле:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Поскольку вектор $\overline{M_1M_2}$ будет направляющим вектором данной прямой.

Примечание: точки можно «поменять ролями» и использовать формулу.

$$\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2}$$

Пример 2. Составить уравнение прямой, проходящей через две заданные точки: $M_1(-2, -1)$, $M_2(3, 1)$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Решение:

Подставим координаты точек $M_1(-2, -1)$, $M_2(3, 1)$ в уравнение прямой.

$$\frac{x - (-2)}{3 - (-2)} = \frac{y - (-1)}{1 - (-1)}; \quad \frac{x + 2}{5} = \frac{y + 1}{2}; \quad 2(x + 2) = 5(y + 1); \quad 2x + 4 = 5y + 5$$
$$2x - 5y - 1 = 0$$

Необходима проверка – координаты исходных точек должны удовлетворять полученному уравнению:

$$2(-2) - 5(-1) - 1 = 0 \quad 2 \cdot 3 - 5 \cdot 1 - 1 = 0$$

Задача решена верно.

Если в результате проверки тождества не получилось – надо все пересчитать.

Аналогично предыдущему случаю: если в $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$

один из знаменателей (координата направляющего вектора) обращается в ноль, то переписываем её в виде .

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1)$$

Вектор нормали прямой (нормальный вектор)

Если прямая задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$ в прямоугольной системе координат, то вектор $\mathbf{n}(A, B)$ является вектором нормали данной прямой.

Вектор нормали $\mathbf{n}(A, B)$ всегда ортогонален направляющему вектору прямой $\mathbf{p}(-B, C)$. Убедимся в ортогональности данных векторов с помощью **скалярного произведения**:

$$\vec{p} \cdot \vec{n} = -B \cdot A + A \cdot B = 0 \Rightarrow \vec{p} \perp \vec{n}$$

Приведем примеры с теми же уравнениями, что и для направляющего вектора:

$$1) 5x + 7y - 1 = 0 \Rightarrow \bar{n}(5; 7)$$

$$2) 2y + 3 = 0 \quad (0 \cdot x + 2y + 3 = 0) \Rightarrow \bar{n}(0; 2)$$

$$3) 5x - 2 = 0 \quad (5x + 0 \cdot y - 2 = 0) \Rightarrow \bar{n}(5; 0)$$

Если известна некоторая точка $M(x_0, y_0)$, принадлежащая прямой, и вектор нормали $\mathbf{n}(n_1, n_2)$ этой прямой, то уравнение данной прямой выражается формулой:

$$n_1(x - x_0) = n_2(y - y_0)$$

Пример 3. Составить уравнение прямой по точке $M(-1, -3)$ и вектору нормали $\mathbf{n}(3, -1)$. Найти направляющий вектор прямой.

Решение. Используем формулу.

$$n_1 \cdot (x - x_0) + n_2 \cdot (y - y_0) = 0$$

$$3 \cdot (x - (-1)) - 1 \cdot (y - (-3)) = 0$$

$$3 \cdot (x + 1) - (y + 3) = 0$$

$$3x + 3 - y - 3 = 0$$

$$3x - y = 0$$

Выполним проверку: Вектор нормали $\mathbf{n}(3, -1)$ совпадает с коэффициентами A, B .

Точка $M(-1, -3)$ лежит на прямой.

$$3 \cdot (-1) - (-3) = 0$$

$$-3 + 3 = 0$$

$$0 = 0$$

Верное равенство.

Уравнение составлено правильно.

Вытаскиваем направляющий вектор

прямой:

$$\vec{p}(-B; A) = \vec{p}(1; 3)$$

На чертеже ситуация выглядит следующим образом:

