Аксиоматические теории первого порядка

При исследовании конкретной математической теории фиксируют некоторые наборы исходных предикатных символов $P_1,\ldots,P_k$ соответствующей арности $n_1,\ldots,n_k$, исходных функциональных символов $f_1,\ldots,f_l$ соответствующей арности $m_1,\ldots,m_l$ и исходных предметных символов $a,b,\ldots$.

Множество $\Omega=\{P_1,\ldots,P_k;f_1,\ldots,f_l;a,b,\ldots\}$ называется *алгебраическим типом* или *сигнатурой* математической теории.

Принципиальное отличие УИП от ИП заключается в следующем.

1. *Алфавит УИП* состоит из предметных переменных, логических и вспомогательных символов, а также некоторых исходных предикатных символов $P_1,\dots,P_k$ соответствующей арности $n_1,\dots,n_k$, некоторых исходных функциональных символов $f_1,\dots,f_l$ соответствующей арности $m_1,\dots,m_l$ и некоторых исходных предметных символов $a,b,\dots$.

В результате элементы области интерпретации такого языка будут описываться не только с помощью предметных переменных, но и с помощью так называемых *термов* – специальных выражений языка, которые индуктивно определяются следующим образом:

а) все предметные переменные и предметные символы являются термами,

б) если f – сигнатурный n-арный функциональный символ и $t_1,\ldots,t_n$ – термы, то выражение $f(t_1,\ldots,t_n)$ является термом.

2. *Формулы УИП* определяются по аналогии с формулами ИП за исключением исходного шага индукции – определения атомарных формул, которые в данном случае имеют вид выражений $t_1 = t_2$, $P(t_1,\ldots,t_n)$ для любых термов $t_1, t_2, \ldots, t_n$ и сигнатурных n-арных предикатных символов P.

Записывают $\Phi = \Phi(x_1,\ldots,x_n)$, если в формулу Φ входят предметные переменные $x_1,\ldots,x_n$.

Формула без свободных вхождений переменных называется *замкнутой формулой* или *предложением.*

3. Множество *аксиом УИП* описывается пятью определенными в предыдущем разделе *схемами аксиом* $(A_1)-(A_5)$, в которых Φ, Ψ, Φ_i $(i=1,2,3)$ теперь являются произвольными формулами УИП, и дополнительной системой формул Σ специальных аксиом рассматриваемой математической теории. Аксиомы первого вида называются *логическими* и аксиомы второго вида – *нелогическими* аксиомами УИП.

4. *Правилами вывода УИП* являются правило modus ponens (MP) и правило обобщения (Gen).

5. Формула Ф называется *теоремой УИП*, если найдется такая конечная последовательность формул $\Phi_1,\ldots,\Phi_n$, в которой Φ_n =Ф и каждая формула Φ_i $(1 \le i \le n)$ либо является логической аксиомой из схем $(A_1)-(A_5)$, либо является нелогической аксиомой из множества Σ, либо получается из некоторых предыдущих формул этой последовательности Φ_j $(1 \le j < i)$ по одному из правил вывода *MP* или *Gen*.

Последовательность формул $\Phi_1,\ldots,\Phi_n$ называется *выводом* или *доказательством* формулы Ф.

Вывод формулы Ф сокращенно обозначают символом $\vdash$Ф и говорят, что «Ф есть теорема». Множество всех таких теорем обозначается символом $Th_{\Omega}(\Sigma)$ и называется *элементарной теорией* (или *теорией первого порядка*) *узкого исчисления предикатов сигнатуры* Ω *с множеством аксиом* Σ.

Интерпретация формул теории первого порядка

При исследовании конкретной математической теории фиксируют некоторые наборы исходных предикатных символов $P_1,\dots,P_k$ соответствующей арности $n_1,\dots,n_k$, исходных функциональных символов $f_1,\dots,f_l$ соответствующей арности $m_1,\dots,m_l$ и исходных предметных символов $a,b,\dots$.

Множество $\Omega=\{P_1,\dots,P_k;f_1,\dots,f_l;a,b,\dots\}$ называется *алгебраическим типом* или *сигнатурой* математической теории.

Рассматривается язык формул узкого исчисления предикатов (УИП) сигнатуры Ω.

Принципиальное отличие интерпретации формул языка УИП от описанной ранее интерпретации формул алгебры предикатов заключается в том, что определение истинности формул УИП сигнатуры Ω вводится с помощью интерпретации этого языка в конкретных алгебраических системах с первоначально фиксированными предикатными, функциональными и предметными символами сигнатуры Ω.

Для придания содержательного смысла формулам УИП сигнатуры Ω задается:

- *область интерпретации* – непустое множество M, которое является областью возможных значений всех предметных переменных,
- на множестве M для каждого символа сигнатуры Ω фиксируется соответствующий математический объект: для каждого предикатного символа $P \in \Omega$ арности n фиксируется n-арное отношение $P_M \subset M^n$, для каждого функционального символа $f \in \Omega$ арности n фиксируется n-арная алгебраическая операция $f_M : M^n \to M$ и для каждого предметного символа $a \in \Omega$ фиксируется элемент $a_M \in M$.

В результате получается алгебраическая система с основным множеством M, которая называется *алгебраической Ω-системой* и обозначается $\mathcal{M} = (M; P_M, \dots; f_M, \dots; a_M, \dots)$ или просто $\mathcal{M} = (M, \Omega)$. Такая система называется также *интерпретацией* языка УИП сигнатуры Ω.

Конкретные значения предметным переменным по-прежнему присваиваются с помощью оценок предметных переменных, т.е. отображений α таких переменных в область интерпретации M.

Выполнимость формул теории первого порядка

Выполнимость формулы $M \models_\alpha \Phi$:

1) при оценке α каждый терм $t = t(x_1,\ldots,x_n)$ интерпретируется в $\mathbf{M} = (M,\Omega)$ ее элементом $\alpha(t) = t(\alpha(x_1),\ldots,\alpha(x_n))$, который получается в результате вычисления для элементов $\alpha(x_1),\ldots,\alpha(x_n)$ значений соответствующих сигнатурных операций, с помощью которых определяется терм t;

2) если Φ - атомарная формула $t_1 = t_2$ для термов t_1, t_2, то $M \models_\alpha \Phi$ равносильно $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$;

3) если Φ - атомарная формула вида $P(t_1,\ldots,t_n)$ для n-местного предикатного символа P и термов $t_1,\ldots,t_n$, то $M \models_\alpha \Phi$ равносильно тому, что $P_M(\alpha(t_1),\ldots,\alpha(t_n))$ истинно;

<u>Определение</u>. В интерпретации M формула Φ называется:

– *общезначимой* (или *тождественно истинной*) и записывается $M \models \Phi$, если $M \models_\alpha \Phi$ при любых оценках α;

– *выполнимой*, если $M \models_\alpha \Phi$ для некоторой оценки α;

– *опровержимой*, если для некоторой оценки α неверно, что $M \models_\alpha \Phi$;

– *тождественно ложной*, если для любой оценки α неверно, что $M \models_\alpha \Phi$.

Определение. Интерпретация M языка УИП сигнатуры Ω называется *моделью* множества формул Σ, если в этой интерпретации M тождественно истинны все формулы $\Phi \in \Sigma$.

Определение. Формула Φ называется *общезначимой формулой* узкого исчисления предикатов сигнатуры Ω с множеством аксиом Σ, если она тождественно истинна в любой модели множества формул Σ. Множество всех таких общезначимых формул обозначим $T_{\Omega}(\Sigma)$.

Главная цель - определение такой системы нелогических аксиом Σ, для которой $Th_{\Omega}(\Sigma)=T_{\Omega}(\Sigma)$.

Примеры теорий первого порядка

1. <u>Теория полугрупп</u>. Пусть сигнатура $\Omega=\{f\}$ содержит один бинарный функциональный символ f, для которого используется инфиксная запись с помощью символа $\cdot$: для любых предметных переменных x,y терм $f(x,y)$ обозначается $x\cdot y$, или просто xy. Тогда термамы сигнатуры Ω: $(x_1x_2)\ldots x_k$ и атомарные формулы: $(x_1x_2)\ldots x_k=(y_1y_2)\ldots y_m$ (для некоторых $x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_m$ и правильно расставленных скобок).

Рассмотрим систему аксиом Σ: $(xy)z=x(yz)$, выражающую свойство ассоциативности операции умножения.

Моделями множества формул Σ языка УИП сигнатуры Ω являются алгебры с одной ассоциативной бинарной операцией, которые называются *полугруппами*.

Примеры полугрупп дают основные числовые множества с операциями сложения или умножения, а также множества всех преобразований любого непустого множества с операцией композиции.

Элементарная теория $Th_{\Omega}(\Sigma)$ называется *теорией полугрупп*.

2. Теория упорядоченных множеств. Пусть сигнатура $\Omega = \{P\}$ содержит один бинарный предикатный символ P, для которого используется инфиксная запись с помощью символа $\leq$: формула $P(x, y)$ обозначается $x \leq y$.

Система аксиом Σ:

$$x \leq x, \quad x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y, \quad x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z.$$

В этом случае моделями множества формул Σ языка УИП сигнатуры Ω являются множества с отношением порядка, которые называются *упорядоченными множествами*.

Элементарная теория $Th_\Omega(\Sigma)$ называется *теорией упорядоченных множеств.*

3. Теория арифметики. Сигнатура $\Omega=\{+,\cdot,S,0\}$ содержит два бинарных функциональных символа $+$, $\cdot$ (для которых используется инфиксная запись), один унарных функциональный символ S и один предметный символ 0.

Система аксиом Σ: $S(x)=S(y) \Rightarrow x=y$, $\neg S(x)=0$, $x+0=x$, $x\cdot 0=0$, $x+S(y)=S(x+y)$, $x\cdot S(y)=xy+x$, $\Phi(0)\wedge(\forall x)(\Phi(x)\Rightarrow\Phi(S(x)))\Rightarrow(\forall x)\Phi(x)$,

где $\Phi(x)$ – произвольная формула языка УИП рассматриваемой сигнатуры Ω, содержащая единственную свободную переменную x.

Элементарная теория $Th_{\Omega}(\Sigma)$ называется *теорией арифметики* и обозначается Ar.

Моделью такой теории является, например, множество неотрицательных целых чисел N_0 с бинарными операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$ чисел, унарной операцией $S(x) = x + 1$ и выделенным числом 0. Такая модель $N_0=(N_0;+,\cdot,S,0)$ называется *стандартной моделью арифметики*.

С другой стороны, известно, что теория Ar имеет также модели, которые существенно отличаются от стандартной модели N_0 и которые называются *нестандартными моделями теории арифметики*.

Отметим, что теория Ar принято называть также *арифметикой Пеано* в честь итальянского математика Дж.Пеано, который в 1891 году впервые рассмотрел аксиоматику множества натуральных чисел.

Эта аксиоматика принципиально отличалась от описанной выше системы только последней аксиомой, которая Дж.Пеано была сформулирована в форме следующего *принципа математической индукции*:

если $P(n)$ – такое свойство натуральных чисел, что $P(0)$ (т.е. 0 обладает этим свойством P) и $P(n) \Rightarrow P(S(n))$ (т.е. вместе с любым натуральным числом n этим свойством P обладает следующее за ним число $n+1$), то данным свойством P обладает каждое натуральное число.

С одной стороны, аксиоматика Пеано имеет единственную модель – множество натуральных чисел $\boldsymbol{N}_0=(\boldsymbol{N}_0;+,\cdot,S,0)$, но, с другой стороны, последняя аксиома Пеано не может быть выражена на языке УИП рассматриваемой сигнатуры $\Omega=\{+,\cdot,S,0\}$.

Известная *теорема Геделя о неполноте формальной арифметики* показывает, что множество всех формул языка УИП сигнатуры $\Omega=\{+,\cdot,S,0\}$, тождественно истинных на алгебре $\boldsymbol{N}_0=(\boldsymbol{N}_0;+,\cdot,S,0)$, существенно шире элементарной теории арифметики Ar.

Свойства теорий первого порядка

Теория первого порядка $Th_{\Omega}(\Sigma)$ называется:

– *непротиворечивой*, если в ней нельзя доказать никакое предложение Φ вместе с его отрицанием $\neg\Phi$;

– *полной*, если она содержит любое предложение Φ или его отрицание $\neg\Phi$;

– *разрешимой*, если есть эффективная процедура, позволяющая для любой формулы Φ определить, является она теоремой этой теории или нет.

Теорема Геделя о существовании модели. Теория первого порядка непротиворечива в том и только том случае, если она имеет модель.

В частности, все перечисленные выше теории непротиворечивы.

Теорема Геделя о полноте. Для любого множества формул Σ языка УИП сигнатуры Ω теория первого порядка $Th_{\Omega}(\Sigma)$ состоит из тех и только тех формул этого языка, которые общезначимы на всех моделях множества аксиом Σ.

Для алгебраической Ω-системы A обозначим $Th_{\Omega}(A)$ множество всех формул сигнатуры Ω, которые общезначимы на A.

Лемма. Для любой алгебраической Ω-системы A множество формул $Th_{\Omega}(A)$ удовлетворяет следующим свойствам:

1) множество $Th_{\Omega}(A)$ является теорией первого порядка;

2) теория $Th_{\Omega}(A)$ непротиворечивая;

3) теория $Th_{\Omega}(A)$ полная.

В частности, для алгебры неотрицательных целых чисел $N_0=(N_0;+,\cdot,S,0)$ множество формул $Th_{\Omega}(N_0)$ языка УИП сигнатуры $\Omega=\{+,\cdot,S,0\}$ является полной теорией.

В частности, для алгебры неотрицательных целых чисел $\boldsymbol{N}_0=(\boldsymbol{N}_0;+,\cdot,S,0)$ множество формул $Th_\Omega(\boldsymbol{N}_0)$ языка УИП сигнатуры $\Omega=\{+,\cdot,S,0\}$ является полной теорией.

С другой стороны, теория полугрупп не является полной, так как, например, ни предложение $\Phi=(\forall x,y)(xy=yx)$, ни его отрицание $\neg\Phi$ не принадлежат этой теории в силу того, что есть как коммутативные, так и некоммутативные полугруппы.

Теорема Геделя о неполноте арифметики. Теория Ar является собственным подмножеством теории $Th_{\Omega}(\boldsymbol{N}_0)$.

Доказано также, что теория $Th_{\Omega}(\boldsymbol{N}_0)$ в принципе не имеет разрешимой системы аксиом (для которой есть алгоритм, распознающий по любой формуле языка УИП сигнатуры $\Omega = \{+, \cdot, S, 0\}$, является ли она аксиомой или нет).