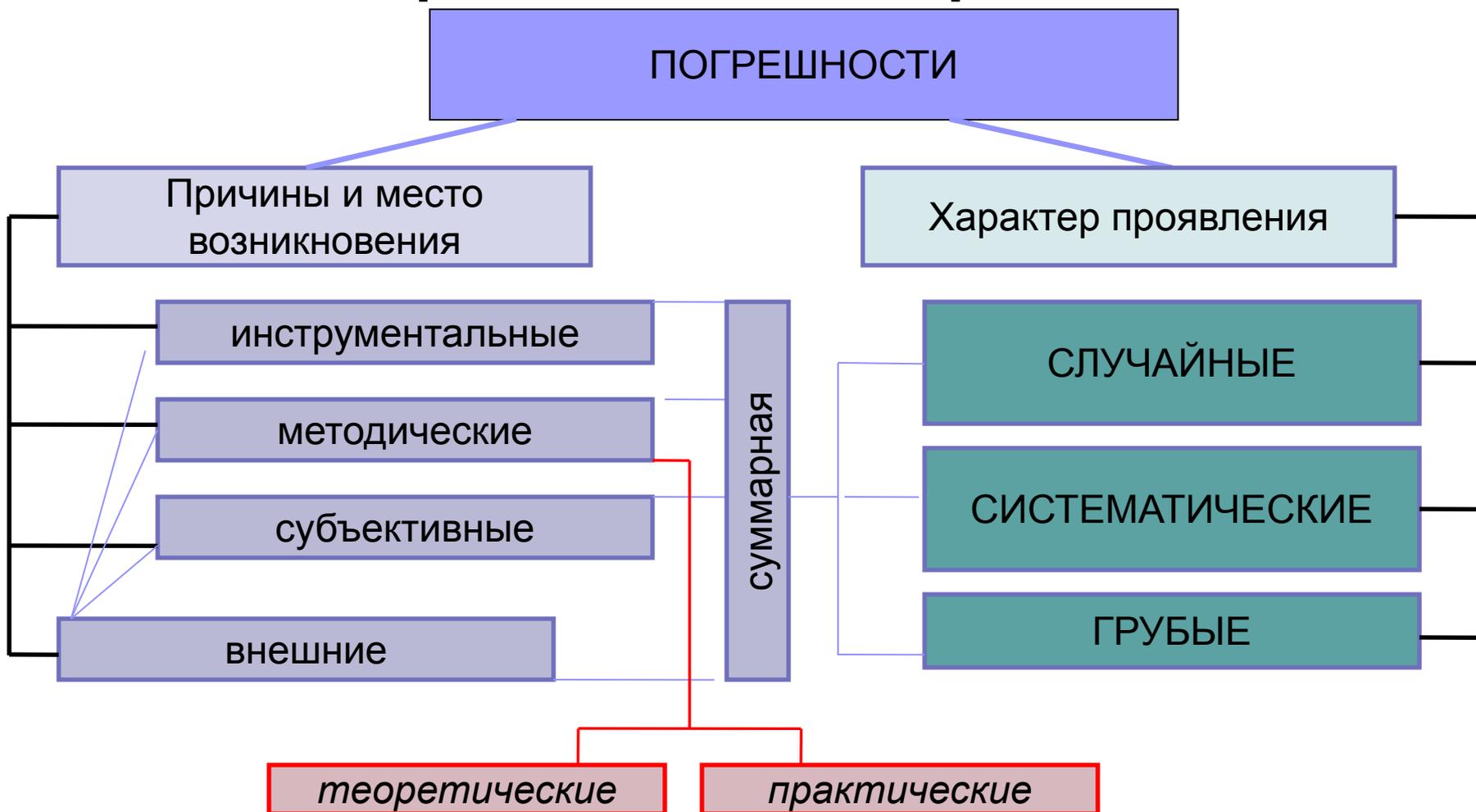




## ТЕМА 3. Основы теории погрешностей и математической статистики

1. Классификация погрешностей, причины возникновения, методы их исключения (устранения).
2. Оценка точности результатов измерений.

# Классификация погрешностей



# Систематические погрешности. Способы их обнаружения и устранения

- 1. **Инструментальные** погрешности возрастают, как правило, при увеличении срока службы измерительных средств.
  - *Следовательно, необходимо назначать разумный межповерочный интервал.*
- 2. **Теоретические (методические)** погрешности – соответствие, корректность измерительной модели исследуемому объекту, использование упрощений или допущения при вычислении результатов измерений.
  - *В зависимости от допустимой погрешности измерения должны или не должны учитывать определенные факторы.*

# Систематические погрешности. Способы их обнаружения и устранения

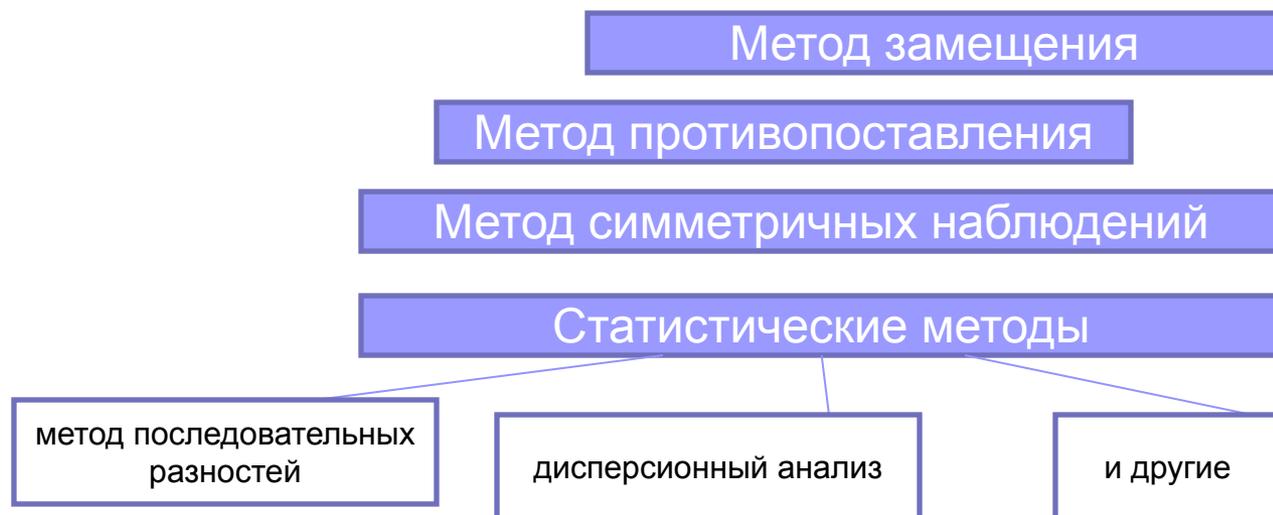
- 3. Практические (методические) погрешности – это погрешности установки прибора и погрешность оператора.
  - *Выявление субъективной систематической погрешности, обусловленной укоренившимся неверным навыком.*
- 4. Погрешности внешних условий – легко учитываются, если фактор влияния хорошо изучен и постоянно контролируется.

# Систематические погрешности. Способы их обнаружения и устранения

Пути учета и исключения систематических погрешностей от внешних воздействий.

1. Устранение источников погрешностей или обеспечение защиты от них до начала измерений

2. Исключение в процессе измерения специальными методами или вычисление и внесение в результат измерения соответствующих поправок.



# Случайные погрешности измерений

## ■ СВОЙСТВА:

- *равные по абсолютной величине положительные и отрицательные погрешности равновероятны;*
- *большие погрешности наблюдаются реже, чем малые;*
- *с увеличением числа измерений одной и той же величины среднее арифметическое погрешностей стремится к нулю, и, следовательно, среднее арифметическое результатов измерений стремится к истинному значению измеряемой величины.*

# Случайные погрешности измерений

Наиболее универсальный способ описания случайных величин заключается в отыскании их интегральных или дифференциальных функций распределения.

*Интегральной функцией* распределения  $F(x)$  называют функцию, значение которой для каждого  $x$  является вероятностью появления значений  $x_i$  (в  $i$ -м наблюдении), меньших  $x$ :

$$F(x) = P\{x_i \leq x\} = P\{-\infty < x_i \leq x\},$$

где  $P$  – символ вероятности события, описание которого заключено в фигурных скобках.

# Случайные погрешности измерений

Более наглядным является описание свойств результатов наблюдений, содержащих случайные погрешности, с помощью *дифференциальной функции распределения*, иначе называемой *плотностью распределения вероятностей*:

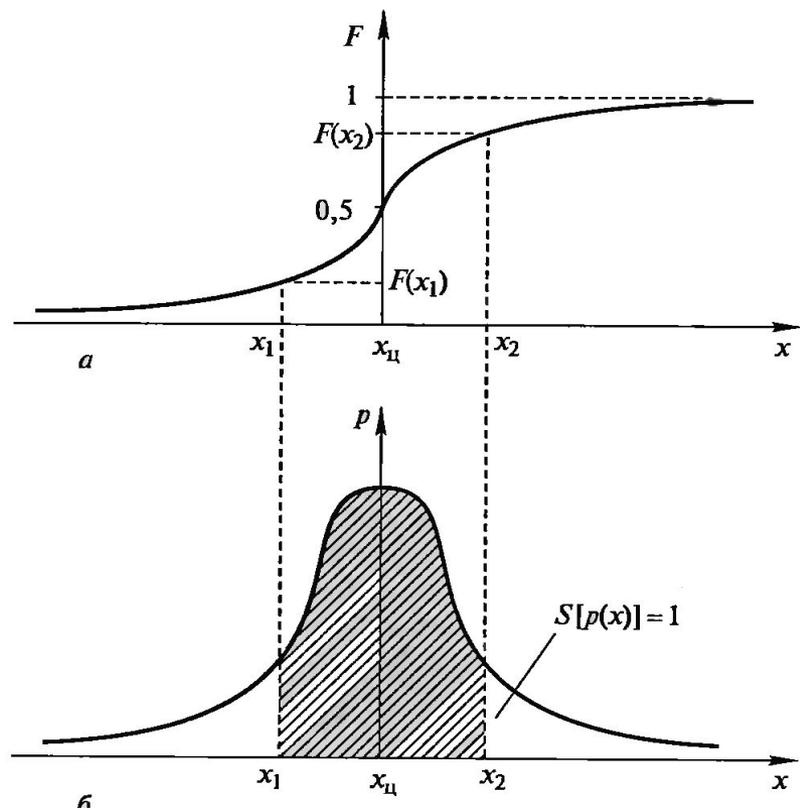
$$p(x) = \frac{dF(x)}{d(x)}.$$

Поскольку  $F(x \rightarrow \infty) = 1$ , то  $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1$ ,

т.е. площадь, заключенная между кривой дифференциальной функции распределения и осью абсцисс равна единице. Вероятность попадания случайной величины  $x$  в заданный интервал  $(x_1; x_2)$  равна площади, заключенной между абсциссами  $x_1$  и  $x_2$ :

$$p\{x_1 < x < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx.$$

# Интегральная (а) и дифференциальная (б) функции распределения случайной величины



Часто необязательно описывать случайную погрешность с помощью законов распределения плотности вероятностей, а достаточно охарактеризовать числами отдельные ее свойства. Такие числовые характеристики называют *моментами*. Моменты являются *начальными*, если величины отсчитывают от начала координат, и *центральными*, если величины отсчитывают от центра распределения.

- Математическое ожидание случайной величины представляет собой оценку истинного значения измеряемой величины. Математическое ожидание случайных погрешностей равно нулю.

$$m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} xP(x)dx$$

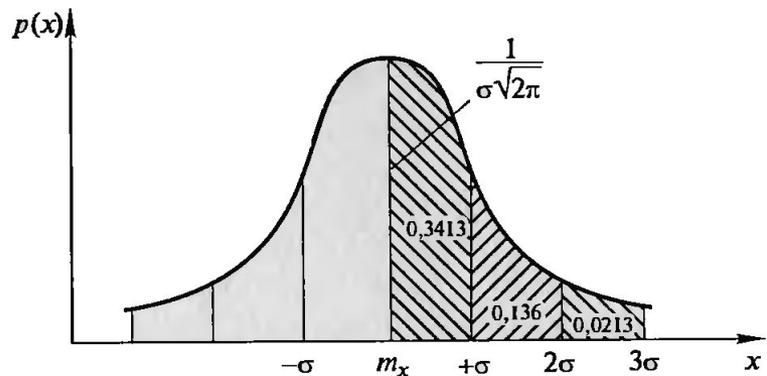
- Дисперсия результатов наблюдений является характеристикой их рассеивания. Имеет размерность квадрата измеряемой величины.

$$D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 P(x)dx = \sigma^2$$

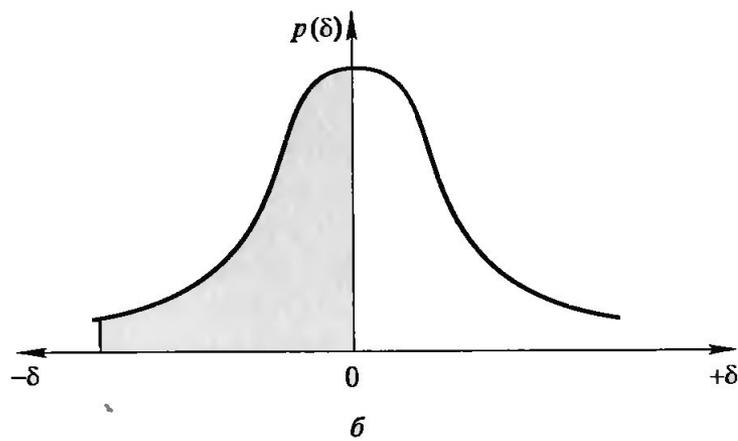
- Среднее квадратическое отклонение результатов наблюдений имеет размерность измеряемой величины и наиболее часто используется в качестве основного параметра. Характеризующего рассеивание результатов измерений.

$$\sigma = \sqrt{D(x)}$$

Кривая нормального распределения случайной величины (а) и случайной погрешности (б)



а



б

# Грубые погрешности и способы их устранения

- При однократных измерениях обнаружить промах **не представляется возможным**. Для уменьшения вероятности появления промахов измерения проводят **два-три раза** и за результат принимают **среднее арифметическое полученных отсчетов**. При многократных измерениях для обнаружения промахов используют **статистические критерии**, предварительно определив, какому виду распределения соответствует результат измерений.
- Вопрос о том, содержит ли результат наблюдений грубую погрешность, решается общими методами проверки статистических гипотез. Проверяемая гипотеза состоит в утверждении, что результат наблюдения  $x$ , не содержит грубой погрешности, т.е. является одним из значений измеряемой величины. Пользуясь определенными статистическими критериями, пытаются опровергнуть выдвинутую гипотезу. Если это удастся, то результат наблюдений рассматривают как содержащий грубую погрешность и его исключают.

# Критерий "трех сигм"

- применяется для результатов измерений, распределенных по нормальному закону.
- По этому критерию считается, что результат, возникающий с вероятностью  $q < 0,003$  ( $p=0,997$ ), маловероятен и его можно считать промахом,  
если  $|\bar{x} - x_i| > 3\sigma_x$ , где  $\sigma_x$  — оценка СКО измерений.
- Величины  $\bar{x}$  и  $\sigma_x$  вычисляются без учета экстремальных значений  $x_i$ .
- Данный критерий надежен при числе измерений  $n > 20 \dots 50$ .

# Критерий Романовского

- применяется, если число измерений  $n < 20$ .
- При этом вычисляется отношение  $|(\bar{x} - x_i)/\sigma_X| = \beta$  и сравнивается с критерием  $\beta_T$ , выбранным по табл. Если  $\beta \geq \beta_T$ , то результат  $x_i$  считается промахом и отбрасывается.

q	n = 4	n = 6	n = 8	n = 10	n = 12	n = 15	n = 20
0,01	1,73	2,16	2,43	2,62	22,75	2,90	3,08
0,02	1,72	2,13	2,37	2,54	2,66	2,80	2,96
0,05	1,71	2,10	2,27	2,41	2,52	2,64	2,78
0,10	1,69	2,00	2,17	2,29	2,39	2,49	2,62

# Вариационный критерий Диксона

- удобный и достаточно мощный (с малыми вероятностями ошибок).
- При его применении полученные результаты наблюдений записывают в вариационный возрастающий ряд  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ( $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ ).
- Критерий Диксона определяется как  $K_D = (x_n - x_{n-1}) / (x_n - x_1)$ . Критическая область для этого критерия  $P(K_D > Z_q) = q$ . Значения  $Z_q$  приведены в табл.

n	$Z_q$ при q, равном			
	0,10	0,05	0,02	0,01
4	0,68	0,76	0,85	0,89
6	0,48	0,56	0,64	0,70
8	0,40	0,47	0,54	0,59
10	0,35	0,41	0,48	0,53
14	0,29	0,35	0,41	0,45
16	0,28	0,33	0,39	0,43
18	0,26	0,31	0,37	0,41
20	0,26	0,30	0,36	0,39
30	0,22	0,26	0,31	0,34

## 2. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

### ■ ТОЧЕЧНАЯ ОЦЕНКА

- Оценку параметра называется *точечной*, если она выражается одним числом (среднее арифметическое, среднее квадратическое отклонение, дисперсия, математическое ожидание). Существует несколько методов определения оценок: *метод максимального правдоподобия*; *метод наименьших квадратов*.

### ■ ОЦЕНКА С ПОМОЩЬЮ ИНТЕРВАЛОВ

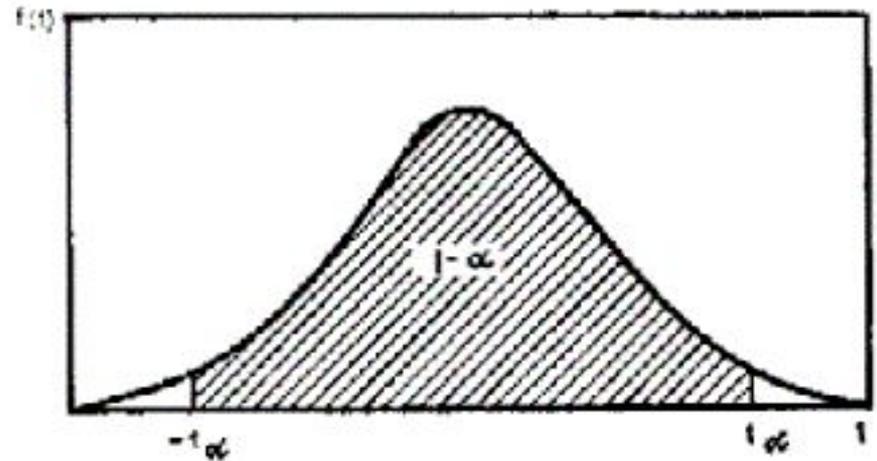
Смысл оценки параметров с помощью интервалов заключается в нахождении интервалов, называемых **доверительными**, между границами которых с определенными вероятностями (доверительными) находятся истинные значения оцениваемых параметров.

# Интервальная оценка

- Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами – концами отрезка.
- Стандартная форма записи доверительного интервала

$$\bar{x} - t_{\beta} \cdot \sigma_x \leq x \leq \bar{x} + t_{\beta} \cdot \sigma_x$$

$$t_{\beta} = \frac{\bar{x} - x}{\sigma_x}$$



# Погрешность и неопределенность результата измерений

- По инициативе ряда международных метрологических организаций была предложена концепция нового представления результатов измерений.
- Ее суть проста: обработка результатов измерений практически везде проводится с использованием аппарата теории вероятностей и математической статистики и везде погрешности разделяются на случайные и систематические. Однако модели погрешностей, значения доверительных вероятностей и формирование доверительных интервалов в разных странах заметно отличаются друг от друга, что затрудняет сличение результатов измерений.
- Для устранения этих сложностей было разработано «Руководство по выражению неопределенности в измерении».

## «Руководство по выражению неопределенности в измерении»

- Его основными положениями являются:
- запрет на использование таких понятий, как истинное и действительное значения измеряемой величины, погрешность, относительная погрешность, точность измерения, случайная и систематическая погрешности;
- вместо термина «погрешность измерения» введено понятие *«неопределенность измерения»*, трактуемое как «параметр, связанный с результатом измерения, характеризующий дисперсию значений, которые можно приписать измеряемой величине»;
- разделение составляющих неопределенности на два типа — А и В. Неопределенности измерений типа А количественно можно оценить статистическими методами на основе многократных измерений и описать традиционными характеристиками — дисперсией или СКО. Взаимодействие неопределенностей типа А описывается коэффициентом взаимной корреляции.  
Неопределенности измерений типа В могут быть оценены любыми другими методами, кроме статистических. Они должны описываться величинами, аналогичными дисперсии или СКО, поскольку именно эти характеристики можно использовать для объединения неопределенностей типа В как между собой, так и с неопределенностями типа А.