Формулы алгебры высказываний

Свойства алгебры высказываний P описываются с помощью формул, которые строятся из переменных символов с помощью знаков логических операций. Такие формулы принято называть также *пропозициональными формулами*

Символы логических операций $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$, которые называются *пропозициональными связками.*

Переменные символы $X, Y, Z, \ldots$, которые используются для обозначения высказываний и которые называются *пропозициональными переменными.*

Определение. *Формулы* алгебры высказываний индуктивно определяются по правилам:

1) каждая пропозициональная переменная является формулой,
2) если Φ, Ψ – формулы, то формулами являются также выражения

$$(\neg\Phi), \ (\Phi \wedge \Psi), \ (\Phi \vee \Psi), \ (\Phi \Rightarrow \Psi), \ (\Phi \Leftrightarrow \Psi).$$

Множество всех формул алгебры высказываний обозначим $\boldsymbol{F}_{\mathrm{AB}}$.

Если в формулу Φ входят переменные $X_1,\ldots,X_n$, то записывают $\Phi = \Phi(X_1,\ldots,X_n)$.

Из индуктивного определения формул следует, что если в формулу Φ вместо переменных $X_1,\ldots,X_n$ подставить произвольные конкретные высказывания $A_1,\ldots,A_n$, то получится некоторое сложное высказывание $\Phi(A_1,\ldots,A_n)$.

Истинностное значение высказывания $\lambda(\Phi(A_1,\ldots,A_n))$ определяется истинностными значениями исходных высказываний $\lambda(A_1),\ldots,\lambda(A_n)$ согласно таблицам истинностных значений логических операций $\neg,\wedge,\vee,\Rightarrow,\Leftrightarrow$.

Формула Φ определяет функцию n переменных F_{Φ}, которая каждому упорядоченному набору $(\lambda(X_1),...,\lambda(X_n))$ n элементов множества $\{0,1\}$ ставит в соответствие элемент $\lambda(\Phi(X_1,...,X_n))$ этого же множества.

Функция F_{Φ} называется *истинностной функцией формулы* Φ и графически представляется *истинностной таблицей*.

Такая таблица содержит 2^n строк и имеет одно из 2^{2^n} возможных распределений значений 0 и 1 в последнем столбце.

Пример. **Формула** $\Phi = (\neg X \wedge \neg Y \Leftrightarrow X \vee \neg Y)$ имеет следующую истинностную таблицу:

X	Y	$\neg X$	$\neg Y$	$\neg X \wedge \neg Y$	$X \vee \neg Y$	$\neg X \wedge \neg Y \Leftrightarrow X \vee \neg Y$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0

<u>Определение.</u> Формула Ф называется:

– *тавтологией* (или *тождественно истинной формулой*) и обозначается $\models Ф$, если ее истинностная функция тождественно равна 1;
– *противоречием* (или *тождественно ложной формулой*), если ее истинностная функция тождественно равна 0;
– *выполнимой*, если ее истинностная функция не равна тождественно 0;
– *опровержимой*, если ее истинностная функция не равна тождественно 1.

Тавтологии являются общими схемами построения истинных высказываний и в этом смысле выражают некоторые *логические законы*.

Примеры таких законов являются:

$\models X \vee \neg X$ – закон исключенного третьего,

$\models \neg\neg X \Leftrightarrow X$ – закон двойного отрицания,

$\models \neg(X \wedge \neg X)$ – закон противоречия,

$\models (X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow (\neg Y \Rightarrow \neg X)$ – закон контрапозиции.

Новые тавтологии можно получить с помощью следующего правила.

<u>Правило подстановки:</u>

если $\models \Phi(X_1,\ldots,X_n)$, то для любых формул $\Phi_1,\ldots,\Phi_n$ тавтологией является формула $\Phi(\Phi_1,\ldots,\Phi_n)$.

Логическая равносильность формул

Определение. Формулы Φ, Ψ называются *логически равносильными* (или просто *равносильными*), если $\models \Phi \Leftrightarrow \Psi$.

Для обозначения логически эквивалентных формул используется символическая запись $\Phi \cong \Psi$, или просто $\Phi = \Psi$.

Такие выражения называются *логическими равенствами* или просто *равенствами формул.*

<u>Лемма.</u> Справедливы следующие равенства формул:

1) $X \vee (Y \vee Z) = (X \vee Y) \vee Z$, $X \wedge (Y \wedge Z) = (X \wedge Y) \wedge Z$ – свойства ассоциативности дизъюнкции и конъюнкции;

2) $X \vee Y = Y \vee X$, $X \wedge Y = Y \wedge X$ – свойства коммутативности дизъюнкции и конъюнкции;

3) $X \vee X = X$, $X \wedge X = X$ – свойства идемпотентности дизъюнкции и конъюнкции;

4) $X \wedge (Y \vee Z) = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$, $X \vee (Y \wedge Z) = (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$ – законы дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции и дизъюнкции относительно конъюнкции;

5) $\neg(X \wedge Y) = \neg X \vee \neg Y$, $\neg(X \vee Y) = \neg X \wedge \neg Y$ – законы де Моргана;

6) $(X \wedge Y) \vee X = X$, $(X \vee Y) \wedge X = X$ – законы поглощения;

7) $\neg\neg X = X$ – закон двойного отрицания;

8) $X \Rightarrow Y = \neg X \vee Y$, $X \Rightarrow Y = \neg(X \wedge \neg Y)$ – взаимосвязь импликации с дизъюнкцией и конъюнкцией;

9) $X \Leftrightarrow Y = (X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X)$, $X \Leftrightarrow Y = (\neg X \vee Y) \wedge (X \vee \neg Y)$ – взаимосвязь эквивалентности с импликацией, дизъюнкцией и конъюнкцией.

Лемма (Правило замены). Если формулы Φ, Φ' равносильны, то для любой формулы $\Psi(X)$, содержащей переменную X, выполняется равенство: $\Psi(\Phi) = \Psi(\Phi')$.

Это правило означает, что при замене в любой формуле $\Psi = \Psi(\Phi)$ некоторой ее подформулы Φ на равносильную ей формулу Φ' получается формула $\Psi' = \Psi(\Phi')$, равносильная исходной формуле Ψ.

Такие переходы называются *равносильными преобразованиями формул*.

Пример.

Формула $\Phi = (X \Rightarrow Y) \Rightarrow Z$ с помощью равенств 5),7),8) из леммы 2.4.1 равносильно преобразовывается следующим образом:

$$\Phi = (X \Rightarrow Y) \Rightarrow Z = \neg(X \Rightarrow Y) \vee Z =$$

$$= \neg(\neg(X \wedge \neg Y)) \vee Z = (X \wedge \neg Y) \vee Z \cdot$$

Нормальные формы формул алгебры высказываний

Отношение равносильности $\cong$ является отношением эквивалентности на множестве всех формул $\boldsymbol{F}_{\mathrm{AB}}$, которое разбивает это множество на классы эквивалентности $[\Phi] = \{\Psi \in F_{AB} : \Phi \cong \Psi\}$, определяемые формулами $\Phi \in F_{AB}$.

Из лемм следует, что для каждой формулы $\Phi \in F_{AB}$ можно указать равносильные ей формулы специального вида, содержащие только символы логических операций $\neg, \wedge, \vee$.

Определение. *Литерой* называется пропозициональная переменная X или ее отрицание $\neg X$. Для обозначения литеры используется символ X^{α}, где $\alpha \in \{0,1\}$ и по определению $X^1 = X$, $X^0 = \neg X$.

Определение. *Конъюнктом* (соответственно, *дизъюнктом*) называется литера или конъюнкция (соответственно, дизъюнкция) литер.

Конъюнкт (дизъюнкт) называется *совершенным*, если он содержит все пропозициональные переменные рассматриваемой формулы.

Определение. *Конъюнктивной нормальной формой* (сокращенно КНФ) называется дизъюнкт или конъюнкция дизъюнктов. *Дизъюнктивной нормальной формой* (сокращенно ДНФ) называется конъюнкт или дизъюнкция конъюнктов.

При этом КНФ (соответственно, ДНФ) называется *совершенной*, если совершенны все ее дизъюнкты (соответственно, конъюнкты).

Теорема 1. Любая формула равносильна некоторой ДНФ и некоторой КНФ.

Алгоритм приведения формулы Φ к ДНФ (соответственно, к КНФ):

1) выражаем все входящие в формулу Φ импликации и эквивалентности через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание;

2) согласно законам де Моргана все отрицания, стоящие перед скобками, вносим в эти скобки и сокращаем все двойные отрицания;

3) согласно законам дистрибутивности преобразуем формулу так, чтобы все конъюнкции выполнялись раньше дизъюнкций (соответственно, чтобы все дизъюнкции выполнялись раньше конъюнкций).

Теорема 2. Любая выполнимая формула $\Phi = \Phi(X_1, \ldots, X_n)$ равносильна формуле вида

$$\bigvee_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} (X_1^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge X_n^{\alpha_n}),$$

где дизъюнкция берется по всем упорядоченным наборам $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{0,1\}^n$, удовлетворяющим условию $F_\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1$.

Такая формула определяется однозначно (с точностью до порядка членов конъюнкций и дизъюнкций) и называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (сокращенно СДНФ) формулы Φ.

Теорема 3. Любая опровержимая формула $\Phi = \Phi(X_1, \dots, X_n)$ равносильна формуле вида

$$\bigwedge_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)} (X_1^{1-\alpha_1} \vee \dots \vee X_n^{1-\alpha_n}),$$

где конъюнкция берется по всем упорядоченным наборам $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \{0,1\}^n$, удовлетворяющим условию $F_\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$.

Такая формула определяется однозначно (с точностью до порядка членов конъюнкций и дизъюнкций) и называется *совершенной конъюнктивной нормальной формой* (сокращенно СКНФ) формулы Φ.

Алгоритм нахождения СДНФ и СКНФ формулы $\Phi = \Phi(X_1,\ldots,X_n)$:

1. Составить истинностную таблицу формулы Ф и добавить два столбца «Совершенные конъюнкты» и «Совершенные дизъюнкты».

2. Если при значениях $\lambda(X_1) = k_1,\ldots,\lambda(X_n) = k_n$ значение $\lambda(\Phi(X_1,\ldots,X_n))$ формулы Ф равно 1, то в соответствующей строке таблицы в столбце «Совершенные конъюнкты» записываем конъюнкт $X_1^{k_1} \wedge \ldots \wedge X_n^{k_n}$ и в столбце «Совершенные дизъюнкты» делаем прочерк. При этом $X_i^1 = X_i$ и $X_i^0 = \neg X_i$.

3. Если при значениях $\lambda(X_1)=m_1,\dots,\lambda(X_n)=m_n$ истинностное значение $\lambda(\Phi(X_1,\dots,X_n))$ формулы Ф равно 0, то в соответствующей строке таблицы в столбце «Совершенные дизъюнкты» записываем дизъюнкт $X_1^{1-m_1}\vee\dots\vee X_n^{1-m_n}$ и в столбце «Совершенные конъюнкты» делаем прочерк.

X_1	…	X_n	…	$\Phi(X_1,\dots,X_n)$	Совершенные конъюнкты	Совершенные дизъюнкты
…	…	…	…	…	…	…
k_1	…	k_n	…	1	$X_1^{k_1}\wedge\dots\wedge X_n^{k_n}$	—
…	…	…	…	…	…	…
m_1	…	m_n	…	0	—	$X_1^{1-m_1}\vee\dots\vee X_n^{1-m_n}$
…	…	…	…	…	…	…

4. СДНФ формулы Ф равна дизъюнкции полученных совершенных конъюнктов: $(X_1^{k_1} \wedge \ldots \wedge X_n^{k_n}) \vee \ldots$.

5. СКНФ формулы Ф равна конъюнкции полученных совершенных дизъюнктов: $(X_1^{1-m_1} \vee \ldots \vee X_n^{1-m_n}) \wedge \ldots$.

Логическое следование формул

Определение. Формула Φ называется *логическим следствием формул* $\Phi_1,\dots,\Phi_m$, если при любой подстановке в эти формулы вместо их переменных $X_1,\dots,X_n$ конкретных высказываний $A_1,\dots,A_n$ из истинности высказываний $\Phi_1(A_1,\dots,A_n),\dots,\Phi_m(A_1,\dots,A_n)$ следует истинность высказывания $\Phi(A_1,\dots,A_n)$.

Символическое обозначение $\Phi_1,\dots,\Phi_m \models \Phi$ - называется *логическим следованием*.

Формулы $\Phi_1,\dots,\Phi_m$ называются *посылками* и формула Φ – *следствием* логического следования $\Phi_1,\dots,\Phi_m \models \Phi$.

Определение. Множество формул $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ называется *противоречивым*, если из него логически следует любая (в том числе и тождественно ложная) формула Φ. Символически это записывается $\Phi_1, \ldots, \Phi_m \models$.

В противном случае множество формул $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ называется *выполнимым*.

Лемма (Транзитивность логического следования). Если $\Phi_1, \ldots, \Phi_m \models \Phi$ и для любого значения $1 \le i \le m$ выполняется $\Psi_1, \ldots, \Psi_k \models \Phi_i$, то $\Psi_1, \ldots, \Psi_k \models \Phi$.

Лемма (Критерии логического следования). Условие $\Phi_1,\ldots,\Phi_m \models \Phi$ равносильно каждому из следующих условий:

a) $\Phi_1 \wedge \ldots \wedge \Phi_m \models \Phi$,

b) $\models \Phi_1 \wedge \ldots \wedge \Phi_m \Rightarrow \Phi$,

c) $\Phi_1, \ldots, \Phi_m, \neg\Phi \models$.

В частности, $\Phi \models \Psi$ равносильно $\models \Phi \Rightarrow \Psi$. Отсюда также следует, что $\Phi = \Psi$ равносильно тому, что $\Phi \models \Psi$ и $\Psi \models \Phi$.

Основные правила логического следования:

1) *правило отделения* (или правило *модус поненс* – от латинского modus ponens)

$$\Phi, \Phi \Rightarrow \Psi \models \Psi;$$

2) *правило контрапозиции*

$$\Phi \Rightarrow \Psi \models \neg\Psi \Rightarrow \neg\Phi;$$

3) *правило цепного заключения*

$$\Phi_1 \Rightarrow \Phi_2, \Phi_2 \Rightarrow \Phi_3 \models \Phi_1 \Rightarrow \Phi_3;$$

4) *правило перестановки посылок*

$$\Phi_1 \Rightarrow (\Phi_2 \Rightarrow \Phi_3) \models \Phi_2 \Rightarrow (\Phi_1 \Rightarrow \Phi_3).$$

Вывод: Следующие задачи равносильны:

а) проверка тождественной истинности формул;

б) проверка логического следования формул;

в) проверка тождественной ложности формул;

г) проверка противоречивости множества формул.