

---

# Основные *NP*-полные проблемы

---

---

## Форма описания $NP$ -полной проблемы:

---

1. *Название* проблемы и ее аббревиатура.
  2. *Вход* проблемы: что и каким образом представляют данные.
  3. *Искомый выход*: при каких условиях выходом будет «да».
  4. Известная проблема, сведение которой к данной проблеме доказывает  $NP$ -полноту последней.
-

## Проблема выполнимости (ВЫП)

*Формулы алгебры высказываний* строятся из следующих элементов.

1. Пропозициональные переменные, принимающие значения 1 (истина) или 0 (ложь).
2. Бинарные операторы  $\wedge, \vee$ , обозначающие логические связки И, ИЛИ двух формул.
3. Унарный оператор  $\neg$ , который обозначает логическое отрицание.
4. Скобки для группирования операторов и операндов, если необходимо изменить порядок старшинства (приоритетов) операторов, принятый по умолчанию (вначале применяется  $\neg$ , затем  $\wedge$  и, наконец,  $\vee$ ).

## Представление экземпляров ВВП

Используется следующий код.

1. Символы  $\wedge, \vee, \neg$ , и скобки  $(, )$  представляют самих себя.
2. Переменная  $X_i$  представляется символом  $X$  с дописанной к нему последовательностью нулей и единиц — двоичной записью числа  $i$ .

Таким образом, алфавит  $A$  проблемы-языка ВВП содержит всего восемь символов. Все экземпляры ВВП являются цепочками символов - словами в этом фиксированном конечном алфавите.

## Проблема выполнимости (ВЫП)

**Вход:** слова  $w$  в алфавите  $A$ , кодирующие формулы алгебры высказываний  $\Phi$  - экземпляры ВЫП.

**Выход:** значение 1 - ответ «да» - тогда и только тогда, когда закодированная формула алгебры высказываний  $\Phi$  выполнима.

---

Проблема выполнимости (ВЫП) формул алгебры высказываний состоит в следующем

---

- **ВЫЯСНИТЬ, выполнима ли данная формула алгебры высказываний  $\Phi$ ?**

---

Теорема Кука. Проблема ВЫП  $NP$ -полна.

---

## Проблема выполнимости (ВКНФ)

Проблема выполнимости ВКНФ формул алгебры высказываний состоит в следующем

- **ВЫЯСНИТЬ, выполнима ли данная формула алгебры высказываний  $\Phi$  в форме КНФ?**

## ***Вход* проблемы ВКНФ:**

слова  $w$  в алфавите  $A$ , кодирующие формулы алгебры высказываний  $\Phi$  форме КНФ - экземпляры ВКНФ.

## ***Искомый выход:***

значение 1 - ответ «да» - тогда и только тогда, когда закодированная формула алгебры высказываний  $\Phi$  выполнима.

**Известная *NP*-полная проблема, которая сводится к ВКНФ – проблема ВЪП.**



**Теорема.** Для любой формулы алгебры логики  $\Phi$  за полиномиальное время можно построить такую формулу алгебры логики  $\Phi'$  в форме КНФ, что выполняются условия:

- 1) формула  $\Phi$  выполнима в том и только том случае, если выполнима КНФ  $\Phi'$ ;
- 2) длина формулы  $\Phi'$  линейно зависит от количества символов в формуле  $\Phi$ .

*Доказательство:* индукцией по числу символов операций в формуле  $\Phi$  проносим отрицания к переменным и затем индукцией по длине формулы получаем формулу  $\Phi'$  в форме КНФ.

---

Теорема. Проблема ВВП полиномиально сводится к проблеме ВКНФ.

---

Следствие. Проблема ВКНФ  $NP$ -полная.

---

---

## Ограниченная проблема выполнимости (ЗВЫП)

Ограниченная проблема выполнимости ЗВЫП формул алгебры высказываний состоит в следующем

- выяснить, выполнима ли данная формула алгебры высказываний  $\Phi$  в форме КНФ с дизъюнктами из 3 литер?

## ***Вход* проблемы ЗВЫП:**

слова  $w$  в алфавите  $A$ , кодирующие формулы алгебры высказываний  $\Phi$  в форме КНФ с дизъюнктами из 3 литер - экземпляры ВКНФ.

## ***Искомый выход:***

значение 1 - ответ «да» - тогда и только тогда, когда закодированная формула  $\Phi$  выполнима.

**Известная *NP*-полная проблема, которая сводится к ЗВЫП – проблема ВКНФ.**

**Теорема.** Для любой формулы алгебры высказываний  $\Phi$  в форме КНФ за полиномиальное время можно построить такую формулу алгебры высказываний  $\Phi'$  в форме КНФ с дизъюнктами из 3 литер, что выполняются условия:

- 1) формула  $\Phi$  выполнима в том и только том случае, если выполнима КНФ  $\Phi'$ ;
- 2) длина формулы  $\Phi'$  линейно зависит от количества символов в формуле  $\Phi$ .

*Доказательство:* индукцией по числу символов операций в дизъюнктах формулы  $\Phi$  получаем формулу  $\Phi'$  в форме КНФ с дизъюнктами из 3 литер.

---

Теорема. Проблема ВКНФ полиномиально сводится к проблеме ЗВЫП.

---

Следствие. Проблема ЗВЫП  $NP$ -полная.

---

Проблема независимого множества (НМ):

**Вход:** граф  $G = (V, E)$  и нижняя граница  $k$ ,  
удовлетворяющая условию  $1 \leq k \leq |V|$ .

**Выход:** ответ «да» тогда и только тогда,  
когда  $G$  имеет независимое множество из  $k$   
вершин.

**Проблема, сводящаяся к данной:** Проблема  
ЗВЫП.

Следствие. Проблема НМ  $NP$ -полна.

Проблема вершинного покрытия (ВП):

**Вход:** граф  $G = (V, E)$  и нижняя граница  $k$ ,  
удовлетворяющая условию  $0 \leq k \leq |V| - 1$ .

**Выход:** ответ «да» тогда и только тогда, когда  
 $G$  имеет вершинное покрытие из  $k$  или менее  
числа вершин.

**Проблема, сводящаяся к данной:** Проблема  
НМ.

Следствие. Проблема ВП  $NP$ -полна.



Проблема ориентированного гамильтонова цикла (ОГЦ):

**Вход:** ориентированный граф  $G$ .

**Выход:** ответ «да» тогда и только тогда, когда  $G$  имеет ориентированный гамильтонов цикл.

**Проблема, сводящаяся к данной:**  
Проблема 3ВЫП.

Следствие. Проблема ОГЦ  $NP$ -полна.

Проблема гамильтонова цикла (ГЦ):

**Вход:** неориентированный граф  $G$ .

**Выход:** ответ «да» тогда и только тогда, когда  $G$  имеет гамильтонов цикл.

**Проблема, сводящаяся к данной:** Проблема ОГЦ.

Следствие. Проблема ГЦ  $NP$ -полна.

Проблема коммивояжера (ПКОМ):

**Вход:** взвешенный граф  $G$  и предельное значение  $k$ .

**Выход:** ответ «да» тогда и только тогда, когда  $G$  имеет гамильтонов цикл веса не превышающего  $k$ .

**Проблема, сводящаяся к данной:** Проблема ГЦ.

Следствие. Проблема ПКОМ  $NP$ -полна.